

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

47. Band, Heft 6/10

1. Juli 1953

S. 241—480

Geschichte.

● **Krbek, Franz von: Eingefangenes Unendlich. Bekenntnis zur Geschichte der Mathematik.** Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1952. VI, 331 S., 128 Abb.

Es ereignet sich nicht allzuoft, daß ein in der Forschung stehender Mathematiker sich eingehend mit der Geschichte seiner Wissenschaft beschäftigt. Chasles, Hankel, Klein, Töplitz, Loria, Reidemeister gehören zu den Ausnahmen. Auch der Verf. (Prof. an der Universität Greifswald) bekennt sich zu der Geschichte der Mathematik: Nur bei historischer Betrachtung erkennt man, wie eine neue Denkform die alte ablöst oder erweitert, sieht die Zusammenhänge und findet den Zugang zur Gegenwart. Verf. will keine vollständige Geschichte der Mathematik geben; es sind zuerst nur „Streifzüge“, in denen er — nach Erzählung eines phantastischen Traumes von einer Reise in die Vergangenheit unter Führung des Privatgelehrten Kronos („Entfesselte Zeit“, S. 11—19) — ausgewählte Einzelgebiete und Mathematikerschicksale behandelt, wobei das Psychologische, der Forscher als Mensch („Man soll über dem Gedanken den Denker nicht vergessen“, S. 3—11, „Das Rätsel Genie“, S. 72—76) im Vordergrund steht. Diese Kapitel heißen: „Das Tagebuch eines Mathematikers“ (S. 19—34, über Gauß, Abel, Galois), „Die Geburt einer Übergeometrie“ (S. 34—49, von Monge bis Plücker und Klein), „Wie im Mittelalter“ (S. 49—62, Cardano, Stifel, Galilei) und „Der Kampf zwischen Titanen“ (S. 62—72; Newton und Leibniz). — An diese „Streifzüge“ schließen sich zwei große Abschnitte: „Pythagoras würde staunen“ (S. 77—203) und „Der überholte Euklid“ (S. 205—314) an, in denen die Entwicklung von den Babyloniern bis zur Gegenwart in einer ideengeschichtlichen Gesamtschau vorgeführt wird. Die einzelnen, dem Umfang nach unterschiedlichen Kapitel lauten für den ersten Abschnitt (Analysis): „Das ABC der ältesten Kulturvölker, Ägypter, Babylonier, Chinesen“ (22. S.), „Ein Sprung im Alphabet: die Griechen“ (37. S.), „Die Geschichte vom Nichts“ (Inder, 4. S.), „Wüstensöhne werden Wissenschaftler“ (Araber, 3. S.), „Magie der Formel“ (von der antiken Gleichungslehre bis Galois, 19 S.), „Götterdämmerung“ (Infinitesimalrechnung, 26 S.), „Versagt das Denken?“ (Mengenlehre und Axiomatik, 13 S.) und für den zweiten Abschnitt (Geometrie): „Feldmesser in Ägypten, Babylonien und China“ (14 S.), „Der homo geometres erscheint“ (griechische Geometrie, 21 S.), „Ein Blick genügt“ (Inder, 4½ S.), „Die Figur der Braut“ (Araber, 5. S.), „Gleichklang von Figur und Formel“ (Analytische und Differentialgeometrie, 20 S.), „Mehr ist weniger“ (nichteuklidische und projektive Geometrie, 24½ S.) und schließlich: „Was immer noch besteht, selbst wenn die Form vergeht“ (Topologie, 19½ S.). — Schon aus dem Umfang der einzelnen Kapitel ersieht man, worauf der Verf. den Nachdruck verlegt, und so sind auch die schönen Kapitel über den Aufbau der modernen Algebra und Geometrie besonders hervorzuheben. — Dem Ref. erscheinen u. a. der algebraische Charakter und zahlentheoretische Züge der babylonischen Mathematik zu wenig gewürdigt, die Bedeutung Diophants unterschätzt, Araber wie überhaupt Mittelalter und auch Renaissance kommen zu kurz weg, da man wenig von der Übernahme griechischen Wissens, nichts von Leonardo von Pisa, Jordanus, Regiomontan, Leon Battista Alberti, Franceschi oder Luca Pacioli erfährt. Später sollte z. B. auch Bürgi (Logarithmus) und Clairaut (I. Raumkurve seit Archytas) genannt sein. Unrichtig sind die Geschichte des x (S. 144) oder Ausführungen über die Anordnung der griechischen Rechenoperationen (S. 103f.: über das „Zerreißen“ der Zahlen und das Anschreiben nach dem Stellenwert oder über den Additionsstrich weiß man nichts). Auch ein terminus ante quem für Heron (150) steht jetzt fest. Solcherlei Unstimmigkeiten wird man freilich in jedem Geschichtswerk vorfinden, und auch über Auswahl und Wertung kann man oft verschiedener Meinung sein. Bedenklich aber ist es, wenn sich Verf. zu dem Satz bekennt „Wer die Geschichte dabei nirgends korrigiert, ist weiter nichts als ein langweiliger Pedant“ (S. VI). Es läßt sich doch auch bei Wahrung der historischen Treue das Wesentliche vom Unwesentlichen scheiden! Bei den zahlreichen eingestreuten Legenden (auch die Verbrennung der alexandrinischen Bibliothek tritt wieder auf!) wären — trotz der geäußerten Abneigung gegen Fußnoten — exakte Hinweise erforderlich (Wie soll sich z. B. der Leser informieren, wenn es heißt: „Wie De Morgan im vorigen Jahrhundert glaubwürdig machen konnte, starb Euklid noch bevor er seinen ersten Entwurf . . . umarbeiten konnte (S. 34) oder auf S. 47: „Im sechsten Band des neuen Pitaval findet man darüber Näheres“). — Die bei der Schilderung der Forscherschicksale reichlich eingestreuten Anekdoten, Briefauszüge oder Originalmitteilungen beleben die Darstellung ungemain. Dabei zeigt Verf. eine Vorliebe für prägnante und ungewöhnliche Formulierungen, für Wortspiele, für spitze, manchmal allzu freie Wendungen (z. B. S. 313: „Je nun, wer . . . fähig ist, schafft, wer es

nicht schafft, lehrt“; S. 232: Platon hätte gut daran getan, die Mathematik selber zu studieren oder S. 85: „Es hat sich deshalb eingebürgert, von Hau-Rechnungen“ — bei den Ägyptern — „zu reden, woraus man aber nicht folgern soll, daß die Rechner ihren Hau(!?) weg hatten!“) und er tut sicher vielen seiner Kollegen Unrecht, wenn er von einseitig pathologischen Spezialisten spricht, von Ritzern des Integrals, die keine Ahnung davon haben, was in den Nachbarfächern vorgeht. Ihnen widmet er eine Simplicissimuskarikatur: „Mit Eifer habe ich mich für die Studien beflissen“. — Die Ausstattung auch mit Bildern (128 Abb.) ist vorzüglich. Manches könnte aber wegbleiben. Was soll z. B. (S. 72) die Steinruine mit der Erklärung „Das Werk von Archimedes überdauerte Jahrtausende, sein Grabmal nicht“ oder — bei Gauß — (S. 25) die Karikatur Goyas, in der ein alter Esel die jungen unterrichtet mit dem Titel: „Schon Goya trat für eine Schulreform ein?“ — Den Abschluß bildet ein Quellennachweis und ein Namenverzeichnis (S. 315—331), während auf ein Sachregister, daß sehr nützlich wäre, verzichtet wurde. Der Quellennachweis ist knapp; bei der Darstellung der Entwicklung der Infinitesimalrechnung und der Barockmathematik sollte man an Töplitz und J. E. Hofmann nicht vorbeugehen. Auch die Jahreszahlen des Namensverzeichnisses wären zu überprüfen. Teils sind es offenbare Versehen (Stevin 1648—1620, S. 331 oder Oresme 1630, S. 252; störend ist auch die „Haurechnung“ statt Hausrechnung — bei Stifel, S. 56), teils werden unsichere Daten nicht als solche bezeichnet. — Alle die genannten Ausstellungen und Verbesserungswünsche dürfen aber den Gesamteindruck nicht verwischen: Wir sind dem Verf. dankbar für das ungemein spannende und belehrende Werk, das dem Leser die Entwicklung der mathematischen Ideen und Gebiete im Laufe der Geschichte in lebensvolle Nähe bringt und ihn zu weiteren historischen Betrachtungen anregt, die vorzüglich geeignet sind, Zersplitterungen vorzubeugen und die Kluft zwischen den sich immer weiter voneinander entfernenden Einzeldisziplinen zu überbrücken. *K. Vogel.*

Levey, Martin: The encyclopedia of Abraham Savasorda: A departure in mathematical methodology. Isis 43, 257—264 (1952).

Verf. beschreibt nach einer Münchner Handschrift (Cod. Hebr. 36) den Inhalt einer bisher fast unbeachtet gebliebenen Enzyklopädie des Abraham Savasorda († etwa 1136), der für die Übermittlung griechisch-arabischen mathematischen Wissens von großer Bedeutung ist. Die Enzyklopädie befaßt sich mit Arithmetik (Zahlenlehre), Rechenoperationen, kaufmännischem Rechnen, geometrischen Definitionen und praktischer Geometrie. Verf. untersucht Savasordas Quellen sowie dessen Einwirkung auf Leonardo von Pisa. Dessen Abhängigkeit zeigt sich deutlich aus der Gegenüberstellung einiger Sätze aus Savasordas „Liber embadorum“ mit deren Fassung bei Leonardo. Freilich hat dieser vieles weiter ausgeführt und aus Eigenem hinzugegeben. Mit dem „unbekannten „Dimumot“, den Savasorda erwähnt, ist vielleicht Didymos gemeint. *K. Vogel.*

Clagett, Marshall: The use of the Moerbeke translations of Archimedes in the works of Johannes de Muris. Isis 43, 236—242 (1952).

Wilhelm v. Moerbeke fertigte i. J. 1269 in Viterbo eine Archimedesübersetzung nach einer aus dem Besitz der Hohenstaufen in die päpstliche Bibliothek gelangten griechischen Vorlage, die auch Johann von Cremona (etwa 1450) benützte. Verf. untersucht die für das Weiterleben Archimedischer Gedanken wichtige Frage, inwieweit die Übersetzung von Moerbeke in der Zwischenzeit kopiert oder zitiert wurde. Im Anhang I werden die „Incipits“ der einzelnen Bücher von Archimedes in den beiden Übersetzungen von Moerbeke und Johann von Cremona verglichen, im Anhang II einige Archimedes-Zitate festgestellt, die sich in einer Bearbeitung des Werkes: „De mensurandi ratione“ von Johannes de Muris vorfinden. *K. Vogel.*

• **Nikolaus von Cues: Die Mathematischen Schriften.** Übersetzt von Joseph Hofmann. Mit einer Einführung und Anmerkungen versehen von Joseph Ehrenfried Hofmann. (Im Auftrage der Heidelberger Akademie der Wissenschaften in deutscher Übersetzung herausgegeben von Ernst Hoffmann. Heft 11. Der philosophischen Bibliothek Band 231.) Hamburg: Felix Meiner 1952. LII, 268 S. 25,00 DM.

Mathematik-historische Synthesen und Einzeluntersuchungen hängen von Zahl und Güte der vorhandenen Texte und Übersetzungen ab. Hierin ist für das Mittelalter (Muslime und Abendland) noch viel zu tun. Zahlreiche Schriften sind unediert oder — da nur in Drucken des 15. und 16. Jahrhunderts veröffentlicht — schwer zugänglich. Mit der vorliegenden vorzüglichen, sich eng an den lateinischen Text haltenden Übersetzung aller mathematischen Schriften des

Cusaners (ohne die ins Gebiet der Astronomie und Physik gehörenden aber einschließlich eines Briefes an ihn) hat die Verf. eine empfindliche Lücke geschlossen. Teil II (S. 1—182) enthält in chronologischer Folge — hauptsächlich nach den Druckausgaben von Paris 1514 und Nürnberg 1533 (die Basler Ausgabe 1565, auf der M. Cantor u. a. fußen, ist nicht einwandfrei), im übrigen nach den erhaltenen Hs. — folgende zwischen 1445 und 1459 entstandene Schriften: 1. Von den geometrischen Verwandlungen. 2. Von den arithmetischen Ergänzungen. 3. Von der Quadratur des Kreises (ungedruckt). 4. Die Kreisquadratur (3 und 4 hatte man bisher als identisch angesehen). 5. Von den mathematischen Ergänzungen. 6. Magister Paulus an den Kardinal Nikolaus von Cues. 7. Erklärung der Kurvenausstreckung. 8. Über das eine Maß des Geraden und Gekrümmten. 9. Der Dialog über die Quadratur des Kreises. 10. Die Kaiserliche Quadratur des Kreises (bisher ungedruckt, die einzige Hs. hat R. Klibansky aufgefunden, der auch zahlreiche Niederschriften der anderen Arbeiten des Cusaners festgestellt hat). 11. Über die mathematische Vollendung. 12. Der Goldene Satz in der Mathematik (ungedruckt). — In den Anmerkungen zu den Texten (III, 189—252) sowie in der Einführung (I, VII—XLV; III, 185—188) gibt J. E. Hofmann ergänzende geschichtliche und besonders ausführliche mathematische Erläuterungen, die dem Leser die oft dunklen und auch fehlerhaften Stellen verständlich machen, vor allem aber werden die Gedanken des Cusaners in ihrer allmählichen Entwicklung sowie seine Beziehungen zu früheren und seine Einwirkung auf spätere Mathematiker dargelegt. Hier geht Verf. auch auf mathematische Stellen in den philosophischen Schriften (de docta ignorantia u. a.) ein. — Nikolaus von Cusa, der am Ende der Scholastik steht, in der die Diskussion der Begriffe „Unendlichkeit“ und „Kontinuum“ wieder einsetzt, geht mit Hilfe der Mathematik an diese Fragen heran. Die absolute Wahrheit, die das ewig Unveränderliche und Unendliche ist, kann vom Menschen nie erreicht werden; man kann ihr nur stufenweise näher kommen, genau wie aus dem regelmäßigen Vieleck durch Vermehrung der Eckenzahl nie ein Kreis entstehen kann. Um diese Annäherungen ist es Nikolaus von Cusa zu tun, der als einer der ersten unter den mittelalterlichen Mathematikern (auf Dominicus de Clavasio um 1346 möchte Ref. noch hinweisen) den Archimedischen Wert für π nicht als exakt ansieht. Das Problem, mit dem er sich in allen seinen Schriften beschäftigt, ist Ausstreckung und Quadratur des Kreises. Er packt es immer wieder von einer anderen Seite an. Am Anfang hat er eine Proportionalität zwischen $f - f_n$ und $r_n - \varrho_n$ (Kreis f und Vieleck f_n isoperimetrisch, r_n und ϱ_n Um- und In-Kreisradien von f_n) vermutet, in der „Mathematischen Vollendung“ kommt er zu der Formel für den Kreisradius $r \approx \frac{1}{3}(2r_n + \varrho_n)$. Die Darlegung des Zusammenhangs dieser Formel mit den weiteren Untersuchungen bei Vieta, Snellius und Huygens sowie ihre Herleitung unter Verwendung eines Verfahrens von Gregory bildet den Abschluß der ausgezeichneten Einführung. — Weitere nützliche Beigaben sind eine Zusammenstellung der bekannten Hs. und Drucke (I, XLVI—LII), sowie 3 Register: Namen- und Schriftenverzeichnis (253—260), angeführte Schriften des Cusaners in chronologischer Reihenfolge (261—262) und Sachweiser (263—268). — So ist der Weg erstmalig geebnet für jeden, der sich wieder versenken will in den Gedankenreichtum des genialen Laien, der von der Philosophie zur Mathematik kam und der trotz aller Unzulänglichkeiten (bezüglich Methode und Beweis) mit seinem Denken in Funktionen, wohl auch mit seinen Vorstellungen vom Indivisiblen und Infinitesimalen, weit über seiner Zeit steht. *K. Vogel.*

Hofmann, Jos. E. und Pierre Costabel: A propos d'un problème de Roberval.

1. Hofmann, Jos. E.: Les sources du problème. 2. Costabel, Pierre: Réflexion sur la méthode de Viète. 3. Hofmann, Jos. E.: Note complémentaire. *Revue Hist. Sci. Appl.* 5, 312—318, 319—326, 326—333 (1952).

In der ersten Note macht Jos. E. Hofmann in Anknüpfung an eine frühere Arbeit von P. Costabel einige interessante Angaben zur Geschichte der sog. Robervalschen Aufgabe: „Zwei gleichschenklige Dreiecke von gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt zu finden, deren Seiten in ganzen Zahlen gemessen werden können“. Er zeigt mit reichen Quellenangaben, daß diese Aufgabe auf eine Untersuchung von Diophant zurückgeht, daß Viète, Mariotte, Descartes und J. H. Rahn (in Teutsche Algebra, Zürich 1659) sich erfolgreich mit Problemen beschäftigt haben, die mit dem genannten verwandt oder identisch sind und berichtet über die dabei benutzten Methoden. In der zweiten Note befaßt sich P. Costabel mit der Methode, die Viète bei der Lösung des von ihm behandelten zahlentheoretischen Problems angewandt hat. Er macht darauf aufmerksam, daß die *Zetetica*, in denen Viète's Arbeit steht, im Jahre 1630 ins Französische übersetzt wurden, daß sie Roberval bei seiner Formulierung des Problems (1633) und Mariotte in der Akademiesitzung vom 25. 7. 1668 bekannt sein mußten, gibt die französische Übersetzung des in der ersten Note abgedruckten lateinischen Originaltextes aus dem vierten Buch der *Zetetica* und knüpft an deren Diskussion einige geistreiche Bemerkungen über die Entwicklungsgeschichte der Mathematik im Bereich dieses speziellen Problems. Seine Ausführungen geben Jos. E. Hofmann Anlaß zur dritten Note, in der er auf Viète's Methode bei der Behandlung zahlentheoretischer Probleme hinweist, eine Vermutung über die Herkunft der Bezeichnung „Robervalsches Problem“ äußert, zwei Noten von Huygens aus dem Jahre 1668 über das Problem mitteilt und mit einigen Sätzen die Stellung Leibnizens

zur Zahlentheorie umreißt. Das Ganze ist ein bemerkenswerter Beitrag zur Entwicklung mathematischer Einsichten an der Geschichte eines speziellen Problems. *E. Löffler.*

Rajagopal, C. T. and T. V. Vedamurti Aiyar: A Hindu approximations to π . *Scripta math.* 18, 25—30 (1952).

In Weiterführung ihrer Mitteilungen über die arctg-Reihe in indischen Mskr. des 15. Jh. [*Scripta math.* 17, 65—74 (1951)] berichten die Verf. über die Umbildung der Leibniz-Reihe vermöge der Näherungen $\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \sim \frac{(-1)^n}{4n}$ bzw. $\frac{(-1)^n n}{4n^2+1}$ bzw. $\frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{n^2+1}{4n^2+5}$. Sie sind durch abgebrochene Kettenbruchentwicklungen entstanden. Bei schrittweiser Anwendung liefert die 1. die Reihe $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} \mp \dots$, die 2. die Reihe $\frac{\pi}{16} = \frac{1}{1^4+4} - \frac{1}{3(3^4+4)} + \frac{1}{5(5^4+4)} \mp \dots$. Ref. bemerkt ergänzend, daß es sich um Umordnungen der Leibnizreihe handelt, die 1. vermöge der Identität $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4(n+1)} - \frac{1}{2n(2n+1)(2n+2)}$, die 2. leicht zu übersehen aus der zweckmäßigeren Schreibweise $\frac{\pi}{16} = p_0 p_1 - \frac{1}{3} p_1 p_2 + \frac{1}{5} p_2 p_3 \mp \dots$ mit $p_k = 1 : (4k^2 + 1)$. — Bedauerlich, daß diese höchst interessanten Entwicklungen erst jetzt ans Tageslicht kommen und den europäischen Zeitgenossen unbekannt blieben! *J. E. Hofmann.*

Natucci, Alpinolo: Leonardo geometra. *Archimede* 4, 209—213 (1952).

Verf. gibt einen Überblick über Leonardos Quadraturen von Flächen, Ausmessung von Kreismöndchen, Kubaturen, Konstruktionen mit fester Zirkelöffnung, Bestimmung regelmäßiger Vielecke, Schwerpunktbestimmungen an Vielfachen, instrumentale Behandlung von Einzelfragen (z. B. Alhazensches Problem) und Ansätze, welche in Richtung infinitesimaler Methoden zielen. *J. E. Hofmann.*

Signorini, Antonio: Leonardo e la meccanica. *Archimede* 4, 221—227 (1952).

Boyer, Carl B.: Descartes and the radius of the rainbow. *Isis* 43, 95—98 (1952).

Conte, Luigi: Fermat e la costruzione dei problemi solidi. *Archimede* 4, 126—129 (1952).

Kurze Inhaltsangabe der *Isagoge ad locos planos et solidos* (1636, Erstdruck 1679, dtische Ausg. v. H. Wieleitner, Ostwalds Klassiker Nr. 208, 1923, vom Verf. nicht erwähnt) mit ergänzenden Hinweisen auf einschlägige Literaturstellen.

J. E. Hofmann.

Cavallaro, Vincenzo G.: Trisezione dell'angolo. Nota storico-critica. *Archimede* 4, 259—261 (1952).

Gini, Corrado: L'evoluzione del concetto di media. *Metron* 16, Nr. 3—4, 3—26 (1952).

In questo articolo viene sinteticamente analizzata l'evoluzione subita dal concetto di media dall'antichità ad oggi: le varie fasi di tale evoluzione che portano dall'originario e primordiale concetto di media degli antichi Greci (termine centrale di una proporzione continua) alla successiva generalizzazione al campo delle progressioni e quindi a quello delle distribuzioni di numeri qualsiasi, sono inquadrate dal punto di vista più completo e generale in modo da consentire di rendersi chiaramente conto di tutti gli aspetti e di tutte le difficoltà di tale generalizzazione. La ricerca è completata da un'acuta analisi critica di alcune recenti definizioni di media e di un cenno di alcune originali estensioni del concetto di media a particolari tipi di distribuzioni. *E. Pizzetti.*

Tambs Lyche, R.: Streifzüge durch die Geschichte der Mathematik in Norwegen. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, XXI—XXXI (1952) [Norwegisch].

Bronštejn, I. N.: Die Auswertung des Nachlasses von N. I. Lobačevskij und der Materialien zu seiner Biographie. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 61—74 (1952) [Russisch].

Es wird dargelegt, wie viele Einzelheiten aus dem Leben Lobačevskijs, der sich auf 8 verschiedenen Gebieten als Forscher, Lehrer, Rektor, Bibliothekar usw. betätigt hatte, trotz der inzwischen in der Sowjetunion veröffentlichten biographischen Materialien noch der Aufklärung harren. Verf. entwickelt einen Plan zum systematischen Studium der Bibliotheken, Archive usw., um zu einer wirklich umfassenden Biographie Lobačevskijs zu gelangen.

W. Burau.

Morozov, V. V.: Über N. I. Lobačevskijs algebraische Manuskripte. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 75—78 (1952) [Russisch].

Verf. hat algebraische Handschriften Lobačevskijs aus den Jahren 1821—25 durchforscht. Interessant ist dabei die Feststellung, daß Lobačevskij noch an die Lösbarkeit der Gleichungen von höherem als 4. Grad geglaubt hat und sich um die Lösung derselben bemühte. Es wird nachgewiesen, daß er das berühmte Resultat Abels aus dem 1. Band des Crelleschen Journals nicht gekannt haben kann.

W. Burau.

Dubjago, A. D.: N. I. Lobačevskijs Reise nach Penza zur Beobachtung der Sonnenfinsternis im Jahre 1842. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 87—98 (1952) [Russisch].

Am 8. 7. 1842 hat Lobačevskij, der auch mit der Astronomie engen Kontakt besaß, eine Sonnenfinsternisexpedition nach Pensa, zusammen mit Ljapunov und Knorr, unternommen und darüber später berichtet. Der Bericht ist wertvoll durch einige astronomische und physikalische Bemerkungen, die später jedoch nicht weiter ausgearbeitet worden sind. So mutet Lobačevskij z. B. in seinem Zweifel an der damals absolut herrschenden Wellentheorie des Lichtes durchaus modern an.

W. Burau.

Laptev, B. L.: Die Theorie der parallelen Linien in N. I. Lobačevskijs frühen Arbeiten. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 99—116 (1952) [Russisch]. Zweiter Abdruck einer bereits früher besprochenen Arbeit (dies. Zbl. 44, 246).

W. Burau.

Terracini, Alessandro: Guido Castelnuovo; 1835—1952. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 86, 366—377 (1952).

Segre, Beniamino: Gino Fano. Archimede 4, 262—263 (1952).

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● **Speiser, Andreas:** Die mathematische Denkweise. (Wissenschaft und Kultur. Band I.) 3. Aufl. Basel und Stuttgart: Verlag Birkhäuser 1952. 128 S., 10 Tafeln und 11 Textabb. Fr. 14,55.

Im Vorwort sagt Verf.: Das Band, das sie verschiedenen Gebiete zusammenfaßt, die in dem vorliegenden Buch behandelt werden, bildet die antike Lehre von der mathematischen Natur der Seelenkräfte . . . Die Logik habe ich absichtlich beiseite gelassen. „Wenn es bei uns nur auf die logische Verkettung von Axiomen ankäme“, behauptet Verf. (50—51), „so wäre unsere Wissenschaft in der Tat nur tautologisch; jeder Formalismus wäre damit gerechtfertigt und es gäbe keinen Unterschied zwischen tiefen und oberflächlichen Arbeiten. Hier muß man eine höhere Sphäre, welche die eigentlichen mathematischen Gebilde enthält, annehmen“. Mit Leidenschaft wird wiederholt, daß der mathematischen Denkweise die Erfassung der Symmetrie (Gleichgewicht), Harmonie oder Proportion zugrunde liegt. Deshalb hat Verf. ein besonderes Interesse für die Einflüsse der neuplatonischen Philosophie und will uns sogar auch die schwierige Lehre der Zahlen bei den Neuplatonikern klar machen. Unter den 9 Hauptartikeln behandeln 3 die Ornamentik und Musik (über Symmetrien in der Ornamentik, Formfragen in der Musik, Notenbeispiele) und in den übrigen 6 ist hauptsächlich von den neuplatonischen Einflüssen die Rede (Die Naturphilosophie von Dante, Proklus Diadochos über die Mathematik, über die Zahlen und den Raum bei den Neuplatonikern, Goethes Farbenlehre, Kepler und die Lehre von der Weltharmonie). „Man kann nicht gerade sagen“, sagt Verf. (S. 63), „daß in der neueren

Zeit die Mathematik in diesem (platonischen) Sinne verwendet wird. Der tiefere Grund liegt darin, daß durch das Christentum in allen die Seele betreffenden Fragen die mathematischen und überhaupt die philosophischen Kräfte durch die viel mächtigeren religiösen ersetzt worden sind. Trotzdem behalten diese Lehren ihren Wert, und es ist kein Zweifel, daß die Philosophie, wenn sie autonom sein will, der Mathematik als ihres Rechtsgrundes bedarf.“ Verf. geht so weit, daß er „über die Astrologie“, deren merkwürdige Bedeutung in der abendländischen Geistesgeschichte wir natürlich anerkennen sollen, einen Artikel aufstellt und im Artikel „Kepler und die Lehre von der Weltharmonie“ von dessen Jahresprognostiken und Nativitäten, mit denen Kepler sich Ruhm gewann, ziemlich ausführlich spricht. Überall im Buch spürt der Leser das Heimweh der modernen aufgeklärten Mathematik. — Die vorliegende 3. Auflage ist im Text nicht verändert. doch dem Bilderteil wird ein Gemälde Dürers als schönes Beispiel für die Bedeutung der Geometrie in der Kunst beigegeben.

Z. Suetuna.

Varini, Bruno: *Valore della matematica.* Archimede 4, 236—242 (1952).

Piaget, Jean: *La logistique axiomatique ou „pure“, la logistique opératoire ou psychologique et les réalités auxquelles elles correspondent.* Methodos 4, 72—85 (1952).

Der Autor legt deutlich den Unterschied zwischen der Disziplin „Logistik, (mathematische Logik)“, (sowie ihren Aufgaben und Anwendungsbereichen) und der ihm vorschwebenden „Logistique opératoire“ dar, die (neb. and.) die Aufgabe hat, die Denkkzusammenhänge (Denkstrukturen) (z. B. in der Psychologie der Kinder etc.) etwa in demselben Sinne zu erfassen, wie die auf die Realität angewandte Mathematik, diese erfaßt. . . . „la logistique opératoire ne prétend pas être une logique, mais un modèle algébrique des opérations réelles de la pensée.“ — Ob sich in der Psychologie (z. B. des Kindes) solche Operationen finden lassen, die den logischen Funktionen entsprechen, ist Sache des Psychologen. Das, was der Autor intendiert, ist eigentlich eine angewandte „abstrakte Algebra“ (z. B. im Sinne von K. Shoda, dies. Zbl. 39, 24) (eher weitgefaßt) bzw. eine angewandte Verbandstheorie (eher eng gefaßt), zuzüglich gewisser Teile der Kombinatorik. Die Beziehung zur Logik besteht vornehmlich darin, daß das, was durch die genannten math. Hilfsmittel erfaßt werden soll, gewissermaßen der Denktätigkeit entspricht, also automatisch gewisse in der Logistik vorkommende Verknüpfungen bzw. deren logische Interpretationen nahegelegt werden.

Gert H. Müller.

Bronowski, J.: *The logic of experiment.* Advancement Sci. 9, 289—296 (1952).

In diesem vor der Abteilung Mathematik und Physik der British Association for the Advancement of Science in London gehaltenen Vortrag behandelt Verf. geistvoll und kritisch die in den Naturwissenschaften angewandten Methoden des Schließens und vergleicht sie mit denen der Mathematik. Ausgehend von der Erkenntnis Descartes', daß der Schlüssel zum Weltall seine mathematische Ordnung sei, und dem Gedanken von Hobbes, der das Kausalitätsprinzip mit der Logik Euklids vergleicht, kennzeichnet er die naturwissenschaftliche Methode von Newton, Huygens und anderen als axiomatisch und erörtert im Anschluß an Hume's Kritik der naturwissenschaftlichen Schlußweise die Bedeutung des Zeitbegriffs. Weiter schildert er kritisch an eindrucksvollen Beispielen das Verfahren, durch Experimente die Zulässigkeit einer Theorie zu prüfen, und führt den Gedanken von Leibniz näher aus, der die Entschleierung der Natur mit dem Lösen einer Geheimschrift vergleicht. So kommt er auf seinen Hauptgedanken, daß die Entdeckung eines Schlüssels zu dieser Geheimschrift (d. h. eine Theorie) dem Naturwissenschaftler den Zugang zu den von der Natur gestellten Problemen erschließt. Die Naturvorgänge seien Botschaften, und jener Schlüssel müsse so gewählt werden, daß diese Botschaften so aufschlußreich als möglich sind. Das Verfahren der Wissenschaft besteht darin, daß sie den Schlüssel in seine konstituierenden Symbole und deren Anordnungsgesetze „aufbricht“. Sodann wird noch einmal die Rolle der Zeit bei dem durch Versuche nachgeprüften axiomatischen Verfahren behandelt. Zum Schluß weist Verf. darauf hin, daß die „Methode der atomaren Modelle“, das Suchen des Schlüssels, für die Naturwissenschaften großen Erfolg hatte, daß sie aber gegenüber Erscheinungen wie der Musik und gegenüber Begriffen wie Ehre, Schönheit usw. versagt.

E. Löffler.

Linke, Paul F.: *Eigentliche und uneigentliche Logik.* Methodos 4, 165—188 (1952).

Die mehrwertigen Logiken sind bekanntlich ziemlich gleichzeitig von J. Lukasiewicz (1920) und E. L. Post (1921) ausgedacht worden. Sie haben in den letzten 30 Jahren zu zahlreichen Auseinandersetzungen zwischen Mathematikern und Philosophen geführt und haben in der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in der Quantentheorie manche Anwendung gefunden.

In der vorliegenden rein logischen Untersuchung spricht Verf. zunächst vom Formalismus und seiner Interpretation und stellt die Frage, ob und inwieweit die nicht-zweiwertigen „Logiken“ als echte und eigentliche Logik betrachtet werden dürfen. Er unterscheidet hiernach zwischen der eigentlichen und einer uneigentlichen Logik und kommt nach kritischen Ausführungen über die Lehren von J. Lukasiewicz, R. Carnap und H. Reichenbach zu dem Ergebnis, daß die sogenannten mehrwertigen Logiken nicht mehr eigentliche Logik, sondern, wie C. F. v. Weizsäcker es ausgedrückt hat, nur ein mathematischer Kalkül sind, bei dessen Deutung die zweiwertige Logik vorausgesetzt wird. Verf. gibt aber zu, daß, wenn man jeden Aussageformalismus eine Logik nennt, es bei einer extrem formalen Betrachtung mehrwertige Logiken gebe und daß solche uneigentlichen Logiken einen hohen wissenschaftlichen Wert haben können, z. B. bei Zukunftsaussagen, in der Quantenmechanik und für die Darstellung anderer, komplizierter wissenschaftlicher Zusammenhänge. — In einer Fußnote stellt die Redaktion der Zeitschrift „Methodos“ für eine spätere Nummer eine Erörterung dieser Arbeit aus der Feder von S. Ceccato in Aussicht.

E. Löffler.

Vaccarino, Giuseppe: Consapevolizzazione del formalismo. Methodos 4, 3—12 und engl. Übersetzung 13—18 (1952).

Verf. wendet sich gegen die Auffassung vom Wesen des Formalismus, nach der die benützten Bezeichnungen reine Zeichen ohne Bedeutungscharakter sind, die nach gewissen Bildungs- und Umformungsregeln in mechanischer Weise so behandelt werden, daß über das, was ausgedrückt werden soll, keine Zweifel und Mißverständnisse entstehen können. Die Vertreter dieser Auffassung glauben, daß durch gewisse Operationen mit solchen graphischen Zeichen rein formale Dinge erzeugt werden, d. h. Symbole, denen nichts Symbolisiertes entspricht und daß aus diesen Bestandteilen formale Sprachen oder linguistische Kalküle, wie z. B. die Mathematik nach D. Hilbert oder die logische Syntax nach R. Carnap gebildet werden. Nachträglich ist es dann möglich, solchen Zeichen eine Bedeutung beizulegen, sie also semantisch zu deuten, so daß die vollkommene Strenge der formalen Behandlung auf das so Symbolisierte übertragen wird. Im Gegensatz dazu vertritt Verf. im Anschluß an andere italienische Gelehrte (besonders S. Ceccato) die Ansicht, daß die erwähnte Auffassung auf einem Mangel an Einsicht in die wirkliche Bedeutung der Begriffe „Zeichen“ und „Symbol“ beruhe. Von Natur aus gebe es keine Symbole. Ein Ding werde erst zum „Symbol“ gemacht durch eine Operation, die er „Semantisierung“ nennt und die darin besteht, daß dieses Ding mit einem anderen Ding, dem „Symbolisierten“, in Beziehung gesetzt wird. Symbol und Symbolisiertes entstehen also gleichzeitig durch eine Art „Belehnung“ (Investitur). Es sei hiernach unmöglich, von Symbolen ohne Symbolisiertes und von Symbolisiertem ohne Symbol zu sprechen; graphische Zeichen seien also nicht „rein formal“. Verf. stellt nun die Frage, was geschehe, wenn die sogenannte formale Behandlung einsetzt und welche Vorteile die Behandlung vor der sonst üblichen habe. Er meint, der Ausdruck „reines Symbol“ bedeute häufig nur, daß etwas Beliebiges symbolisiert werde, dabei werde aber die Willkür gewöhnlich durch gleichzeitig eingeführte Einschränkungen eingengt. Symbole mit beliebigem Symbolisiertem nennt er *Q*-Symbole (sie kommen auch in der gewöhnlichen Sprache vor), solche, für die das Symbolisierte etwas Bestimmtes ist, nennt er *S*-Symbole. Die Operationen, durch die sie entstehen, heißen entsprechend *Q*-Semantisierung und *S*-Semantisierung. Es ergibt sich, daß eine formale Behandlung durch die Verwendung von *Q*-Symbolen gekennzeichnet ist. Mit Hilfe dieser Unterscheidung wird eine Reihe von Begriffen wie Axiom, Strenge, Wahrheit, Widerspruch, vollständige Induktion usw. an Beispielen kritisch beleuchtet. Zum Schluß wird die Bedeutung der *Q*-Symbole für die philosophische Deutung von Formalismen berührt und auf die Verwandtschaft mit K. Goedels Arithmetisierung hingewiesen. Die Abhandlung ist einem in Vorbereitung befindlichen Buche über die Konstruktion einer „einsichtig gemachten“ (it. *consapevolizzata*, engl. *awarened*) Sprache entnommen. Auf den italienischen Text folgt eine vollständige englische Übersetzung.

E. Löffler.

Issmann, Samuel: Problèmes de la définition. Methodos 4, 91—118 (1952).

In der Einleitung zu dieser Abhandlung setzt Verf. den Unterschied zwischen den beiden Arten von Sprachen auseinander, den künstlichen (formalen und strengen) einerseits, den natürlichen (unbestimmten und mehrdeutigen) andererseits. Er kennzeichnet die beiden Wissenschaften, die sich aus dem Studium der Eigenschaften der formalisierten Sprachen entwickelt haben, nämlich die Syntax und die Semantik. Er würdigt kritisch die Anschauungen verschiedener Autoren über die unbestimmten und mehrdeutigen Begriffe, charakterisiert die formalisierten und die natürlichen Sprachen und wirft die Frage auf, ob die Formalisierung der Sprache unerläßlich sei, um streng zu definieren, d. h. in der Weise, daß definiendum und definiens scharf unterschieden bleiben und die Bestandteile der Sprache genau verzeichnet werden. Im ersten Teil werden sodann die Definitionen in den natürlichen und den formalisierten Sprachen behandelt. Die wesentlichen Kennzeichen einer Definition werden herausgearbeitet, der Unterschied zwischen nominalen oder normativen und reellen oder beschreibenden Definitionen wird eingehend erörtert, Stellung und Bedeutung dieser beiden Gattungen der Definition in den natürlichen und formalisierten Sprachen werden geklärt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Analyse eines Ausdrucks, d. h. mit dem

logischen Verhältnis zwischen analysans und analysandum und stellt den Zusammenhang zwischen Analyse und Definition her. — Die Arbeit setzt unter Heranziehung neuester Literatur in klarer Weise die definitorischen Probleme auseinander, die sowohl von Syntaktikern und Semantikern als auch von Analytikern behandelt worden sind. Vermißt habe ich einen Hinweis auf Arbeiten derjenigen Logiker und Philosophen, die die Definition unter operativen Gesichtspunkten behandeln (z. B. der italienischen Schule von S. Ceccato; s. die vorstehend besprochene Arbeit von G. Vaccarino). Auf S. 117—118 findet sich eine kritische Würdigung der Arbeit in italienischer Sprache von S. Ceccato, P. Facchi und G. Vaccarino. *E. Löffler.*

● **Hermes, H. und H. Scholz: Mathematische Logik.** (Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. 2. völlig neubearb. Aufl. Band I 1, Heft 1, Teil 1). Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1952. 82 S.

Die neue Auflage der Enzyklopädie enthält jetzt neben dem Artikel von A. Schmidt: „Mathematische Grundlagenforschung“, Leipzig 1950 (vgl. dies. Zbl. 41, 343) eine Darstellung der „Mathematischen Logik“. Dies ist um so wichtiger, als damit erstmalig in deutscher Sprache eine systematische Darstellung der Logik in „semantischer“ Auffassung mit Berücksichtigung aller neueren Literatur gegeben wird. Die Verf. haben daher den Bericht so abgefaßt, daß er auch als Einführung für diejenigen dienen kann, der dem Gebiet fernsteht. Die Beweise fast aller wichtigen Theoreme werden skizziert. Dieser Effekt auf so engem Raum ist vor allem durch klare Gliederung des Stoffes und eine prägnante Terminologie ermöglicht. — Vorausgesetzt wird (1) die Existenz von Prädikaten π, π_1, π_2, \dots und Subjekten ξ, ξ_1, ξ_2, \dots , mit denen Aussagen $\pi \xi_1 \dots \xi_n$ gebildet werden können, (2) die Existenz von Funktoren, mit denen aus Aussagen weitere Aussagen gebildet werden können, (3) die Existenz der Bedeutung jeder Aussage, die einer der Wahrheitswerte wahr oder falsch ist. Eine Sprache, die an Stelle der Aussagen (bzw. Prädikate, Subjekte) nur Variable A, A_1, \dots (bzw. $p, p_1, \dots; x, x_1, \dots$) enthält, heißt eine Sprache der Logik (L -Sprache). Ein Ausdruck einer L -Sprache heißt allgemeingültig, wenn aus ihm bei jeder Ersetzung der Variablen eine wahre Aussage entsteht. Aufgabe der Logik ist die Gewinnung von Theoremen über die Allgemeingültigkeit von Ausdrücken einer L -Sprache. I. (§§ 1—4) Für die A -Sprache (Aussagenvariable und die Funktoren $\wedge, \vee, \sim, \rightarrow, \leftrightarrow$), die P -Sprache (Prädikat- und Subjektvariable, die A -Funktoren und $\forall x, \exists x$) und die I -Sprache (Erweiterung der P -Sprache durch das 2-stellige Prädikat \equiv) werden die wichtigsten semantischen Theoreme behandelt: das Entscheidungsverfahren der A -Logik, die Äquivalenz der Allgemeingültigkeit mit der \aleph_0 -Allgemeingültigkeit für P -Ausdrücke (Löwenheim-Skolem) und die Repräsentantentheorie der P - und I -Logik. II. (§§ 5—8) Es wird die syntaktische Charakterisierbarkeit der allgemeingültigen Ausdrücke untersucht. Die Existenz einer entscheidbaren Menge M_0 von Ausdrücken (Axiomen) und von endlich vielen entscheidbaren Relationen $R(H_1, \dots, H_n; H)$ (definierenden Relationen), derart daß ein Ausdruck genau dann allgemeingültig ist, wenn er in endlich vielen Schritten von M_0 ausgehend und von H_1, \dots, H_n zu H übergehend ableitbar ist, ist für die A -Logik trivial, für die P - und I -Logik wird sie impliziert von den entsprechenden Gödelschen Vollständigkeitstheoremen. Die von den Verf. vertretene Auffassung der Logik erzwingt diese Priorität der Semantik vor der Syntax, die konsequent durchgeführt wird. III. (§§ 9—11) Der in II. auftretende Begriff der Entscheidbarkeit einer Relation wird durch die Rekursivität der charakteristischen Funktion definiert. Es wird über äquivalente Begriffe (Church, Post, Turing) berichtet und über Entscheidungsprobleme der P - und I -Logik. IV. (§§ 12—14) Die Problematik der L -Sprachen, die bei Erweiterung der P -Sprache durch Quantifizierung der Prädikatenvariablen entstehen, wird diskutiert. Zunächst werden die Kalküle behandelt, die die Russellsche Antinomie durch Modifikation des Komprehensionsaxioms vermeiden (Zermelo, Quine), dann werden die (unverzweigten) Stufenkalküle $K^{(n)}$ definiert. Die allgemeingültigen Ausdrücke sind für $n \geq 2$ nicht syntaktisch charakterisierbar. Dies wird impliziert von der Nichtdefinierbarkeit des Wahrheitsbegriffes der in $K^{(2)}$ formalisierten Arithmetik (Tarski) und von der syntaktischen Unvollständigkeit dieser Arithmetik (Gödel). Es wird auf die Möglichkeit eines Widerspruchs in der zur Definition der Allgemeingültigkeit von $K^{(n)}$ -Ausdrücken vorausgesetzten „absoluten“ Ontologie aufmerksam gemacht und über die semantische Vollständigkeit der Stufenkalküle bez. einer „relativierten“ Ontologie (im Sinne der „general models“ von Henkin) berichtet. — Um auf nicht unmittelbar mit I—IV zusammenhängende Fragen einzugehen, blieb den Verf. kein Raum. Es wird nur noch in § 15 der Gentzensche Sequenzenkalkül und die semantische Charakterisierung seiner Sätze dargestellt. *P. Lorenzen.*

Robinson, Julia: Existential definability in arithmetic. Trans. Amer. math. Soc. 72, 437—449 (1952).

Eine Relation $R(x_1, \dots, x_n)$ zwischen natürlichen Zahlen heißt arithmetisch, wenn es einen Ausdruck H folgender Art gibt: (1) H enthält neben den freien Variablen x_1, \dots, x_n nur gebundene Variablen, Zeichen für spezielle natürliche Zahlen, die mathematischen Zeichen $+$ und \cdot , und die logischen Zeichen \vee (oder), \wedge (und), \sim (nicht), \forall (für alle), \exists (es gibt) und $=$ (ist gleich); (2) ein n -tupel k_1, \dots, k_n von natürlichen Zahlen verifiziert H genau dann, wenn $R(k_1, \dots, k_n)$ gilt. — Verf. nennt eine solche Relation R „existentially definable“ (im folgenden kurz mit

„ e -definierbar“ übersetzt), wenn sie durch einen Ausdruck der eben beschriebenen Art definiert werden kann, der weder \forall noch \sim enthält. Wird die Forderung (I) dahingehend verändert, daß in dem Ausdruck H' die aufgeführten Symbole bis auf \forall und \sim , und zusätzlich Zeichen für Relationen S_1, \dots, S_k vorkommen dürfen, so heißt die durch H' definierte Relation e -definierbar durch die Relationen S_1, \dots, S_k . Alle primitiv-rekursiven Relationen sind (nach Gödel) arithmetisch. Verf. untersucht einige dieser Relationen [$x = y^z$, $x = y!$, x Pot y (x ist eine Potenz von y) und andere] im Hinblick auf e -Definierbarkeit. Ihr Hauptresultat lautet: Die Funktion $x * n$ sei definiert durch $x * 0 = 1$, $x * (n + 1) = x^{(x * n)}$; dann gilt: Die Relation $x = y^z$ ist e -definierbar durch jede Relation S mit den Eigenschaften (a) $\exists n \forall x \forall y (S(x, y) \rightarrow y < x * n)$, (b) $\forall n \exists x \exists y (S(x, y) \wedge y \geq x^n)$. — Der Beweis beruht auf einer geschickten Ausnutzung von Eigenschaften der ganzzahligen Lösungen der Pellischen Gleichung $x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Verf. zeigt ferner: (I) $x = y^z$ ist e -definierbar durch x Pot y ; (II) die Relationen $r = \binom{n}{k}$, $y = x!$, sowie Prim x (x ist eine Primzahl) sind e -definierbar durch $x = y^z$; (III) die Relation $\sim (x \text{ Pot } y)$ ist e -definierbar. Es ist nicht bekannt, ob es e -definierbare Relationen mit den Eigenschaften (a), (b) gibt, oder ob irgendeine der Relationen $x = y^z$, x Pot y , $y = x!$, $r = \binom{n}{k}$, Prim x e -definierbar ist. Es ist nicht einmal eine e -Definition der Potenzen von 2 bekannt. — Jede e -definierbare Relation ist durch einen Ausdruck der Form $\exists y_1 \dots \exists y_k (P = Q)$ definierbar (worin P und Q Polynome mit nicht-negativen Koeffizienten sind) und also rekursiv aufzählbar. Gäbe es eine nicht-rekursive, e -definierbare Menge, so wäre das (bisher ungelöste) 10. Hilbertsche Problem (zu entscheiden, ob eine vorgelegte Diophantische Gleichung eine ganzzahlige Lösung besitzt) im negativen Sinne erledigt. — Nach Davis [Referat in J. Symbolic Logic 15, 77—78 (1950)] ist jede rekursiv aufzählbare Relation in der Form $\exists x \forall y (y \leq x \rightarrow E)$ mit e -definierbarem E darstellbar. Daraus ergibt sich leicht, daß die Komplemente der e -definierbaren Relationen im allgemeinen nicht e -definierbar sind, denn sonst wären die Komplemente der rekursiv aufzählbaren Relationen stets rekursiv aufzählbar, was bekanntlich nicht gilt. Dagegen folgte aus der Annahme, die Komplemente der e -definierbaren primitiv-rekursiven Relationen seien e -definierbar, daß jede rekursiv aufzählbare Relation e -definierbar wäre. Hierzu beweist Verf. eine Verschärfung des Davis'schen Theorems: Jede rekursiv aufzählbare Relation ist in der Form $\exists x \forall y (y \leq x \rightarrow E')$ darstellbar, wo E' e -definierbar und primitiv-rekursiv gewählt werden kann. — Schließlich wird noch ein bisher unveröffentlichtes Theorem von Tarski mit kurz umrissenem Beweis aufgeführt: Ist $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und R die durch $\exists x (P(x) = 0)$ definierte $n + 1$ -stellige Relation (in diesem Zusammenhang sollen die Variablen für ganze Zahlen statt für natürliche Zahlen stehen), so ist auch die Relation $\sim R$ e -definierbar. Der Beweis benutzt die Tarskische Verallgemeinerung des Sturmschen Satzes (dies. Zbl. 35, 6). — Auf S. 445, Z. 3 v. u., sollte statt „ $\sim x$ Pow y “ die rechte Seite der Äquivalenz aus Formel 4.4 stehen. Formel 5.4 gilt nur, wenn u, v Variable für ganze Zahlen sind; die entsprechende Änderung liegt auf der Hand. W. Markwald.

Novikov, P. S.: Über die algorithmische Unentscheidbarkeit des Identitätsproblems. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 709—712 (1952) [Russisch].

The identity or word problem for a group given by a finite number of generators and defining relations is the problem of finding an algorithm for deciding when two arbitrarily given words (i. e. formal products of generators and their inverses) represent the same element of the group. Magnus [Uspechi mat. Nauk 8, 365 (1941)] has shown how to solve the word problem for a group with a single defining relation and Tartakovsky (this Zbl. 37, 11, 151; 34, 163; 35, 295; 47, 257) has given a method which applies to a wide class of groups. However the important question of whether or not it is always possible to construct such an algorithm has so far remained unanswered although Post (J. Symbolic Logic 12, 1—11 (1947)) has shown that the word problem for associative systems (semigroups without a cancellation law) is unsolvable (i. e. that there exists a particular associative system for which there is no algorithm for deciding whether two words represent the same element of the system), and Turing (this Zbl. 37, 301) has proved the same for semi-groups with cancellation. The author claims to have proved that the word problem for groups is unsolvable and this note contains a sketch of the proof. — The proof is based on Post's result [Bull. Amer. math. Soc. 50, 284—316 (1944)] that there exists an alphabet \mathcal{A} , a finite set of pairs of words (i. e. sequences of letters of this alphabet) (A_i, B_i) and a word A such that there is no algorithm for deciding whether an arbitrarily given word B is convertible into A by a succession of operations of the forms $A_i X \rightarrow X B_i$ or $X B_i \rightarrow A_i X$. He shows that the existence of such an undecidable Post system P implies the existence of a circular system \mathcal{C} which has an unsolvable identity problem. A circular system consists of a finite alphabet \mathcal{B} , which contains for each letter x a formal inverse x^{-1} , together with a finite set of

pairs of words (A_i, B_i) , amongst which must be included the pairs $(x x^{-1}, 1)$, $(x^{-1} x, 1)$, for all letters x in B . (Here „1“ denotes the null word containing no letters.) Two words are said to be equal with respect to \mathfrak{G} if one can be obtained from the other by a sequence of transformations of the type $aX \rightarrow Xa$ or $XA_i Y \rightarrow XB_i Y$ or $XB_i Y \rightarrow XA_i Y$ where a is any letter of \mathfrak{B} and X, Y are any words of \mathfrak{B} . (Note that with this definition of equality $A = B$ does not, of course, imply $XA = XB$.) — The author gives a construction for obtaining from any „Post system“ Ω a circular system \mathfrak{B} such that the words A and B are interconvertible with respect to Ω if and only if the words $p_1 A_1 p_2 A_2, p_1 B_1 p_2 B_2$ are equal with respect to \mathfrak{B} . Here A_1, B_1 are the same words as A and B except that a subscript 1 is added to each letter, and A_2, B_2 differ from A, B in having a subscript 2 added to each letter and in having the order of the letters reversed (so that, apart from the subscripts, A_2, B_2 are the reflexions of A_1, B_1 , in p_2). He then gives a construction for obtaining from any circular system \mathfrak{B} a group \mathfrak{A} such that the words A and B of the circular system are equal if and only if the words $A_0 p_1 A_1 p_2 A_2 p_3 A_3, B_0 p_1 B_1 p_2 B_2 p_3 B_3$ are equal in the group \mathfrak{A} . Here $A_0, A_2; B_0, B_2$ differ from A, B only in the addition of the subscripts 0, 2 to all the letters and A_1, A_3, B_1, B_3 differ also in having the order of the letters reversed. (The p_1, p_2, p_3 here are, of course, different letters from the p_1, p_2 previously mentioned.) It follows immediately from this that starting from a Post system with undecidable conversion problem we can construct a group with undecidable word problem. — The constructions are given in full in this note but no proofs are given of the equivalence theorems. In view of the importance of the result it is to be hoped that a full proof will eventually be published since the complexity of the constructions (the second of these requires the introduction of 28 different types of defining relations between generators with a subscript and up to four superscripts) and the presence of several misprints make it unprofitable to attempt to reconstruct the proof from the information given here.

J. C. Shepherson.

Kleene, S. C.: Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols. Mem. Amer. math. Soc. Nr. 10, 27—68 (1952).

Gegeben sei eine endliche Menge von Prädikatenymbolen P_1, \dots, P_s . Die Formeln, die sich aus diesen Symbolen mit Individuenvariablen und den logischen Zeichen des Prädikatenkalküls bilden lassen, mögen P -Formeln heißen. Eine Klasse C von P -Formeln gilt als „axiomatisierbar im Prädikatenkalkül“, wenn sich eine allgemein-rekursive Klasse von P -Formeln als Klasse sog. nicht-logischer Axiome so bestimmen läßt, daß C genau die Formeln enthält, die mittels der Axiome und Schlußregeln des Prädikatenkalküls und der nicht-logischen Axiome beweisbar sind. Notwendig und (nach Craig) auch hinreichend für die Axiomatisierbarkeit von C im Prädikatenkalkül sind die 2 Bedingungen: (1) C ist rekursiv aufzählbar (d. h. die Gödel-Nummern der Formeln aus C sind die Werte einer allgemein-rekursiven Funktion), (2) C ist deduktiv abgeschlossen im Prädikatenkalkül. — Dabei gilt es Fälle, in denen die geforderte Axiomatisierung nur mittels unendlich vieler P -Formeln möglich ist (wie zuerst Tarski gezeigt hat). Um unter den Bedingungen (1), (2) mit endlich vielen Axiomen auszukommen, hat man allgemeinere nicht-logische Axiome heranzuziehen. Eine Klasse C von P -Formeln gelte als „endlich axiomatisierbar im Prädikatenkalkül unter Benutzung zusätzlicher Prädikaten symbole“, wenn sich endlich viele nicht-logische Axiome, die außer P_1, \dots, P_s weitere Prädikaten symbole enthalten dürfen, so bestimmen lassen, daß die Klasse aller P -Formeln, die im Prädikatenkalkül mittels der nicht-logischen Axiome beweisbar sind, mit der Klasse C übereinstimmt. Verf. beweist, daß für diese endliche Axiomatisierbarkeit die Bedingungen (1), (2) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind. Er konstruiert bezüglich einer Klasse C mit den Bedingungen (1), (2) ein geeignetes Axiomensystem, in dem sich alle Formeln von C beweisen lassen. Nachweise dafür, daß in diesem System keine weiteren P -Formeln als die von C beweisbar sind, werden sowohl mit nicht-konstruktiven Methoden für den klassischen Kalkül als auch mit mathematischen Methoden (unter Benutzung des in der nachstehend besprochenen Arbeit bewiesenen Vertauschbarkeitssatzes) für den klassischen und den intuitionistischen Kalkül erbracht.

Kurt Schütte.

Kleene, S. C.: Permutability of inferences in Gentzen's calculi LK and LJ . Mem. Amer. math. Soc. Nr. 10, 1—26 (1952).

Anknüpfend an die Bemerkung von Gentzen, man könne in den Herleitungen seines Sequenzenkalküls die Schlußfiguren in weitem Maße übereinander hinweg verschieben, beweist Verf. einen allgemeinen Vertauschbarkeitssatz für Herleitungen, in denen das Schlußschema des „Schnittes“ nicht verwendet wird. Die in der Endsequenz auftretenden logischen Zeichen seien so in Klassen eingeteilt, daß ein Zeichen L_1 immer dann zur gleichen oder höheren Klasse wie ein Zeichen L_2 gehört, wenn einer der Fälle vorliegt: (a) L_1 steht in der Endsequenz im Wirkungsbereich von L_2 . (b) L_1 ist ein Allzeichen (bzw. Existenzzeichen), das in der Herleitung im Antezedens (bzw. Sukzedens) eingeführt wird; L_2 ist ein Allzeichen (bzw. Existenzzeichen), das in der Herleitung im Sukzedens (bzw. Antezedens) eingeführt wird und

in der Endsequenz nicht im Wirkungsbereich von L_1 steht. Zu diesen Bedingungen für den klassischen Kalkül kommen für den intuitionistischen Kalkül unter (b) noch acht weitere Fälle bezüglich der Einführungen von L_1, L_2 hinzu. Nach dem Vertauschbarkeitssatz läßt sich dann die Herleitung unter Erhaltung ihrer Endsequenz so umformen, daß jede Schlußfigur, die ein logisches Zeichen höherer Klasse einführt, oberhalb jeder Schlußfigur steht, durch die ein logisches Zeichen niedriger Klasse eingeführt wird. Hieraus folgt unmittelbar der verschärfte Hauptsatz von Gentzen. Verf. zeigt ferner, daß die Vertauschbarkeit nicht allgemein gilt, wenn die Bedingung (a) oder irgendein Fall von (b) fortgelassen wird. *Kurt Schütte.*

Curry, Haskell B.: On the definition of negation by a fixed proposition in inferential calculus. *J. symbolic Logic* 17, 98—104 (1952).

In *TFD* (A theory of formal deducibility, Notre Dame 1950, this Zbl. 41, 348) the author used the definition of negation, (1). $\neg A \equiv A \supset F$, where F is a fixed proposition, in connection with the T -systems, but it was not used for the L -systems because of certain difficulties which the author was not able to overcome at that time. This paper contains proofs of the necessary theorems. (These have been announced in the Proceedings of the Internat. Congress of Math., Cambridge, Mass., U. S. A., August 30th — September 6th, 1950.) — Denoting by LX one of the L -systems defined in *TFD* (here X stands for one of M, J, D, K etc.) the author denotes by LXF the system obtained by dropping negation as a primitive concept, adjoining F , and defining negation in terms of F by (1). That is to say the rules Nl :

$$\frac{\mathfrak{X} \mid \neg A, 3}{\mathfrak{X}, \neg A \mid 3}, \quad Nr: \frac{\mathfrak{X}, A \mid 3}{\mathfrak{X} \mid \neg A, 3}$$

are dropped and the rules K_j :

$$\frac{\mathfrak{X} \mid}{\mathfrak{X} \mid \neg A}, \quad Nx: \frac{\mathfrak{X}, \neg A \mid A}{\mathfrak{X} \mid \neg A}, \quad Fr: \frac{\mathfrak{X} \mid F, 3}{\mathfrak{X} \mid 3}$$

are respectively replaced by F_j :

$$\frac{\mathfrak{X} \mid F, 3}{\mathfrak{X} \mid \neg A, 3}, \quad Fx: \frac{\mathfrak{X}, A \supset F \mid A}{\mathfrak{X} \mid \neg A}, \quad F'r: \frac{\mathfrak{X} \mid F, 3}{\mathfrak{X} \mid \neg F, 3}.$$

The analogue, Γ_F in LXF of an elementary statement Γ of LX is defined to be the statement obtained from Γ by replacing formulae of the form $\neg A$ by $A \supset F$ and replacing statements of the form $\mathfrak{X} \mid$ by $\mathfrak{X} \mid F$. (This last change is called for since there are no void prosecutions on the right in LXF .) The theorems proved are that $\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y}$ is valid in LX if and only if $\mathfrak{X}_F \mid \mathfrak{Y}_F$ is valid in LXF , and that the elimination theorem holds for LXF if it holds for LX . *J. C. Shepherdson.*

Vorobjev, N. N.: Der konstruktive Aussagenkalkül mit starker Negation. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 85, 465—468 (1952) [Russisch].

In 1950 Markov (*Uspechi Mat. Nauk.* 5, Nr. 3, 187 (1950)) constructed a logico-arithmetical calculus containing an operation —, „strong“ („constructive“) negation in addition to the usual negation, \neg , and the other operations $\supset, \&, \vee, \mathfrak{I}, \mathfrak{V}$. The author calls the propositional calculus Π^+ of these connectives the constructive propositional calculus with strong negation. Its rule of inference is modus ponens and its axioms consist of the usual ten axiom schemes for Π , the constructive (intuitionist) propositional calculus, plus the following axiom schemes: $(\sim P \supset (P \supset Q)), (\sim (P \supset Q) \equiv (P \& \sim Q)), (\sim (P \& Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)), (\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P \& \sim Q)), (\sim \neg P \equiv P) (\sim \sim P \equiv P)$. [Here $(P \equiv Q)$ stands for $((P \supset Q) \& (Q \supset P))$.]

This paper contains statements (no proofs are given) of various theorems concerning this system. Theorem 1 states: If P does not contain \sim then P is derivable in Π^+ if and only if it is derivable in Π . Let $(P \equiv Q)$ stand for $((P \equiv Q) \& (\sim P \equiv \sim Q))$; then we have theorem 2: If S is the result of substituting Q for an occurrence of P in R then $((P \equiv Q) \supset (R \equiv S))$ is derivable in Π^+ . Theorem 3 states that the same is true with „ \supset “ replaced by „ \equiv “ provided that the occurrence of P in R for which Q is substituted is not a proper occurrence of P in a subformula of R of the form $\sim T$. Theorems 2, 3 are essentially due to Markov. A formula is called quasi-reduced if all occurrences of \sim in it occur immediately in front of propositional variables; a quasi-reduced formula is said to be reduced if it does not contain \neg ; it is said to be fully reduced if it is reduced and contains no occurrences of „ $\&$ “ and no sub-formulae of the form $((P \vee Q) \supset R)$. Theorem 4 states that for each formula P of Π^+ it is possible to construct a reduced formula Q of Π^+ such that $(P \equiv Q)$ is derivable in Π^+ . Theorem 5 says that Q can be taken to be a conjunction of fully reduced formulae. The author proceeds to show that Π^+ is equivalent to a calculus C of inferential rules of the type introduced by Gentzen (this Zbl. 10, 145, 146). The basic formulae of C are of the form $P_1, P_2, \dots, P_k \vdash Q$ (P_1, \dots, P_k entail Q) where P_1, P_2, \dots, P_k ($k \geq 0$) are distinct quasi-reduced formulae of Π^+ , and Q is either the null formula or a quasi-reduced formula of Π^+ . Apart from the rule dealing with \sim the rules of C are very similar to those given by Gentzen and Curry (Curry, A theory of formal deducibility, Notre Dame mathematical lectures No. 6, Indiana 1950, this Zbl. 41, 348)

for the intuitionist propositional calculus. The only significant difference is that the author definitely regards a prosequence P_1, P_2, \dots, P_k as a class and does not allow repeated constituents. His method of stating Gentzen's rules so as to avoid the need for introducing repeated constituents is rather simpler than the corresponding device used by Curry (op. cit. pp. 36—38, particularly Remark 6, p. 38). The author simply takes the contraction of the conclusion as part of the rule, e. g. $[\pi_1, R_1 \vdash S]/[(R_1 \& R_2), \pi_1^* \vdash S]$, where π_1 stands for an arbitrary (possibly null) prosequence and π_2, π_1^* stands for a prosequence which is the set-theoretical sum of π_1 and π_2 . The calculus C differs from Curry's $LJ(\mathfrak{S})$ essentially in only two points; firstly the propositions of C (the formulae P_1, \dots, P_k, Q &) are quasi-reduced formulae of Π^+ , i. e. they may contain the sign \sim (in addition to $\supset, \&, \vee, \perp$), provided it occurs immediately in front of a propositional variable; secondly there is a rule for \sim viz. $[\pi_1 \vdash A]/[\sim A, \pi_1^* \vdash S]$; here S must be non-null and A must be a propositional variable. The equivalence between C and Π^+ is given by theorem 7 which says that a formula P is derivable in Π^+ if and only if its union is derivable in C . Here the union of a formula P of the form $(P_1 \supset (P_2 \supset \dots (P_p \supset S) \dots))$, where S is not of the form $(Q \supset R)$, is defined to be $P_1, P_2^*, \dots, P_p^* \vdash S$. The author does not state precisely for what class of formulae P theorem 7 is valid; in view of the fact that CO permits the introduction of \sim only immediately in front of a propositional variable it is clear that theorem 7 can be true at most for quasi-reduced formulae P . However, it is easily seen that the quasi-reduced formula $(\sim A \supset \supset A)$ is derivable in Π^+ , whereas its union, $\sim A \vdash \supset A$ is not derivable in C . Presumably, then, the P of theorem 7 is supposed to be a reduced formula. It seems to the rev. that the system could be simplified by allowing the S in CO to be null, in fact by writing the rule in the form $[\pi, \vdash A]/[\sim A, \pi_1^* \vdash \cdot]$. This would make theorem 7 true for all quasi-reduced P and would have the additional advantage that the elimination theorem „If $\pi, B \vdash C$ and $\pi \vdash B$ then $\pi \vdash C$ (with C possibly null)“ would be provable by the same argument as that used by Curry for LJ (op. cit. p. 96). This form of the elimination theorem does not hold for the author's system since if A is a propositional variable $A, \sim A, \supset A \vdash$, and $A, \sim A \vdash \supset A$ are derivable in C yet $A, \sim A \vdash$ is not. The proposed variant of C is easily seen to be equivalent to Curry's $LJ(\mathfrak{S})$ if \mathfrak{S} is taken to be the formal system whose „propositions“ consist of propositional variables A_1, A_2, \dots and their strong negations $\sim A_1, \sim A_2, \dots$ together with a directly refutable proposition F and with the sole rule of inference $A_i, \sim A_i \vdash F$.

J. C. Shepherdson.

Vorobjev, N. N.: Das Problem der Ableitbarkeit im konstruktiven Aussagenkalkül mit starker Negation. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 689—692 (1952) [Russisch].

This paper gives a solution of the decision problem for the calculus Π^+ previously discussed by the author (preced. review). He relies on theorem 5 of the preceding paper to reduce the problem to that of deciding when a formula $P_1, P_2, \dots, P_k \vdash Q$ (where P_1, \dots, P_k, Q are either null or are fully reduced formulae of Π^+) is derivable in the calculus C . (See loc. cit.). The rev. observes that the existence of a decision algorithm for C (for general, not necessarily fully reduced, P_1, \dots, P_k, Q) follows easily by the argument of Curry (A theory of formal decidability, Notre Dame mathematical lectures No. 6, pp. 43, 44; this Zbl. 41, 348). However the decision method of the author is one which is presumably simpler to apply in practice. — The author notes that his decision procedure can also be used for the intuitionist propositional calculus Π , since a formula of Π is provable in Π if and only if it is provable in Π^+ . Decision procedures for Π have been given by Gentzen (this Zbl. 10, 145 u. 146), Piłcák (this Zbl. 39, 7) and Curry (op. cit. pp. 43, 44, 98).

J. C. Shepherdson.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome:

● Faddeev, D. K. und I. S. Sominskij: Aufgabensammlung zur höheren Algebra. 3. Aufl. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 308 S. R. 7,20 [Russisch].

This is a typical work book for students of universities and teachers' training colleges who just begin their studies of (classical) higher algebra, presumably after a year's course in calculus and analytic geometry. A novelty in the book is its division in three main parts: A. Problems, B. Hints for the solution of some of the questions (by no means always the most difficult ones) C. Answers and solutions. — Content: Seven chapters: I. Complex numbers with the usual

applications to the elements of algebraic equations, roots of unity etc. — II. Computation of determinants, a great number of good numerical and other examples not all of which will be easily found elsewhere. — III. Systems of linear equations, rank of matrices. — IV. Matrices, mainly multiplication, solving of simple algebraic matrix equations, transposition, inequalities (Schwarz, Hadamard), Kronecker product. — V. Polynomials and rational functions including a somewhat scanty preparation of the fundamental theorem of algebra (§ 2), some work on division, Euclid's algorithm, irreducibility, position of roots in the plane, Sturm's theorem, and (very little) on approximative solution without stating preference to any special method. — VI. Symmetric functions (valuable preparation for a later study of Galois theory). — VII. Linear Algebra. Vector spaces, n -dimensional geometry; characteristic roots and eigen vectors of matrices, but no practical methods; quadratic forms; linear transformations up to Jordan's canonical form. — There are 980 questions, none of which touches modern or abstract algebra, mostly well arranged: Series of problems can be observed within a section which systematically lead from simple cases to general statements which should be of intrinsic interest for the gifted student. Due stress is given to numerical work and algebraic technique, in this way giving a good preparation to students who will do work in practical mathematics. The main definitions and theorems which are used in the book, are clearly stated so that no special reference text-book is required. A curious exception to this rule will be found in ex. 577. — It may be mentioned that a very modest vocabulary should be sufficient for a successful use of the book; it can therefore be recommended to the western student of mathematics without elaborate knowledge of the Russian language.

H. Schwerdtfeger.

Brauer, Alfred: Matrices with all their characteristic roots in the interior of the unit circle. *J. Elisha Mitchell sci. Soc.* 68, 180—183 (1952).

$(a_{\kappa\lambda})$ sei eine $n \times n$ -Matrix mit reellen Elementen, $R_\lambda = \sum_{\kappa} |a_{\kappa\lambda}|$, $Q_\lambda =$

$R_\lambda - |a_{\lambda\lambda}|$. Ist dann $|a_{11}| < 1$ und gilt für $\lambda = 2, \dots, n$ sowohl $R_\lambda < 1$ wie $Q_1 Q_\lambda < 1 - |a_{11} + a_{\lambda\lambda}| + a_{11} a_{\lambda\lambda}$, so ist $|\alpha| < 1$ für jede charakteristische Wurzel α von $(a_{\kappa\lambda})$. Haben die $a_{\kappa\lambda}$ nicht alle dasselbe Vorzeichen, so lassen sich die Voraussetzungen noch abschwächen.

H. Wielandt.

Parker, W. V. and B. E. Mitchell: Elementary divisors of certain matrices. *Duke math. J.* 19, 483—485 (1952).

For given polynomials f, g let P, Q be matrices such that $(P - Q)f(P) = (P - Q)g(Q) = 0$. Then P, Q have the same elementary divisors, except possibly those corresponding to characteristic roots which are zeros of fg . If N is nilpotent, $NQ = 0$, then $Q, Q + N$ have the same elementary divisors except for those corresponding to characteristic root 0. The proof is based on dimensions of the classical invariant subspaces, and thus assumes that the field is \mathbb{C} , or at least that the minimal polynomial factors completely. See Flanders, Harley (this *Zbl.* 44, 6).

J. L. Brenner.

Duparc, H. J. A.: On canonical forms. *Indagationes math.* 14, 474—482 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A* 55, 474—482 (1952).

Als Anwendung des Theorems von Lasker-Wakeford werden bei m -ären Formen n -ten Grades $f = (a' x)^n$ für kleinere Werte von m und n bekannte kanonische Formen abgeleitet. So z. B. daß jede quaternäre kubische Form sich als Summe von höchstens fünf Kuben von Linearformen schreiben läßt. — Das Theorem von Lasker-Wakeford wird dann verallgemeinert auf Systeme von gleichartigen Formen f . So wird z. B. gezeigt, daß zwei m -äre Formen n -ten Grades f und g simultan auf die Formen $F = \sum_{i=1}^D X_i^n$; $G = \sum_{i=1}^D c_i X_i^n$ transformierbar sind, wo D eine von m und n abhängige Anzahl bedeutet.

R. W. Weitzenböck.

Talbot, A.: The roots of certain determinantal equations. *Math. Gaz.* 36, 270—272 (1952).

I. If a rational function of x has poles and zeros (including a possible pole or zero at infinity) which are all real, simple and strictly alternate (cf. Moore, this *Zbl.* 38, 155), then its partial fraction expansion $k_\infty x + c + \sum_{r=1}^{\mu} k_r/(v_r - x)$ has coefficients k_r (including k_∞ if non-zero) all of one sign, while its reciprocal has

expansion coefficients all of the opposite sign. Conversely, any such sum having coefficients all of the same sign is equal to a rational function of the above kind. — II. If an odd rational function $f(\lambda)$ of a complex variable $\lambda = \sigma + i\omega$ has poles and zeros which are simple and strictly alternate on the imaginary axis, then the partial-fraction expansions of the form $c\lambda + \sum_{r=1}^{\mu} k_r \lambda / (\omega_r^2 + \lambda^2)$ with $0 \leq \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots < \omega_{\mu}^2$ for the function and its reciprocal, have coefficients k_r , and c if non-zero, all of the same sign. Conversely, any such expansion represents an odd rational function of the above kind. E. Frank.

Carlitz, L.: Note on irreducibility of the Bernoulli and Euler polynomials. Duke math. J. **19**, 475—481 (1952).

Die Polynome $B_m(x)$ von Bernoulli und $E_m(x)$ von Euler werden von den Brüchen

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_m(x), \quad \frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} E_m(x)$$

erzeugt. In bezug auf ihre Zerlegbarkeit beweist Verf. über das Bekannte hinaus folgende Sätze. Es sei p prim ≥ 3 . Dann ist 1. $B_{m(p-1)}(x)$ unzerlegbar für $1 \leq m \leq p-2$. 3. $B_m(x)$ unzerlegbar, wenn 2. $m = 2^r$, $r \geq 1$; 3. $m = k(p-1)p^r$, $r \geq 0$, $1 \leq k < p$. — Eine Aussage bei ungeradem Index: 4. Ist $2m+1 = k(p-1) + 1$, $1 \leq k < p$, so hat $B_{2m+1}(x)/[(x - \frac{1}{2})(x-1)]$ einen unzerlegbaren Faktor von mindestens $(2m+1-p)$ -tem Grade. — Zwei Sätze über $E_m(x)$: 5. Ist $p \equiv 3 \pmod{4}$, $r \geq 1$, so ist $E_{p^r}(x)/(x - \frac{1}{2})$ das Produkt von höchstens r unzerlegbaren Faktoren. — 6. Ist $p > 3$, so hat $E_{2p}(x)/[(x-1)]$ einen unzerlegbaren Faktor von mindestens $(p-1)$ -tem Grade. — Wenn die Bernoullischen Zahlen (B. Z.) k -ter Ordnung durch den Ansatz

$$\left[\frac{t}{(e^t - 1)} \right]^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m^{(k)} t^m}{m!} \quad (B_m^{(1)} = B_m \text{ die gewöhnlichen B. Z.})$$

expliziert werden, $B_m^{(x)}$ also ein Polynom m -ten Grades in x ist, so gilt 7.: $B_p^{(x)}/x$ ist unzerlegbar. — Mittel zum Beweise vorstehender Sätze: v. Staudt-Clausenscher Satz, Unzerlegbarkeit Eisensteinscher Polynome, Darstellung der $B_m(x)$, $E_m(x)$ als Polynome von $x - \frac{1}{2}$, Kummer's Kongruenz $2^{p+1}(1 - 2^{p+1}) B_{p+1}/(p+1) \equiv -1 \pmod{p}$. L. Koschmieder.

Bucierius, H.: Zur Theorie der linearen Gleichungen. Arch. der Math. **3**, 103—107 (1952).

Es wird vorgeführt, wie sich Begriffe und Methoden aus der Theorie der Randwertprobleme und Integralgleichungen auf lineare Gleichungssysteme übertragen lassen. J. Weissinger.

Skolem, Th.: On a certain connection between the discriminant of a polynomial and the number of its irreducible factors mod p . Norske mat. Tidsskr. **34**, 81—85 (1952).

Verf. beweist die folgenden Sätze: 1. $f(x)$ sei ein Polynom n -ten Grades mit ganzen rationalen Koeffizienten, D seine Diskriminante, p Primzahl, $p > n$, $p \nmid D$. Wenn $f(x)$ irreduzibel mod p , gilt $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-1}$. 2. n_f sei die Anzahl der mod p irreduziblen Faktoren von $f(x)$. Dann ist $n_f \equiv n - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{D}{p}\right)\right) \pmod{2}$. H.-J. Kanold.

Gruppentheorie:

Laman, G.: Distance geometry and Boolean algebras. Simon Stevin **29**, 83—91 (1952).

Zur Vorbereitung auf die im Folgenden referierte Arbeit von D. Ellis werden die Begriffe Quasigruppe, Loop, Boolesche Algebra, Boolescher Ring erörtert und Ergebnisse von D. Ellis (dies. Zbl. **42**, 27; **43**, 34) über die Bewegungen einer Booleschen Algebra, d. s. die Abbildungen f der Booleschen Algebra mit $x + y = f(x) + f(y)$ [wobei $x + y = (x \cap y') \cup (x' \cap y)$ ist], dargestellt. G. Pickert.

Ellis, David: Notes on abstract distance geometry. III. On self-congruences of metroids. *Simon Stevin* 29, 92—95 (1952).

Teil I und II siehe dies. Zbl. 42, 27; 43, 34. Ein Metroid ist eine algebraische Struktur mit einer überall definierten Verknüpfung $+$. Eine umkehrbare Abbildung f des Metroids auf sich heißt Bewegung, wenn $x + y = f(x) + f(y)$ für alle x, y gilt. Ist das Metroid eine Halbgruppe (d. h. $+$ assoziativ) mit neutralem Element 0 (d. h. $x + 0 = x = 0 + x$), so sind folgende Aussagen gleichbedeutend: 1. Zu jedem x gibt es eine Bewegung f mit $f(0) = x$; 2. zu jedem Paar x, y gibt es eine Bewegung f mit $f(x) = y$; 3. jede Abbildung f einer Teilmenge, welche die Eigenschaft $x + y = f(x) + f(y)$ für alle x, y der Teilmenge besitzt, läßt sich zu einer Bewegung fortsetzen; 4. $x + x = 0$ für alle x ; 5. die Halbgruppe ist Untergruppe der additiven Gruppe eines Booleschen Ringes. *G. Pickert.*

Numakura, Katsumi: On bicomact semigroups. *Math. J. Okayama Univ.* 1, 99—108 (1952).

In this note the author intended to extend the theory of A. Sushkewitsch [Math. Ann. 99, 30—50 (1928)] to bicomact semigroups. — Throughout this paper S means a bicomact Hausdorff semigroup. If in S the relation $ax = ay$ or $xa = ya$ implies $x = y$, then S is proved to be a group. Under a simple semigroup we understand a semigroup which has no proper ideal. If moreover every idempotent element of K is primitive, we call K to be completely simple. Then we can prove that S has the uniquely determined minimal twosided ideal K (Kernel of S) which is completely simple and bicomact and K is the set-theoretical sum of groups, which are isomorphic one another. *T. Tannaka.*

Popova, Hélène: Sur les quasi-groupes dont les logarithmétiques sont groupes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 2582—2583 (1952).

La logarithmétique L_Q d'un quasi-groupe fini Q a été définie dans une note précédente (voir ce Zbl. 47, 21). Ici, l'A. démontre le résultat suivant, qui est à peu près trivial: Pour que L_Q soit un groupe multiplicatif, il faut et il suffit que, pour toute puissance a non associative, l'application $x \rightarrow x^a$ soit biunivoque. — Elle en donne cinq corollaires relatifs à des quasi-groupes ayant un seul générateur ou à des quasi-groupes pleins. *L. Lesieur.*

Vagner, V. V.: Verallgemeinerte Gruppen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 84, 1119—1122 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet Halbgruppen, bei denen die idempotenten Elemente kommutativ sind, und zeigt, daß es zu einem gegebenen Element s höchstens ein Element s (das zu s verallgemeinert umgekehrte Element) geben kann, welches den Bedingungen $sss = s$ und $sss = s$ genügt. Die Elemente s , für die s existiert, bilden eine Unterhalbgruppe. Fällt diese mit der ganzen gegebenen Halbgruppe zusammen, so liegt eine verallgemeinerte Gruppe vor, zu denen unter anderem die von ihm sogenannten symmetrischen Halbgruppen gehören. — Die verallgemeinerten Gruppen gestatten auch für gewisse Elemente die Einführung einer Ordnungsbeziehung, welche mit der Multiplikation verträglich ist. Verf. versucht, die vom Ref. eingeführten Gruppoide, welche für die Funktionentheorie bei mehreren Veränderlichen, für die Topologie und die hyperkomplexe Zahlentheorie bedeutsam sind, durch Einführung eines Nullelementes an die verallgemeinerten Gruppen anzuschließen. Dieser Gedanke kann jedoch vom Standpunkt der Gruppoide nicht als glücklich bezeichnet werden, weil dadurch ihre wertvollsten Eigenschaften verloren gehen. *H. Brandt.*

Szele, T.: On groups with atomic layers. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 3, 127—129 und russische Zusammenfassg. 129 (1952).

Let G be a group. The set $L(m)$ of all elements in G of order m is called a layer. $L(m)$ is called atomic if $L(m)$ has no proper subset which is a layer of some subgroup of G . $L(\infty)$ is atomic if and only if it is empty. $L(m)$ ($m \neq \infty$) is atomic if and only if $L(m)$ is either empty or a set of $\varphi(m)$ elements. In this paper the following theorem is proved: For an arbitrary group G the following statements are equivalent: (a) G contains no pair of distinct isomorphic subgroups, (b) every layer of G is atomic, (c) G is isomorphic to some subgroup of the additive group of rational numbers mod 1. *Y. Kawada.*

Vorob'ev, N. N.: Über die Ideale assoziativer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 641—644 (1952) [Russisch].

Es sei \mathcal{G} ein System, in dem eine stets ausführbare assoziative eindeutige Multiplikation definiert ist. Eine Teilmenge \mathfrak{L} von \mathcal{G} heißt Linksideal, wenn $\mathcal{G} \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$. Entsprechend sind Rechtsideale und zweiseitige Ideale definiert. Unter dem durch das Element X erzeugten Links-Hauptideal versteht man die Menge $\mathcal{G}X \cup X$, entsprechend heißt $X \mathcal{G} \cup X$ das durch X erzeugte Rechts-Hauptideal. Und $\mathcal{G}X \mathcal{G} \cup \mathcal{G}X \cup X \mathcal{G} \cup X$ wird das durch X erzeugte zweiseitige Hauptideal genannt. Systeme mit Minimalbedingung für Links-, Rechts- bzw. zweiseitige Hauptideale heißen L -, P - bzw. D -Systeme. Über derartige Systeme wird eine Anzahl von Struktursätzen (ohne Beweise) angegeben. Unter einem S -System (Suškevič-System) versteht Verf. ein solches, welches kein echtes Linksideal enthält. Besitzt das L -System \mathcal{G} ein einziges maximales Linksideal \mathfrak{L} , dann besteht $\mathcal{G} \setminus \mathfrak{L}$ entweder aus einem Element oder ist ein S -System. Besitzt das L -System \mathcal{G} eine Rechtseinheit, dann gibt es in \mathcal{G} ein einziges maximales Linksideal \mathfrak{L} und $\mathcal{G} \setminus \mathfrak{L}$ ist eine Linksgruppe (im Sinne von Suškevič). Besitzt \mathcal{G} eine Linkseinheit, dann gibt es in \mathcal{G} ein einziges maximales Rechtsideal \mathfrak{R} und $\mathcal{G} \setminus \mathfrak{R}$ ist eine Rechtsgruppe. Die Untersuchungen des Verf. berühren sich mit denen von Ljapin (dies. Zbl. 38, 157). Z. B. gilt folgender Satz: Ist \mathcal{G} ein L -System und \mathfrak{N} ein normales Teilsystem, dann zerfällt \mathcal{G} entweder in die mengentheoretische Summe von \mathfrak{N} und einem zweiseitigen Ideal oder \mathcal{G}/\mathfrak{N} ist eine Gruppe. R. Kochendörffer.

Lyndon, R. C.: Two notes on nilpotent groups. Proc. Amer. math. Soc. 3, 579—583 (1952).

Verf. verallgemeinert zuerst ein Resultat von L. Rédei und von Ref. (dies. Zbl. 39, 255). Bezeichne (G_n, G) die n -te Gruppe der unteren Zentralreihe von G . Bezeichne $A \vee B$ die von den Untergruppen A, B erzeugte Untergruppe von G ($A, B \subset G$), A^m die von den m -ten Potenzen der Elemente von A erzeugte Untergruppe. Dann gilt der folgende Satz: Sind A, K Untergruppen einer nilpotenten Gruppe G mit $A^{m^e} = 1$, so ist $(A \vee K)_n = K_n$, wenn $(A \vee K)_n = (A^m \vee K)_n$, $n \geq 1$, gilt. Mit ähnlichem Verfahren wie bei vorigem Satz werden die folgenden Sätze bewiesen: 1. Jede endlich erzeugte nilpotente Gruppe läßt sich mit einer endlichen Menge von Relationen definieren. 2. In einer endlich erzeugten nilpotenten Gruppe ist das Wortproblem entscheidbar. 3. (Ein Problem von B. H. Neumann.) Eine nilpotente Gruppe hat eine endliche Basis von identischen Relationen.

J. Szép.

Fuchs, L.: The Zappa extension of partially ordered groups. Indagationes math. 14, 363—368 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 363—368 (1952).

Verf. hat früher die Schreiersche Erweiterungstheorie für halbgeordnete („partially ordered“) Gruppen aufgestellt (dies. Zbl. 39, 251), hier löst er das analoge Problem in der Theorie von Zappa-Szép. [Für die Terminologie vgl. Rédei (dies. Zbl. 40, 299).] Gruppen werden stets additiv geschrieben. Zunächst werde vorausgesetzt, daß G eine halbgeordnete Gruppe mit den Untergruppen I, C ist, so daß die $\alpha + a$ ($\alpha \in I, a \in C$) die sämtlichen verschiedenen Elemente von G sind. Dann lassen sich vor allem zwei eindeutig bestimmte Vertauschungsfunktionen („permutability functions“) $f(a, \alpha)$ ($\in C$), $\varphi(a, \alpha)$ ($\in I$) durch $\alpha + a = \varphi(a, \alpha) + f(a, \alpha)$ definieren. Diese genügen wegen $I + C = C + I$ gewissen bekannten Bedingungen (s. z. B. die zitierte Arbeit des Ref.), die mit (1)—(6) numeriert werden. Verf. definiert die Ordnungsmengen („ordered-sets“) $P_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in I$) als Teilmengen von C , so daß $a - b \in P_{\alpha\beta}$ gleichbedeutend mit $\alpha + a \geq \beta + b$ ist, und leitet hieraus leicht die folgenden Eigenschaften ab: (7) $P_{\alpha\alpha}$ hängt nicht von α ab, (8) $0 \in P_{\alpha\beta}$ dann und nur dann, wenn $\alpha \geq \beta$, (9) $P_{\alpha\beta}, -P_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) haben kein gemeinsames Element, (10) $P_{\alpha\beta} + P_{\alpha\gamma} \subset P_{\alpha\gamma}$, (11) $P_{\alpha+\gamma, \beta+\gamma} = P_{\alpha\beta}$, (12) $f(c, \alpha) + P_{\alpha\beta} - f(c, \beta) = P_{\varphi(c, \alpha)\varphi(c, \beta)}$, (13) $f(a, \gamma) \in P_{\alpha+\varphi(a, \gamma), \beta+\gamma}$ dann und nur dann, wenn $a \in P_{\alpha\beta}$. Als Lösung des gemeinten Erweiterungsproblems wird bewiesen: Sind I, C zwei beliebige halbgeordnete Gruppen ohne gemeinsames Element, sind ferner Vertauschungsfunktionen $f(a, \alpha)$, $\varphi(a, \alpha)$ und Ordnungsmengen $P_{\alpha\beta}$ mit den Eigenschaften (1)—(13) beliebig vorgegeben, so wird durch $(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \varphi(a, \beta), f(a, \beta) + b)$ und „dann und nur dann

$(\alpha, a) \geq (\beta, b)$, wenn $a - b \in P_{\alpha\beta}$ “ eine halbgeordnete Gruppe G mit den Elementen (α, a) ($\alpha \in I, a \in C$) definiert, wofür $G = I^* + C^*$ gilt, so daß I^* mit I und C^* mit C ordnungs-isomorph ist. Es werden noch die Spezialfälle $G = I + C$ näher untersucht, wo I und C kon-vexe Untergruppen von G oder direkte Summanden von G sind oder beides gilt. *L. Rédei.*

Berlinkov, M. L.: Gruppen mit kompaktem Untergruppenverband. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 505—508 (1952) [Russisch].

Définition. Un groupe „structurellement compact“ est un groupe tel que de toute famille infinie de sous-groupes on puisse extraire une suite A_n telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n, \text{ où } D_n \text{ est l'intersection des } A_m \text{ (} m \geq n \text{) et } S_n \text{ le sous-groupe}$$

engendré par les A_m ($m \geq n$). — Un tel groupe est nécessairement périodique. L'A. indique le critère suivant: Un groupe périodique G est structurellement compact si, pour chaque nombre premier p , il contient un sous-groupe invariant H_p vérifiant: a) G/H_p est structurellement compact; b) H_p est contenu dans le centralisateur de l'ensemble de tous les éléments de G dont l'ordre est une puissance de p ; c) H_p ne contient pas d'élément d'ordre p . Divers théorèmes relient les propriétés des groupes structurellement compacts à celles des groupes localement normaux. La question de savoir si un groupe structurellement compact peut ne pas être localement normal est laissée ouverte.

M. Lazard.

Tartakovskij, V. A.: Über die primitive Komposition. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 39—52 (1952) [Russisch].

Einige der früheren Resultate des Verf. über das Identitätsproblem (dies. Zbl. 34, 15) werden verschärft. Es handelt sich kurz gesagt um folgendes: In der Theorie der Zerschneidung und Komposition der Wörter wird ein gewisser Primitivitätsbegriff eingeführt. Es zeigt sich, daß man sich im wesentlichen auf die in diesem Sinne primitiven Fälle beschränken kann, wodurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt wird. Wegen der vielen eigens für dieses Problem neu eingeführten Begriffe muß für eine genauere Formulierung der Ergebnisse auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

R. Kochendörffer.

Miller, Clair: The second homology group of a group; relations among commutators. Proc. Amer. math. Soc. 3, 588—595 (1952).

Es sei G eine Gruppe, J der Ring der ganzen rationalen Zahlen. Verf. beweist einen Isomorphismus für die von S. Eilenberg und S. MacLane [Ann. of Math., II. Ser. 46, 480—509 (1945)] eingeführte 2-Homologiegruppe $H_2(G, J)$, der gestattet, diese als Maß für die Abweichung der Kommutatorrelationen in G von den universellen Kommutatorrelationen (Elemente $(*)$ gleich 1) aufzufassen. — Dazu wird die von den Paaren $\langle x, y \rangle$, $x, y \in G$, erzeugte freie Gruppe $\langle G, G \rangle$ betrachtet. Die Abbildungen $\langle x, y \rangle \rightarrow [x, y] = yx y^{-1} x^{-1}$ induzieren einen Homomorphismus von $\langle G, G \rangle$ auf die Kommutatorgruppe $[G, G]$ von G . Sein Kern sei $Z(G)$. $B(G)$ sei der von den Elementen

$$(*) \quad \left\{ \begin{aligned} &\langle x, x \rangle, \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle, \langle x y, z \rangle \langle x, z \rangle^{-1} \langle x y x^{-1}, x z x^{-1} \rangle^{-1}, \\ &\langle x y x^{-1}, x z x^{-1} \rangle \langle y, z \rangle^{-1} \langle x, [y, z] \rangle^{-1} \end{aligned} \right.$$

erzeugte Normalteiler von $\langle G, G \rangle$. Offenbar ist $B(G) \subseteq Z(G)$. Es wird gezeigt $H(G) = Z(G)/B(G) \cong R \cap [F, F]/[F, R]$, F freie Gruppe, $F/R \cong G$. Nach einem Satz von H. Hopf (dies. Zbl. 27, 95) folgt hieraus $H(G) \cong H_2(G, J)$. — Ist $G = A$ abelsch, so erhält man aus $(*)$ $H(A) \cong A \otimes A/D$, dabei bezeichnet \otimes das Tensorprodukt und D die von den Diagonalelementen $a \otimes a$, $a \in A$, erzeugte Untergruppe.

W. Gaschütz.

Itô, Noboru: On a theorem of L. Rédei and J. Szép concerning p -groups. Acta Sci. math. 14, 186—187 (1952).

Bezeichne G eine endliche p -Gruppe, F die Frattinische Untergruppe, $D(G)$ die Kommutatorgruppe, H eine Untergruppe, A ein Element von G , ferner $(G:H)$ den Index von H in G . Satz: Gilt $D(H) \subseteq D(G)$, so gilt $D(FH) \subseteq D(G)$. Dies ist die

Verallgemeinerung eines Satzes von Ref. und Szép (dies. Zbl. 43, 259) und wird sehr elegant bewiesen. Es werden noch einfache Beispiele von Verf. und auch von M. Nagata angegeben, wo $(\{H, A\} : \{H, A^p\}) < (\{H, A^p\} : \{H, A^{p^2}\})$ und ähnliches mit $D\{\}$ statt $\{\}$ gilt, wodurch zwei in der zitierten Arbeit ausgesprochene Vermutungen widerlegt werden.

L. Rédei.

Kemchadze, Š. S.: Zur Bestimmung der regulären p -Gruppen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 193—196 (1952) [Russisch].

Es sei G eine p -Gruppe endlicher Ordnung. Mit $K(a, b)$ werde die Kommutatorgruppe der von den Elementen a und b erzeugten Untergruppe von G bezeichnet. Nach P. Hall (dies. Zbl. 7, 291) heißt G regulär, wenn für jede natürliche Zahl α und je zwei Elemente a, b stets

$$(ab)^{p^\alpha} = a^{p^\alpha} b^{p^\alpha} s_1^{p^\alpha} s_2^{p^\alpha} \cdots s_r^{p^\alpha}$$

gilt mit $s_1, s_2, \dots, s_r \in K(a, b)$. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 41, 8) hatte Verf. schon die Tatsache benutzt, daß hierbei $r = 1$ gesetzt werden kann. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß G schon dann regulär ist, wenn für je zwei Elemente a, b eine Beziehung $(ab)^p = a^p b^p s^p$ besteht mit $s \in K(a, b)$.

R. Kochendörffer.

● **Higman, Donald Gordon:** Focal series in finite groups. Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 1 p.

If there is given a subgroup S of a finite group G , we introduce the focal series of S in G by the recursive formulas $S(0) = S$, $S(i+1) =$ the subgroup of G which is generated by all commutators $c = [s, g]$, with c and s in $S(i)$, g in G . — For π a set of primes, let us denote by $P(\pi)$ the subgroup of G which is generated by all those elements of G whose orders have no prime divisors in π . A central theorem of our discussion is the following: if π contains all the prime divisors of the index $[S : S(i)]$ for some i , then every prime which divides $[P(\pi) \wedge S : P(\pi) \wedge S(i)]$ also divides $[P(\pi) : P(\pi) \wedge S]$. From this result we conclude in particular a generalization of Burnside's theorem: if $S(i) = 1$ for some i — in which case we call S hyperfocal — and if S has order prime to its index in G , then there exists a normal subgroup N of G such that $G = N \wedge S$ and $1 = N \wedge S$. Thus a group is nilpotent if and only if each of its Sylow subgroups is hyperfocal. (Autoreferat).

Osima, Masaru: On the induced characters of a group. Proc. Japan Acad. 28, 243—248 (1952).

Diese Note ist ein kurzer Bericht über einige Ergebnisse des Verf. über induzierte Charaktere endlicher Gruppen. Die Beweise sollen später veröffentlicht werden. Es handelt sich vornehmlich um neue Beweise zweier von R. Brauer stammender Sätze, die für die Gruppentheorie und ihre zahlentheoretischen Anwendungen fundamentale Bedeutung besitzen. Der erste Satz ist der berühmte „Satz über induzierte Charaktere“: Jeder Charakter einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} kann als Linearkombination von Induzierten zyklischer Untergruppencharaktere dargestellt werden (vgl. R. Brauer, dies. Zbl. 29, 15, 2. Referat). Der zweite Satz bezieht sich auf modulare Charaktere in bezug auf eine Primzahl p und auf die zwischen den irreduziblen modularen Charakteren φ von \mathfrak{G} und den unzerfällbaren modularen Charakteren η der regulären Darstellung von \mathfrak{G} bestehenden Relationen. Bedeutet $c_{\eta\varphi}$ jeweils die Vielfachheit von φ in η , so ist die sogenannte „Cartansche Determinante“ $\det(c_{\eta\varphi})$ eine (genau angebbare) Potenz von p (vgl. R. Brauer, dies. Zbl. 26, 56). Die Beweisvereinfachung gegenüber R. Brauer besteht darin, daß die ganze Theorie systematisch auf einen Hilfssatz über induzierte von Charakteren einer Sylowgruppe von \mathfrak{G} aufgebaut wird (Theorem 1, S. 244). Die Darstellungsweise des Verf. ist dieselbe wie bei R. Brauer, gekennzeichnet durch viele Rechenformeln. Erwünscht wäre eine strukturinvariante, mehr auf begrifflichen Schlußweisen fußende Darstellung [vgl. den Beweis des Ref. für den Satz über induzierte Charaktere J. reine angew. Math. 190, 148—168 (1952)].

P. Roquette.

Kaplansky, Irving: Some results on Abelian groups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 538—540 (1952).

The author states the following theorems without proofs which will be given in his forthcoming monograph on infinite abelian groups. Theorem 1. Let G and H be primary abelian groups, i. e., the order of every element is a power of a fixed prime p , E and F their rings of endomorphisms. Then any isomorphism of E and F is induced by a group isomorphism of G and H . This is a generalization of a theorem of Baer [Ann. of Math., II. Ser. 44, 192—227 (1943)].

Theorem 2. Let G be a reduced primary group, i. e., there is no subgroup H other than 0 for which $nH = H$ holds for all n . Let us further assume that every two elements can be embedded in a countable direct summand. Then every fully invariant subgroup H of G , i. e. a subgroup which admits every endomorphism of G , can be described as follows: let α_i be a monotone increasing sequence of ordinals, then H is the set of x satisfying $h(p^i x) \geq \alpha_i$ for all i where h means the height. The lattice of fully invariant subgroups is distributive and even satisfies the infinite distributive law $A \cap (\cup B_i) = \cup (A \cap B_i)$; the dual infinite law is satisfied if and only if G has no elements of infinite height. **Theorem 3.** The hypothesis on G is the same as in theorem 2. Then the following two statements are equivalent: (a) G has a characteristic subgroup which is not fully invariant; (b) $p = 2$ and there exist ordinals α, β with $\beta > \alpha + 1$ such that the Ulm invariants $f(\alpha)$ and $f(\beta)$ are both 1. **Theorem 4.** Let M be a module over the p -adic integers and let the intersection of $p^i M$ be 0. Take these submodules as neighborhoods of 0 for a topology and let us assume that M is complete in this topology. Then such M is the completion of a direct sum of cyclic modules. The cardinal numbers giving the number of cyclic summands of each order are a complete set of invariants. **Theorem 5.** Any module over the p -adic integers has a direct summand of rank one. In particular, M is indecomposable if and only if it has rank one. This gives the answer to a question raised by the author (this Zbl. 46, 257). **Theorem 4** can be applied to the problem of determining which abelian groups can be compact.

Y. Kawada.

Nachbin, Leopoldo: On a duality theorem for commutative groups. Anais Acad. Brasil. Ci. 24, 137—142 (1952).

Un groupe abélien additif est dit séparable à droite („right separating“) [resp., à gauche] si, quels que soient les groupes abéliens additifs H_1, H_2 et les homomorphismes distincts α, β de H_1 dans H_2 [resp., de H_2 dans H_1], il existe un homomorphisme φ de G dans H_1 [resp., de H_1 dans G] tel que $\alpha\varphi \neq \beta\varphi$ [resp., $\varphi\alpha \neq \varphi\beta$]. Soient Z le groupe additif des entiers et Q/Z le groupe additif des rationnels modulo Z . Pour qu'un groupe abélien additif soit séparable à droite [resp., à gauche] il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme de G sur Z [resp., un isomorphisme de Q/Z dans G]. En outre, ces propriétés caractérisent les groupes Z et Q/Z parmi les groupes abéliens additifs, à un isomorphisme près. S. Mac Lane [Bull. Amer. math. Soc. 56, 485—516 (1950)] avait signalé sans démonstration ces résultats, qui mettent en relief une dualité entre les groupes Z et Q/Z , où les concepts de „homomorphisme sur“ et „isomorphisme dans“, en sens opposés, sont duals l'un de l'autre. L'A. donne une démonstration très détaillée des propositions indiquées concernant le groupe Q/Z , ayant omis, comme immédiate, celle qui concerne les propriétés du groupe Z . La caractérisation du groupe Q/Z est prouvée comme une conséquence de la propriété énoncée et du fait que tout endomorphisme biunivoque de Q/Z est un automorphisme de Q/Z .

A. Pereira Gomes.

Murnaghan, F. D.: Über geeignete Parametersysteme für die Drehungsgruppe und die unitäre Gruppe. Symposium Problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 65—70 (1952) [Spanisch].

Verf. beschreibt die $2n$ - bzw. $(2n + 1)$ -dimensionale Drehung durch folgende Parameter: 1. Die n Drehwinkel. 2. Weitere Parameter, die die Drehung unter allen Drehungen mit denselben Drehwinkeln auszeichnen. Sie zerfallen in drei Gruppen, je nachdem sie Werte aus den Intervallen $(-\pi, \pi)$, $(-\pi/2, \pi/2)$, $(0, \pi/2)$ annehmen können. — Auch für die n -dimensionale unitäre Gruppe wird ein ähnliches Parametersystem gegeben. (Siehe auch Verf., dies. Zbl. 46, 24.) G. Locks.

Murnaghan, F. D.: On a convenient system of parameters for the unitary group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 127—129 (1952).

Jede unitäre $(2, 2)$ -Matrix U kann $U = VAV^{-1}$ geschrieben werden, wo

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} e^{i\tau} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & e^{-i\tau} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Die Parameter α_1, α_2, τ laufen von $-\pi$ bis π , ϑ von 0 bis $\pi/2$. Das Volumenelement in der Gruppe ist Produkt von $\{1 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\} d\alpha_1 d\alpha_2$ und $\sin 2\vartheta d\vartheta d\tau$. Diese Formeln werden auf 3, 4 und n Dimensionen verallgemeinert. Ohne Beweis. (In der drittletzten Zeile der Arbeit lies $n(n-1)/2$ statt n .) H. Boerner.

Cohn, P. M.: A theorem on the structure of tensor-spaces. Ann. of Math., II. Ser. 56, 254—268 (1952).

L'A. développe une intéressante relation entre les représentations linéaires du groupe linéaire général $GL_q(K)$ relatif à un corps K de caractéristique 0, et les représentations qu'elles induisent sur certains sous-groupes finis de $GL_q(K)$, formés de matrices de permutations (i. e., permutant les éléments d'une base de K^q); il ne semble pas que cette théorie rentre dans la

théorie classique de Frobenius ou dans ses généralisations. La première partie du travail est consacrée à l'étude de relations entre les sous-modules de deux modules (ou groupes abéliens à opérateurs) donnés, V, W (pas nécessairement sur le même anneau d'opérateurs); il s'agit d'„homomorphismes“ de l'ensemble \mathfrak{M}_1 des sous-modules de V dans l'ensemble \mathfrak{M}_2 des sous-modules de W , qui transforment la somme de deux sous-modules en la somme des transformés, et transforment deux sous-modules isomorphes en sous-modules isomorphes. L'A. s'attache spécialement au cas suivant: V est un Q -module, P un sous-anneau de l'anneau des endomorphismes de V , contenant r^2 „quasi-unités matricielles“ π_{ij} , telles que $\pi_{ij}\pi_{kh} = 0$ pour $j \neq k$ et $\sum_i \pi_{ii} = 1$; alors V est somme directe des $V_i = V\pi_{ii}$, dont chacun est à la fois un Q -module

et un P_i -module, avec $P_i = \pi_{ii}P\pi_{ii}$, et l'A. considère les „homomorphismes“ de l'ensemble des sous-modules du P -module V dans celui des sous-modules du P_i -module V_i . Ces résultats sont appliqués ensuite au cas où V est l'espace des tenseurs contravariants d'ordre n sur K^q , et Q l'anneau du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , P étant l'anneau des endomorphismes de V , qui est engendré par les transformations induites sur V par les transformations de $GL_q(K)$, comme il est bien connu. En prenant pour les π_{ij} des opérations de polarisation convenables („différentiation de Baker-Hausdorff“), on obtient les résultats mentionnés au début, car il se trouve que les P_i sont aussi de la forme $\pi_{ii}S\pi_{ii}$, où S est l'anneau engendré dans P par les transformations induites sur V par un groupe fini de matrices de permutations. J. Dieudonné.

Dynkin, E. B.: Topologische Invarianten der linearen Darstellungen der unitären Gruppe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 697—699 (1952) [Russisch].

Es wird der folgende Satz aufgestellt: Sei φ eine homomorphe Abbildung von $U(n) \rightarrow U(N)$, und es seien z_k und Z_k primitive Zyklen der Dimension $2k-1$ in $U(n)$, bzw. $U(N)$. Es sind dann $\varphi(z_k)$ und $d_k(\varphi)Z_k$ homologe Zyklen (Pontrjagin), wobei die $d_k(\varphi)$ gewisse ganze Zahlen sind. Aus $d_k(\varphi)/N(\varphi) = d_k(\psi)/N(\psi)$ folgt, daß $\psi = A\varphi A^{-1}$, falls φ, ψ zwei unitäre Darstellungen von $U(n)$ sind, von denen eine irreduzibel ist, und $N(\varphi)$ die Dimension der Darstellung φ darstellt. Es werden explizite Ausdrücke angegeben für die $d_k(\varphi)$ für ein beliebiges φ mit Hilfe der durch die Zerlegung in irreduzible Bestandteile bestimmten Weylschen m_k .

H. Schwerdtfeger.

Tits, J.: Sur les groupes doublement transitifs continus. Commentarii math. Helvet. 26, 203—224 (1952).

En poursuivant la recherche des groupes triplement transitifs (J. Tits, ce Zbl. 42, 25; H. Freudenthal, ce Zbl. 44, 20) l'A. démontre qu'un groupe doublement transitif dans un espace localement compact, non totalement discontinu et remplissant le premier axiome de dénombrabilité est essentiellement celui des transformations linéaires du corps réel, complexe ou quaternionien. — Sans supposer la dénombrabilité, il démontre que sous les mêmes conditions topologiques un presque-corps (H. Zassenhaus, ce Zbl. 11, 103) est toujours un de ces trois corps, et sous la condition de dénombrabilité, il démontre le même pour des systèmes algébriques plus généraux, appelés pseudo-corps. — Un théorème auxiliaire, dont il se sert, est le suivant: Si un groupe localement compact, connexe et remplissant le deuxième axiome de dénombrabilité, possède un automorphisme involutif, dont l'unité est un point fixe isolé, ce groupe est abélien et l'automorphisme est celui qui transforme x en x^{-1} .

H. Freudenthal.

Moriya, M.: Zur Theorie der halb-topologischen Gruppen und Körper. Math. J. Okayama Univ. 1, 109—124 (1952).

N. Jacobson and O. Taussky (this Zbl. 11, 8) and Y. Otobe [Proc. Japan Acad. 20, 278—283 (1944), Japanese J. Math. 19, 189—202 (1945)] have proved, that the assumption of continuity of division for locally compact topological fields is dispensable. The author of the present paper introduces the concept of semi-topological groups and fields, and investigates the conditions, under which they will be topological groups and fields respectively. We call a group G a semi-topological group, if it is a topological semigroup, when we regard G as a semigroup, and similarly we call a field to be semi-topological, when we assume only the continuity of addition and multiplication in it. He proves among others (i) a locally compact discontinuous Hausdorff semi-topological group is topological (ii) a locally compact,

locally connected Hausdorff semi-topological group is topological (iii) a locally compact, semi-topological field K with Fréchet's separation axiom is a topological field.

T. Tannaka.

Takahashi, Shuichi: A duality theorem for representable locally compact groups with compact commutation subgroup. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 115—121 (1952).

The object of this note is to prove a duality theorem for representable (or maximally almost periodic) locally compact groups with compact commutator subgroup K , which includes Pontrjagin's duality theorem for abelian groups and Tannaka's duality theorem for compact groups. Let G^\wedge be the totality of unitary representations D of such group G . We can introduce in G^\wedge an obvious topology, which is generated by Pontrjagin's topology for the subsystem (= subgroup) G^* of G^\wedge , where G^* is the group of linear representations. Following Tannaka, we mean by a representation A of G^\wedge , a continuous mapping $D \rightarrow A(D)$ on the space of unitarian matrices with same degree as D , which preserves the operations Kronecker product, direct sum and transformation by unitary matrices. The totality $G^{\wedge\wedge}$ of A becomes a representable locally compact group with compact commutator group, if we introduce in it the product by $A_1 A_2(D) = A_1(D) A_2(D)$ and the topology by its weak topology. Then the duality $G \simeq G^{\wedge\wedge}$ holds, by the usual isomorphism $a \rightarrow \varphi(a)$, where $\varphi(a)(D) = D(a)$. Essential part of his proof lies in proving $\varphi(K) = \{A/A(\chi) = 1, \chi \in G^*\}$, and this is done by employing the structure of group algebra. The last section is devoted to the remarks concerning the relations between assumptions, such as representability or compactness of commutator subgroup.

T. Tannaka.

Gamba, Augusto: Vues sur les applications de la théorie des groupes à la physique quantique. Revue sci. 90, 11—24 (1952).

Eine für den Außenstehenden, der sich orientieren möchte, recht lesenswerte kurze Auseinandersetzung der Darstellungstheorie und ihrer Anwendung in der Quantenmechanik, ohne Beweise. Die wichtigsten Sätze über die Charaktere sind zusammengestellt. Als Beispiele für endliche Gruppen dienen die symmetrische Gruppe π_3 und die Gruppe der Ordnung 32, die zu Diracs Algebra gehört; für kontinuierliche Gruppen die Drehgruppe in 2 und 3 Dimensionen. Aber auch die Youngsche Theorie für die allgemeine symmetrische Gruppe π_n wird kurz besprochen. Sodann wird die Anwendung auf die Klassifikation der Atomspektren und die Auswahlregeln erläutert.

H. Boerner.

Verbände. Ringe. Körper:

Dilworth, R. P. and J. E. McLaughlin: Distributivity in lattices. Duke math. J. 19, 683—693 (1952).

Bekanntlich ist nicht jeder distributive Verband auch unendlich distributiv. Jedoch gibt es eine Reihe von Sätzen, die in Spezialfällen eingehendere Aussagen über die Distributivitätseigenschaften gestatten. Diese Resultate werden in der vorliegenden Arbeit einer allgemeineren Theorie untergeordnet. Der Schlüssel zu dieser Theorie ist der Begriff des „Einbettungsoperators“. L sei ein Verband und φ ein Hüllenoperator über L ; d. h. φ ist eine Abbildung des Systems aller Teilmengen A von L in sich mit den Eigenschaften: (1) $\varphi(A) \supseteq A$, (2) aus $A \supseteq B$ folgt $\varphi(A) \supseteq \varphi(B)$ und (3) $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$. Ferner werde für $a \in L$ mit (a) die Menge aller $x \in L$ mit $x \leq a$ bezeichnet. φ heißt dann Einbettungsoperator von L , wenn für alle $a \in L$ gilt: $\varphi(a) = (a)$. Diejenigen Teilmengen A von L , für die $\varphi(A) = A$ gilt, heißen φ -abgeschlossen. Sie bilden einen Vollverband L_φ , die φ -Komplettierung von L . Vermittels der Definition $\varphi \geq \psi$ genau dann, wenn $\varphi(A) \supseteq \psi(A)$ für alle Teilmengen A von L , kann für die Einbettungsoperatoren von L eine teilweise Ordnung erklärt werden. Hinsichtlich dieser teilweisen Ordnung gibt es dann stets einen größten Einbettungsoperator, den Normaloperator ν , und einen Minimaloperator ω , die in einfacher Weise explizit beschrieben werden können. Weiter definieren gewisse Systeme von ω -abgeschlossenen Mengen in bestimmter Weise Einbettungsoperatoren, deren zugehörige abgeschlossene Mengen gerade durch das gegebene System geliefert werden. So definiert insbesondere das System aller Ideale (σ -Ideale, Vollideale) den Ideal- (σ -Ideal-,

Vollideal-) Operator. Der Verband L heißt nun φ -distributiv, wenn für alle $x \in L$ und alle $S \subseteq L$ gilt: $x \cap \varphi(S) = \varphi(x \cap S)$. Der Idealoperator liefert auf diese Weise die gewöhnliche Distributivität, der Vollidealoperator die unendliche Distributivität. Jeder Verband ist ω -distributiv. Ein Vollverband ist genau dann normal- (ν -) distributiv, wenn er unendlich distributiv ist. Ein Verband ist φ -distributiv dann und nur dann, wenn L_φ normaldistributiv ist. — Sei ein System von Teilmengen von L , das alle einelementigen Teilmengen enthält. Die Teilmenge A heißt φ_\subseteq -abgeschlossen, wenn aus $S \subseteq A$ und $S \in \mathfrak{S}$ folgt: $\varphi(S) \subseteq A$. Die φ_\subseteq -abgeschlossenen Teilmengen definieren ihrerseits einen Einbettungsoperator φ_\subseteq , und es gilt $\varphi \geq \varphi_\subseteq$; besteht \mathfrak{S} aus allen Teilmengen von L , so gilt $\varphi = \varphi_\subseteq$. Folgt aus $\varphi_\subseteq(S) = \varphi(S)$ stets $S \in \mathfrak{S}$, so heißt \mathfrak{S} maximal bezüglich φ . Zu jedem System \mathfrak{S} gibt es ein bezüglich φ maximales System \mathfrak{S}' mit $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$. Aus $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{I}$ folgt $\varphi_\subseteq \geq \varphi_\mathfrak{I}$. Ist \mathfrak{S} maximal bezüglich φ , so gilt auch die Umkehrung. Es folgen weitere Sätze und Definitionen, die die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Distributivitätsbegriffen klären. In einem letzten Abschnitt wird der wichtige Satz bewiesen, daß jede Boolesche Algebra normaldistributiv ist. Weitere Sätze gestatten Aussagen über die Distributivitätseigenschaften direkter Vereinigungen. Als Anwendung wird der Verband der stetigen Funktionen untersucht.

H.-J. Kowalsky.

Szász, G.: On the independence of a postulate system for the distributive lattices. Math. Ann. 124, 291—293 (1952).

L'A. resolve il problema no. 65 che G. Birkhoff propone nel suo trattato „Lattice Theory“ a pag. 139 nella ed. New York 1948 (questo Zbl. 33, 101). Si tratta della seguente questione: Sia A un insieme di elementi x, y, \dots in cui sono definite due operazioni binarie $*$, \circ soddisfacenti alle seguenti 7 relazioni formali

$$x * x = x; \quad x \circ I = I; \quad I \circ x = I; \quad x * I = x; \quad I * x = x;$$

$$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z); \quad (y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x);$$

ove I è un elemento fisso conveniente di A ed x, y, z elementi qualsiasi di A . L'A. dimostra che le 7 relazioni scritte, che come già dimostrò Birkhoff definiscono un reticolo distributivo con massimo elemento I , sono tra loro indipendenti. La dimostrazione vien condotta assegnando algebre le cui operazioni soddisfano a tutte, tranne una, delle 7 relazioni scritte.

G. Zacher.

Szász, G.: On the structure of semi-modular lattices of infinite length. Acta Sci. math. 14, 239—245 (1952).

L'A. établit le théorème suivant: Dans un treillis vérifiant la condition (α) x couvre $x \cap y$ entraîne $x \cup y$ couvre y , si une chaîne maximale d'un segment est de longueur finie, toutes les chaînes de ce segment sont finies et toutes les chaînes maximales ont même longueur. Ce théorème a été établi indépendamment par M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis, Paris 1953, p. 88—89. — L'A. en déduit les résultats suivants: a) Dans un treillis semi-modulaire de longueur infinie, ayant un élément nul 0 et un élément universel u , si, pour chaque élément $a \neq u$, il existe une chaîne maximale finie entre 0 et a , aucun élément différent de 0 et u n'a de complément. b) Dans un treillis de longueur infinie, ayant un élément nul 0 et un élément universel u , vérifiant les lois de distributivité infinie et semi-complémenté (pour tout $a \neq u$, on peut trouver x tel que $a \cap x = 0$), si, pour un élément $a \neq u$, il existe une chaîne maximale finie entre 0 et a , on peut trouver un semi-complément x de a tel que toutes les chaînes maximales entre 0 et x soient de longueur infinie. c) Dans un treillis semi-modulaire, semi-complémenté, atomique, ayant un élément universel, s'il y a un nombre fini r de points, la longueur du treillis est inférieure ou égale à r .

R. Croisot.

Petresco, Julian: Théorie relative des chaînes. II. Isocorrespondance. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1087—1089 (1952).

Pour la 1^{re} partie voir ce Zbl. 46, 254. Introduction, dans un treillis, d'un certain nombre de notions d'isomorphisme que l'A. doit utiliser ultérieurement: deux intervalles $A \leq A^*$ et $B \leq B^*$ sont \cap -isocorrespondants si les applications $X \rightarrow B \cup (B^* \cap X)$, $Y \rightarrow A \cup (A^* \cap Y)$, où $A \leq X \leq A^*$, $B \leq Y \leq B^*$,

sont biunivoques et réciproques; en particulier, $A \leq A^*$ est \cap -isoperspectif à $B \leq B^*$ si les applications $X \rightarrow B^* \cap X$, $Y \rightarrow A \cup Y$ sont biunivoques et réciproques; deux intervalles $A \leq A^*$ et $B \leq B^*$ sont fortement \cap -isocorrespondants s'ils sont \cap -isoperspectifs à la fois à $|B^* \cap X|$ et $|A^* \cap Y|$, ensembles des éléments $B^* \cap X$ et $A^* \cap Y$ respectivement; ils sont dits strictement \cap -isocorrespondants si $|B^* \cap X|$ et $|A^* \cap Y|$ coïncident avec l'intervalle $A \cap B \leq A^* \cap B^*$; définitions duales et auto-duales. R. Croisot.

Lesieur, Léonce: Conditions suffisantes pour que, dans un treillis multiplicatif complet, la condition de chaîne descendante entraîne la condition de chaîne ascendante. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1017—1019 (1952).

Soit T un demi-treillis, η un endomorphisme de T . L'endomorphisme η est dit principal si l'image $(a)\eta$ d'un idéal principal (a) est l'idéal principal $(a\eta)$. L'endomorphisme η est dit essentiel si $x\eta \cup h = y\eta \cup h$ entraîne l'existence de x' et y' tels que $x \cup x' = y \cup y'$, $x'\eta \leq h$, $y'\eta \leq h$. L'union des endomorphismes η_α ($\alpha \in A$) est définie par $x \left(\bigcup_{\alpha \in A} \eta_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in A} x\eta_\alpha$. — T étant alors un treillis multiplicatif complet avec éléments o et u tels que $o \leq x$, $x o = o x = o$, $x \leq u$, $u x = x$ pour tout x , l'A. établit le théorème fondamental suivant: si T vérifie la condition de chaîne descendante, est modulaire, \cap -continu, est tel que l'application $x \rightarrow x a$ soit union de \cup -endomorphismes principaux et union de \cup -endomorphismes essentiels, il vérifie la condition de chaîne ascendante. R. Croisot.

Lesieur, Léonce: Théorèmes de décomposition dans certains demi-groupes réticulés satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2250—2252 (1952).

L'A. étudie la possibilité de représenter un élément comme intersection d'un nombre fini d'éléments primaires dans un demi-groupe réticulé T complet, commutatif, entier, \cap -continu, satisfaisant à la condition de chaîne descendante affaiblie. Il démontre les théorèmes suivants: Si T est modulaire et si tout élément de T est union d'éléments principaux, c'est-à-dire d'éléments a tels que le \cup -endomorphisme $x \rightarrow x a$ soit principal (cf. analyse précéd.), tout élément de T est intersection d'un nombre fini d'éléments primaires; si T est tel que chacun de ses éléments soit union d'éléments essentiels, c'est-à-dire d'éléments a tels que le \cup -endomorphisme $x \rightarrow x a$ soit essentiel (cf. analyse précéd.), tout élément de T est d'une manière unique intersection (ou produit) d'un nombre fini d'éléments primaires premiers entre eux. R. Croisot.

Nikodým, Otton Martin: Critical remarks on some basic notions in Boolean lattices. I. Anais Acad. Brasil Ci. **24**, 113—136 (1952).

Definitions and Notations: Tribe: Boolean lattice with unit, envisaged also as a Boolean ring. Soma: element of a tribe. I : interval $(0, 1]$. E : perfect nullset of I . $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ components of $I - E$. (A 1): tribe of all finite unions (figures) $F = \bigcup (\alpha_i, \beta_i]$, where $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $0 \leq \beta_i \leq 1$, $\alpha_i \leq \beta_i$ with set inclusion as ordering relation. (A 2): tribe of all subsets of I obtained from the figures F by finite alterations (additions or subtractions of finite sets), the ordering relation being the set inclusion. (B 1): tribe of all Borelian subsets of I with set inclusion as ordering relation. (B 2): tribe of the same subsets of I as B 1 but where $a \leq b$ is defined by measure $(a - a \cdot b) = 0$, $a = b$ means measure $((a - a \cdot b) + (b - b \cdot a)) = 0$. Contents: Part I of the paper gives a brief account of well-known basic definitions and theorems on Boolean tribes. The notions of equality, of sum and product of elements α_α for $\alpha \in M$ when M is empty, are criticized from the point of view of the working mathematician needing precise tools. Part II is devoted to the clarification of the notion of homomorphism. A correspondence R from a Boolean tribe (A) into a Boolean tribe (A') is called a (finite-operation) homomorphism if it satisfies the following conditions (I) (Equality invariance) $((a R a') \& (a = b) \& (a' = b')) \rightarrow (b R b')$. (II $_\alpha$) $((a R a') \& (b R b')) \rightarrow (a + b) R (a' + b')$. (II $_\beta$) $((a R a') \& (b R b')) \rightarrow (a \cdot b) R (a' \cdot b')$. (III $_\alpha$) $(A\text{-zero}) R (A'\text{-zero})$. (III $_\beta$) $(A\text{-unit}) R (A'\text{-unit})$. (IV) $((a R a') \& (a R b')) \rightarrow (a' = b')$. Examples show that these six conditions are independent. For instance let $(A) = (B 1)$, $(A') = (B 2)$; the identity relation satisfies (II $_\alpha$) — (IV) but not (I). [Remark by the reviewer: It may be objected that the definition of a set implies a definition of equality of its elements and that in this example the identity relation cannot be regarded as a map

ping of the set $B1$ into the set $B2$. In other words the equality invariance (I) can be regarded as a condition sine qua non for a mapping from A into A' .] A (finite-operation) homomorphism need not preserve the enumerable sums. Example: $(A) = (A1)$, $(A') = (A2)$, R is the identity relation, $a_n = c_n = a'_n$; $\Sigma a_n = I$, $\Sigma' a'_n$ does not exist. The author gives four definitions of denumerable-operation homomorphisms. A finite-operation homomorphism R is said to be a denumerable-operation homomorphism from (A) into (A') if and only if $((\Sigma a_n$ is meaningful) & $(n) (a_n R a'_n)) \rightarrow ((\Sigma' a'_n$ is meaningful) & $(\Sigma a_n) R (\Sigma' a'_n))$ (Condition V). R is called a „strong“ denumerable-operation homomorphism if and only if the existence of one of the sums Σa_n , $\Sigma' a'_n$ where $a_n R a'_n$, implies the existence of the other and $(\Sigma a_n) R (\Sigma' a'_n)$ (Condition V_s). Example of a finite-operation homomorphism satisfying V but not V_s : $(A) = (A2)$, $(A') = (B2)$, R makes correspond to any set a of (A) every set differing from it by a Borelian nullset. For $a_n = c_n$, Σa_n does not exist, but $\Sigma' a'_n = I$. [Remark by the reviewer: The rev. has not been able to find the justification for the last assertion of 17.01]. *Chr. Pauc.*

● **Emerson, Marion Preston: Dualities of modular lattices.** Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 1 p.

A permutation of the elements of a partially ordered set that reverses the order relations is a duality. Analogous to the study of the fixed points of projectivities we investigate the absolute elements of dualities. The absolute elements of a duality are those elements that are contained in or contain their image. We reduce our problem to that of investigating complemented lattices. An indecomposable complemented lattice is a projective geometry. Hence, in order to reduce our problem to that of investigating projective geometries, we consider the effect of dualities on direct decompositions of lattices. It has been shown that every duality of a finite projective plane has at least one absolute point. We generalize this theorem by showing that a finite projective geometry of dimension d has at least as many absolute points as there are points carried by any of its $(d-2)$ -dimensional subspaces. (Autoreferat.)

Pickert, Günther: Bemerkungen über Galois-Verbindungen. Arch. der Math. 3, 285—289 (1952).

Gegenstand der Note ist der (schon in der Dissertation des Ref. angegebene) Satz aus der Theorie der Galois-Verbindungen (der Galois-connexions von Ore), daß jede der beiden Abbildungen $x \rightarrow x^*$ und $y \rightarrow y^+$ (Bezeichnungen nach Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloqu. Publ. No. 25, rev. ed., New York 1948, p. 56; dies. Zbl. 33, 101) durch die andere definiert ist. Damit eine Abbildung $x \rightarrow x^*$ eines vollständigen Verbandes in einen vollständigen Verband eine „Galoissche Umkehrung“ $y \rightarrow y^+$ besitze, ist — ein weiteres Resultat dieser Note — notwendig und hinreichend, daß $x \rightarrow x^*$ das Supremum in das Infimum überführe, d. h. daß

$$\left(\bigvee_{x \in X} x \right)^* = \bigwedge_{x \in X} x^*$$

gelte. Zwei Beispiele von Galois-Korrespondenzen beschließen die Note.

Jürgen Schmidt.

Fell, J. M. G. and Alfred Tarski: On algebras whose factor algebras are Boolean. Pacific J. Math. 2, 297—318 (1952).

Eine Menge A mit einer 2-stelligen Verknüpfung $+$ und einem Nullelement 0 wird eine „Algebra“ genannt. Eine Unteralgebra B heißt „direktes Produkt“ der Unteralgebren B_1, B_2 , wenn (1) $B_1 + B_2 = B$ und für alle $b_1, b'_1 \in B_1$ und $b_2, b'_2 \in B_2$ (2) $b_1 + b_2 = b'_1 + b'_2 \rightarrow b_1 = b'_1 \wedge b_2 = b'_2$ (3) $(b_1 + b_2) + (b'_1 + b'_2) = (b_1 + b'_1) + (b_2 + b'_2)$. Es wird dann $B = B_1 \times B_2$ geschrieben. Gilt $B_1 \times B_2 = A$, dann heißen B_1 und B_2 komplementäre „Faktoren“ von A . Die Faktoren von A bilden bez. \times die „Faktoralgebra“ (mit nur teilweise ausführbarer Verknüpfung). Genau dann, wenn die Faktoren bez. der Inklusion einen Booleschen Verband bilden, ist die Faktoralgebra eine sog. disjunktive Boolesche Algebra (vgl. A. Tarski, Cardinal Algebras, New York 1949, dies. Zbl. 41, 345). Weitere Kriterien für diese Eigenschaft der Faktoralgebra werden aufgestellt, insbesondere die Bedingung, daß es zu jeder Unteralgebra B_1 höchstens eine komplementäre Unteralgebra B_2 gibt. Nach den aufgestellten Bedingungen ergibt sich, daß für große Klassen von Algebren die Faktoralgebra Boolesch ist. — Die Theoreme werden anschließend übertragen auf den Fall einer Algebra, in der außer $+$ noch weitere endlich-stellige Operationen $O_1, O_2, \dots, O_\xi, \dots$ definiert sind, die $O_\xi(0, \dots, 0) = 0$ erfüllen.

P. Lorenzen.

Pickert, Günter: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. der Math. 3, 335—342 (1952).

Eine Cartesische Gruppe ist eine Menge C mit zwei Kompositionen: Addition $a + b$ und Multiplikation $a b$, die folgenden Gesetzen genügen: (a) C ist hinsichtlich

der Addition eine Gruppe. (b) Die Multiplikation ist eindeutig. (c) $0x = x0 = 0$ für alle x in C . (d) Es gibt ein Einselement 1, das $1x = x1 = x$ für alle x in C erfüllt. (e) Aus $a \neq b$ und $c \neq d$ folgt $ca - cb \neq da - db$. (f) Zu Elementen a, b, c mit $a \neq b$ in C gibt es Elemente x und y in C , die den Gleichungen $xa - xb = c$ und $-ay + by = c$ genügen. Für diesen Begriff und seine geometrische Bedeutung vgl. R. Baer [Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942)]. Es sei bemerkt, daß aus (e) die Eindeutigkeit der in (f) postulierten Elemente x und y folgt. Es besteht nun die Frage, ob die Additionsgruppe von C notwendig kommutativ sein muß; und es gelingt Verf. hier, diese Frage durch eine sehr kunstvolle Konstruktion negativ zu beantworten. Zu diesem Zwecke verallgemeinert Verf. den Begriff der Cartesischen Gruppe zu dem der halbcartesischen Gruppe durch Weglassen der Bedingung (f) und beweist, daß jede halbcartesische Gruppe, die nicht cartesisch ist, sich in eine nicht-kommutative Cartesische Gruppe einbetten läßt.

R. Baer.

Baer, Reinhold: Kriterien für die Existenz eines Einselementes in Ringen. Math. Z. **56**, 1—17 (1952).

The author considers the criterium for the existence of unity in a ring R . 1. Let N be the radical of R in the sense of Perlis-Jacobson [Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945)]. Let us assume the existence of an idempotent element e such that $e \bmod N$ is the unity of R/N . Then the following properties of R are mutually equivalent: (i) Every idempotent element e' of R such that $e' \bmod N$ is the unity of R/N is a left unity of R . (ii) There exists one left unity. (iii) For every $x \in R$ x belongs to Rx . (iv) From $Rx = Nx$ follows $x = 0$. (v) $Z = RZ$ holds for every ideal Z in R , and an element x , which belongs to NxN , belongs also to Rx or to xR . (vi) Every right ideal r of R ($R \neq Z$) is contained in a maximal right ideal and N is the intersection of all maximal right ideals. (vii) If J is a right ideal of R which satisfies $N + J = R$, then $J = R$. 2. Next the author considers the case where the unity of R/N exists. Then the following properties of R are equivalent: (i) A left-unity exists in R . (ii) x belongs to Rx for all x , and R is the unique right ideal J in R which satisfies $R = N + J$. (iii) x belongs to Rx ; and y belongs to yR if $R = N + yR$ holds. (iv) From $Rx = Nx$ follows $x = 0$; and y belongs to yR if $R = N + yR$ holds. (v) x is a nil-element [$x^k = 0$] if $Rx = Nx$ holds, and R is the unique right ideal which satisfies $R = N + J$. 3. In the general case, there exists a left-unity in R if and only if (a) $R = aR$ holds for at least one $a \in R$ and (b) if $R = xR$ then $x \in Rx$. 4. Let $A_R(A_L)$ be the set of all elements $x \in R$ such that $Ax = 0$ ($xA = 0$). We call a ring R auto-dual if $J = J_{LR}$ holds for all right ideals J in R and $Q = Q_{RL}$ holds for all left ideals Q in R . Then the following properties are equivalent for the auto-dual ring R : (i) There exists a unity in R . (ii) There exists a left-unity in R . (iii) There exists no infinite set of independent minimal left ideals in R . (iv) There exists no infinite set of independent minimal right ideals in R/N . (v) There exists a unity in R/N .

Y. Kawada.

Rédei, L. und O. Steinfeld: Über Ringe mit gemeinsamer multiplikativer Halbgruppe. Commentarii math. Helvet. **26**, 146—151 (1952).

Let R be a ring and R^\times be the multiplicative semi-group of R . The problem is to consider to what extent the ring structure of R is determined by R^\times . In this paper the following theorem is proved. Let R be the residue class ring of integers mod p^e ($p \neq 2$, prime, $e \geq 1$). If $e \neq 2$ $S = R$ follows from $S^\times = R^\times$. If $e = 2$ there exist only two non-isomorphic solutions for a given multiplicative structure R^\times . The similar problem arises if we only give the additive structure R^+ of a ring R and consider to what extent the whole structure of R is determined. Here some examples of rings are given for which R_α^+ (R_α^\times) are mutually isomorphic but R_α have different ring structures.

Y. Kawada.

Raffin, R.: Immersion dans un domaine à division de l'anneau des classes résiduelles modulo n . Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 957—964 (1952).

The ring of integers modulo n is embedded in a system D_n with an addition and multiplication. With respect to addition D_n is a commutative groupoid with neutral element 0 in which the equation $a + x = b$ has a solution x for every a, b , and in fact infinitely many solutions when $a \neq 0$. With respect to multiplication D_n is a commutative groupoid with zero 0 and neutral element 1 in which the equation $ax = b$ has a solution for every $a \neq 0$ and b , and in fact infinitely many solutions when $a \neq 1$. Multiplication is not distributive over addition. Thus of the usual

properties defining a field the associativity of addition, the uniqueness of subtraction, the associativity of multiplication, the uniqueness of division, and the distributive law have been sacrificed. The author remarks that it is not possible to embed the ring of integers modulo a composite number n in a division „ring“ with the distributive law, even if associativity of addition and of multiplication and uniqueness of subtraction and of division are abandoned.

B. H. Neumann.

Jaeger, Arno: Adjunction of subfield closures to ordered division rings. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 35—39 (1952).

If Σ is a fully ordered division ring, F an arbitrary subfield of its centre, F^* the closure of F in its own order topology (which is induced by that of Σ but is in general coarser), then Σ can be extended to a fully ordered division ring Σ^* whose order continues that of Σ and which contains (a field order-isomorphic to) F^* in its centre. This generalizes a result of B. H. Neumann (this Zbl. **35**, 304), where F was the field of elements archimedean comparable with 1, and F^* the field of real numbers. The proof is an extension of that op. cit.; it is not given in full but only the necessary modifications are described.

B. H. Neumann.

Rédei, L.: Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie. Acta Sci. math. **14**, 252—273 (1952).

Unter einer Halbgruppe wird wie üblich eine algebraische Struktur mit einer binären assoziativen Verknüpfung — meist als Multiplikation geschrieben — verstanden. S und Σ seien Halbgruppen mit den neutralen Elementen e bzw. ε . Die ebenfalls mit neutralem Element versehene Oberhalbgruppe \mathfrak{S} von Σ heißt dann Erweiterung von Σ mit der Faktorstruktur S , wenn es einen Homomorphismus von \mathfrak{S} auf S mit den folgenden Eigenschaften gibt: Genau die Elemente von Σ werden auf e abgebildet; die auf ein und dasselbe Element von S abgebildeten Elemente von \mathfrak{S} lassen sich mit festem $a \in \mathfrak{S}$ eindeutig in der Form $a\alpha$ ($\alpha \in \Sigma$) darstellen. Σ bestimmt dann bereits die durch den Homomorphismus gegebene Klasseneinteilung von \mathfrak{S} , welche daher als die Klasseneinteilung nach Σ bezeichnet wird. Die sämtlichen Erweiterungen von Σ mit Faktorstruktur S lassen sich bis auf Isomorphie auf die folgende Weise gewinnen: Zu jedem $b \in S$ Abbildungen $a \rightarrow a^b$, $\alpha \rightarrow \alpha^b$ von S bzw. Σ in Σ mit $a^e = \varepsilon^e = e^e = \varepsilon$, $\alpha^e = \alpha$, $(\alpha\beta)^e = \alpha^e\beta^e$, $\alpha^b\alpha^c = b \cdot (\alpha^b)^c$, $a^b\alpha^c = (a^b\alpha)^c$; als \mathfrak{S} die Menge der Paare (a, α) ($a \in S$, $\alpha \in \Sigma$), für die $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^b, a^b\alpha^b\beta)$ und $(e, \alpha) = \alpha$ gesetzt wird. Ein weiteres Paar von Abbildungen in Σ erzeugt auf diese Weise genau dann eine zu der beschriebenen Erweiterung äquivalente (d. h. es gibt einen Isomorphismus der einen auf die andere, welcher sowohl die Elemente von Σ als auch die Klassen nach Σ fest läßt), wenn sie in der Form $a \rightarrow (a^b)^{-1}a^b\alpha^b b'$, $\alpha \rightarrow b'^{-1}\alpha^b b'$ mit einer Abbildung $a \rightarrow a'$ von S in die Menge der invertierbaren Elemente von Σ und $e' = \varepsilon$ dargestellt werden können. Eine kommutative, additiv geschriebene Halbgruppe mit neutralem Element 0, in der aus $a + c = b + c$ stets $a = b$ folgt und in der eine assoziative, distributive Multiplikation erklärt ist, wird als Halbring bezeichnet. Der Begriff der Erweiterung wird wie bei Halbgruppen erklärt, wobei natürlich die dortige Multiplikation durch die Addition zu ersetzen ist. Die Erweiterungen ergeben sich jetzt dadurch, daß $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, [a, b] + \alpha + \beta)$, $(a, \alpha)(b, \beta) = (a^b, \{a, b\} + \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$ gesetzt wird, wobei die Ausdrücke $[a, b]$, $\{a, b\}$, αb , $a\beta$ ($\in \Sigma$) den Bedingungen $[0, a] = [a, 0] = \{a, 0\} = \{0, a\} = 0$ $a + 0 = 0$ $a + a = a$ $0 + a = a$ $0 + 0 = 0$, $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$, $(\alpha + \beta)c = \alpha c + \beta c$, $(a + b)\gamma + [a, b]\gamma = a\gamma + b\gamma$, $\alpha(b + c) + \alpha[b, c] = \alpha b + \alpha c$, $a(\beta\gamma) = (a\beta)\gamma$, $(\alpha\beta)c = \alpha(\beta c)$, $(a^b)\gamma + \{a, b\}\gamma = a(b\gamma)$, $\alpha(b^c) + \alpha\{b, c\} = (\alpha b)^c$, $(a\beta)c = a(\beta c)$, $(\alpha b)\gamma = \alpha(b\gamma)$, $\{a, b, c\} + \{a, b\}c = \{a, b, c\} + a\{b, c\}$, $[a, b] + [b, a]$, $[a, b] + [a + b, c] = [a, b + c] + [b, c]$, $[a, b]c + \{a + b, c\} = [a, c] + \{b, c\}$, $a[b, c] + \{a, b + c\} = [a, b, c] + \{a, b\} + \{a, c\}$ genügen. Die äquivalenten Erweiterungen ergeben sich, wenn man die vier Ausdrücke

$$[a, b] + a' + b' - (a^b)', \quad \{a, b\} + a'b + a'b' + a'b' - (a^b)', \quad \alpha b + \alpha b', \quad a\beta + a'\beta$$

ersetzt, wobei $a \rightarrow a'$ eine Abbildung von S in die Menge der invertierbaren Elemente der additiven Halbgruppe von Σ ist und $0' = 0$ gilt. Diese Ergebnisse verallgemeinern die Everett'sche Theorie der Ringextensionen [Amer. J. Math. **64**, 363—370 (1942)]. G. Pickert.

Rédei, L.: Die Vollidealringe. Monatsh. Math. **56**, 89—95 (1952).

Unter einem Vollidealring verstehen wir einen Ring, dessen sämtliche Untermoduln (zweiseitige) Ideale sind. In dieser Arbeit wird die Struktur der Vollidealringe bestimmt. Unter einem „Zeroring“ verstehen wir einen Ring R mit $R^2 = 0$, und unter einem p -Ring (p Primzahl) verstehen wir einen Ring, in dem es zu jedem Element α eine Potenz p^e mit $p^e \alpha = 0$ gibt. Es sei $R(d, d_1)$ der Ring mit dem einzigen erzeugenden Element α und den definierenden Gleichungen $d\alpha = 0$,

$\alpha^2 = d_1 \alpha$. Dann wird der folgende Satz bewiesen: Jeder beliebige Vollidealring ist von der folgenden Art: I. Ein Zeroring, II. Die direkte Summe aus einem $R(0, d_1)$ ($d_1 > 0$) und einem Zeroring mit $d_1 R = 0$, III. Die über alle verschiedenen Primzahlen p erstreckte direkte Summe $\sum R_p$, wobei R_p entweder einen p -Zeroring oder die direkte Summe aus einem $R(p^e, p^f)$ ($0 \leq f < e$) und einem p -Zeroring R'_p mit $p^f R_p = 0$ bezeichnet.

Y. Kawada.

• Wolfson, Kenneth Graham: An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations. Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 2 p.

We determine necessary and sufficient conditions that an abstract ring K be isomorphic to a ring $T(F, A)$, the set of all linear transformations of the vector space A over the (not necessarily commutative) field F . We also characterize the ring $T_v(F, A)$ which is the set of all linear transformations of A of rank less than \aleph_v over F . In particular $T_0(F, A)$ the ring of all linear transformations of A which are of finite rank is characterized as a simple ring with minimal right ideals satisfying a certain annihilation condition on left ideals. (Autoreferat.)

• Dean, Burton Victor: Near rings and their isotopes. Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 3 p.

A near ring N is a system having two laws of operation, called addition and multiplication where (1) addition is single valued and has a zero element, (2) multiplication is single valued and associative, $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ for all a in N , (4) multiplication is left distributive with respect to addition. — (A, B, C) is an isotopy of the near ring N onto the near ring M if A, B , and C are three additive, exhaustive, 1 — 1 mappings of N onto M such that $(ab)^c = a^d b^b$ for all a, b in N . — The primary purposes of this paper are to find conditions for isotopic near rings to be isomorphic and to find invariant properties of isotopic near rings. (Autoreferat.)

Zassenhaus, Hans: Über die Darstellungen der Lie-Algebren bei Charakteristik 0. Commentarii math. Helvet. 26, 252—274 (1952).

Let L be a Lie-algebra (over a field of characteristic zero throughout), T an ideal of L , and let Δ, Γ be representations of L, T respectively. Then the representation Γ is said to generate Δ , if a representation-module M for Δ contains a subspace N which (qua T -module) is a representation-module for Γ and such that the least L -module containing N is the whole module M . The author investigates under what conditions a representation Γ of an ideal T of L generates a representation Δ of L itself. Denote the derived algebra of L by L' and the radical of T by $R(T)$, then a necessary condition follows from the fact that any representation of a Lie-algebra L induces on $L' \cap R(T)$ a nilpotent representation, where T is an ideal of L , or, more generally, a subinvariant subalgebra of L [as in E. V. Schenkman, Amer. J. Math. 73, 453—474 (1951)]. The main object is to prove that the condition is also sufficient: (Theorem 3) Any representation of a subinvariant subalgebra T which induces a nilpotent representation on $L' \cap R(T)$, generates a representation of L . — From this result Ado's Theorem follows immediately, by taking a faithful nilpotent representation of the centre of L and combining the representation of L generated by it with the adjoint representation of L to obtain a faithful representation of L . — The above sufficient condition is reduced, by means of Levi's Theorem, to the following form: (Part of Theorem 4) If T is an ideal of L and W is a subalgebra such that $L = W + T$ ($W \cap T = 0$), then every representation of T which is nilpotent on a certain ideal T_1 of T ($T_1 \supset [W, T]$), generates a representation of L . This statement is proved by extending the representations in the natural way to the associative enveloping algebras and constructing the kernel of the required representation. — Theorem 4 is used in stating a programme for obtaining a survey of all representations of a given Lie-algebra over a (algebraically closed) field of characteristic zero in terms of representations of suitably chosen associative algebras.

P. M. Cohn.

Sul'din, A. V.: Über die linearen Darstellungen der Lieschen Algebren über einem Körper der Charakteristik $p > 0$. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 529—531 (1952) [Russisch].

1. L'A. démontre que toute algèbre de Lie de dim. finie sur un corps de caractéristique $p > 0$ possède une représentation fidèle complètement réductible (de dim. finie). La démonstration utilise les propriétés de l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie et cette propriété, valable seulement en caractéristique $\neq 0$, que pour tout x appartenant à l'algèbre de Lie il existe un polynôme en x , $\varphi(x)$ appartenant au centre de l'algèbre enveloppante universelle. — L'A. indique en corollaire diverses propriétés des représentations complètement réductibles d'algèbres de Lie sur un corps de caractéristique $\neq 0$, qui permettent de démontrer beaucoup plus simplement certains théorèmes de Zassenhaus (ce Zbl. 21, 200). — 2. Si le degré d'une algèbre de Lie matricielle irréductible sur un corps de caractéristique $p > 0$ n'est pas divisible par p , cette algèbre est la somme directe d'une algèbre de Lie abélienne et d'une algèbre de Lie semi-simple (i. e. de radical nul) (N. B. Utilisant la même méthode, N. Jacobson a établi

(ce Zbl. 46, 34) que toute algèbre de Lie de dim. finie sur un corps de caractéristique $p \neq 0$ possède une représentation fidèle qui n'est pas complètement réductible. *M. Lazard.*

Karpelevič, F. I.: Die Klassifikation der einfachen Untergruppen der reellen Formen der Gruppe der komplexen unimodularen Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 1205—1208 (1952) [Russisch].

Zu einer reellen Lieschen Algebra R mit der Multiplikation xy gehöre die komplexe Liesche Algebra $[R]$ mit der Multiplikation $(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$. Alsdann wird R eine reelle Form von $[R]$ genannt. Gemäß der Cartanschen Konstruktion gehört zu jeder Klasse $\mathfrak{N}(R)$ konjugierter reeller Formen einer gegebenen komplexen halbeinfachen Lieschen Algebra $[G]$ eine bestimmte Klasse $\mathfrak{M}(R)$ konjugierter involutorischer Automorphismen von $[G]$. Nun sei $[G]$ eine halbeinfache Unter algebra der komplexen Algebra A_n . Durch den ersten hier aufgestellten Satz betr. die Gleichwertigkeit gewisser Beziehungen zwischen den $\mathfrak{N}(G)$ und $\mathfrak{N}(R)$ einerseits, den $\mathfrak{M}(G)$ und $\mathfrak{M}(R)$ andererseits wird die Klassifikation der halbeinfachen reellen Formen von A_n auf die Fortsetzung der involutorischen Automorphismen von $[G]$ bei linearer Darstellung φ von $[G]$ reduziert. In einer Reihe von weiteren Sätzen wird das damit vorgezeichnete Programm weiter ausgeführt. Für die Einzelheiten muß auf eine ausführliche Publikation gewartet werden.

H. Schwerdtfeger.

Kokoris, L. A.: Power-associative commutative algebras of degree two. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 534—537 (1952).

Es handelt sich um zentrale einfache kommutative potenzassoziative Algebren A unter der Voraussetzung, daß die Charakteristik von A von 2, 3, 5 verschieden ist. Für den Fall, daß A von einem Geraden $n > 2$ ist, hat A. A. Albert (dies. Zbl. 39, 265) gezeigt, daß A eine Jordansche Algebra ist. Verf. behandelt den Fall $n = 2$ und zeigt durch Konstruktion eines Gegenbeispiels, daß A dann keine Jordansche Algebra zu sein braucht.

H. Hasse.

Osima, Masaru: On the Cartan invariants of algebras. Math. J. Okayama Univ. 2, 9—12 (1952).

The author shows, generalizing the Brauer-Nesbitt (this Zbl. 18, 295) theorem on decomposition numbers in the representation theory of finite groups, that if A is an algebra with unit element over an algebraic number field K , which possesses in K all the absolutely irreducible representations, if c_{ij}, c_{kl}^* are the Cartan invariants of A and the residue-algebra of an integrity domain \mathfrak{o} of A modulo a prime ideal \mathfrak{p} in K , and if d_{ik} are the decomposition numbers of \mathfrak{o} for \mathfrak{p} , then $c_{kl}^* = \sum d_{ik} c_{ij} d_{jl}$.

T. Nakayama.

Osima, Masaru: On the Schur relations for the representations of a Frobenius algebra. J. math. Soc. Japan 4, 1—13 (1952).

The author first deals with properties of corresponding bases belonging to an automorphism Φ of a Frobenius algebra A [if $S(a)$, and $R(a)$ are the left- and right-regular representations of A defined by a base (u_i) , a second base (v_i) is a corresponding base if $a^\Phi(u_i)b = (v_i)R(a)S'(b)$, a^Φ being the image of a under Φ]. Then, using a Cartan basis for a Frobenius algebra over an algebraically closed field and the associated regular representations, the Schur relations are obtained as also a few other results.

V. S. Krishnan.

Nakayama, Tadasi: Orthogonality relation for Frobenius- and quasi-Frobenius-algebras. Proc. Amer. math. Soc. 3, 183—195 (1952).

Die Orthogonalitätsrelation der Koeffizienten der regulären Darstellung einer Frobeniusschen Algebra, welche eine Verallgemeinerung der von Brauer und Nesbitt untersuchten Orthogonalität für den Fall der modularen Darstellungen einer Gruppe ist, wurde zum ersten Male vom Verf. untersucht [Nakayama, dies. Zbl. 20, 341; 26, 58]. Ein anderer Beweis dieser Orthogonalität befindet sich in C. Nesbitt und R. Thrall [Ann. of Math., II. Ser. 47, 551—567 (1946)] sowie in

R. Brauer (A. Speiser-Festschrift, Zürich 1945). Von einem etwas anderen Standpunkt aus hat Verf. einen neuen Beweis der Orthogonalität angegeben. Daran anschließend hat er die Orthogonalitätsrelation der Frobeniusschen Algebra auf den Fall der quasi-Frobeniusschen Algebra verallgemeinert. *K. Asano.*

Wolf, Paul: Zur invarianten Kennzeichnung galoisscher Algebren mit vorgegebener Galoisgruppe. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 179—195 (1952).

A new foundation is given to Hasse's (this Zbl. 39, 270) theory of Galois algebras. An (associative) algebra K over a field Ω is called a Galois algebra, with a finite group \mathfrak{G} as its Galois group, when K has \mathfrak{G} as a group of automorphisms, is \mathfrak{G} - Ω -isomorphic to the group algebra G of \mathfrak{G} over Ω , and is, moreover, commutative and semisimple. Hasse's theory gives, under the assumption of semisimplicity and splitting in Ω of G , an invariant characterization, and construction, of Galois algebras with the given Galois group \mathfrak{G} by means of certain matrix factor sets which describe the multiplication between so-called factor bases belonging to irreducible characters of \mathfrak{G} . The present formulation considers endomorphisms of representation modules, in place of matrices, and deals with factor sets consisting of endomorphisms which describe the multiplication between „Faktorgößen“ (i. e. representation modules spanned by factor bases). This frees the theory from somewhat complicated considerations caused by the necessary change of representation classes, among others, and simplifies the theory much. *T. Nakayama.*

Masuda, Katsuhiko: Direct decompositions of Galois algebras. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 122—130 (1952).

Es sei \mathfrak{G} eine endliche Gruppe und Ω ein Körper, dessen Charakteristik nicht in der Ordnung von \mathfrak{G} aufgeht, und in dem jede absolut-irreduzible Darstellung von \mathfrak{G} vertreten ist; letzteres ist bekanntlich sicher der Fall, wenn Ω die m -ten Einheitswurzeln enthält, wo m die maximale Elementordnung von \mathfrak{G} ist. Es sei A_χ ein Vertretersystem dieser Darstellungen, nach den einfachen Charakteren χ von \mathfrak{G} indiziert. Nach Ref. (dies. Zbl. 39, 270) ist dann eine galoissche Algebra K/Ω mit der Gruppe \mathfrak{G} durch ein Matrizenfaktorensystem $C_{\chi,\psi}$ zu den Paaren einfacher Charaktere χ, ψ von \mathfrak{G} gekennzeichnet, und diese Kennzeichnung wird invariant, wenn man von den Vertretern $A_\chi, C_{\chi,\psi}$ zu den Klassen $\mathfrak{A}_\chi, \mathfrak{C}_{\chi,\psi}$ ähnlicher Darstellungen bzw. assoziierten Faktorensysteme übergeht. — Verf. fragt anknüpfend an diese Ergebnisse, wie sich die Irreduzibilität von K/Ω (d. h. daß K ein Körper ist) in den Invarianten $\mathfrak{A}_\chi, \mathfrak{C}_{\chi,\psi}$ von K/Ω ausdrückt. Dazu untersucht er allgemeiner, wie sich eine direkte Zerlegung der galoisschen Algebra K/Ω mit der Gruppe \mathfrak{G} in konjugierte galoissche Algebren L/Ω mit einer Untergruppe \mathfrak{H} in den Invarianten ausdrückt. Er findet, daß jede solche Reduzibilität von K/Ω sich in einer bestimmten diagonalen Zerfällung der Invarianten $\mathfrak{A}_\chi, \mathfrak{C}_{\chi,\psi}$ (bei geeigneten Vertretern) nach der Untergruppe \mathfrak{H} widerspiegelt. — Durch Anwendung dieses Reduzibilitätskriteriums auf diejenige galoissche Algebra K_p/Ω_p , die durch p -adische Grundkörpererweiterung aus einem relativ-galoisschen Zahlkörper K/Ω mit der Gruppe \mathfrak{G} entstehen (wo Ω die m -ten Einheitswurzeln enthält), erhält Verf. eine Kennzeichnung der konjugierten Zerlegungsgruppen zu p für K/Ω durch das Zerfallungsverhalten der Invarianten $\mathfrak{A}_\chi, \mathfrak{C}_{\chi,\psi}$ von K/\mathfrak{G} in Verallgemeinerung des bekannten Zerlegungsgesetzes für Kummer'sche Zahlkörper. *H. Hasse.*

Vandiver, H. S.: On cyclotomy and extensions of Gaussian type quadratic relations involving numbers of solutions of conditional equations in finite fields. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 981—991 (1952).

Sei Ω ein endlicher Körper mit q Elementen. Im Anschluß an ältere Untersuchungen von Mitchell behandelt Verf. bilineare Relationen zwischen den Lösungsanzahlen in Ω von Gleichungen der Form $ax^m + by^n = 1$ mit in $q-1$ aufgehenden Exponenten m, n und von Null verschiedenen Koeffizienten a, b aus Ω . Verf. schreibt seine Formeln, wie schon in früheren Arbeiten, aus Ref. nicht recht verständlichem Grunde in unbeholfener, unschöner Form, indem er von den Darstellungen der a, b, x, y als Potenzen eines erzeugenden Elements der Multiplikationsgruppe Ω^\times ausgeht, und er begibt sich des Vorteils, durch Einführung der Charaktere von Ω^\times als Grundegebenheiten eine klare, durchsichtige Gestalt der Formeln für die Lösungsanzahlen und eine Beleuchtung ihres begrifflichen Hintergrunds zu erzielen. Sein als „Theorem“ hervorgehobenes Hauptresultat stellt sich, wenn man von diesem Vorteil Gebrauch macht, folgendermaßen dar. Für zwei Charaktere χ, ψ von Ω^\times sei $\pi(\chi, \psi) = \sum_{x+y=1} \chi(x) \psi(y)$

die zugeordnete Jacobische Summe. Ist φ ein weiterer Charakter von Ω^\times , so besteht im Falle multiplikativ unabhängiger φ, χ, ψ die Relation $\pi(\varphi\chi, \psi) \pi(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) = \pi(\varphi\psi, \chi) \pi(\varphi^{-1}, \chi^{-1})$, mit leicht angebbaren Modifikationen in den ausgearteten Fällen multiplikativ abhängiger $\varphi,$

χ, ψ . Diese Relation ist aber eine unmittelbare Folge aus der begrifflichen Bedeutung $\pi(\chi, \psi) = \tau(\chi)\tau(\psi)/\tau(\chi\psi)$ der Jacobischen Summen als Faktorensystem der Gaußschen Summen $\tau(\chi)$ zu den Charakteren χ von Ω^\times . — Als Anwendung leitet Verf. Kongruenzrelationen zwischen Binomialkoeffizienten her. H. Hasse.

Inaba, Eizi: Note on relatively complete fields. Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. 3, 5—9 (1952).

k sei ein Körper mit einer nichtarchimedischen Bewertung V . Gilt für die primitiven Polynome mit Koeffizienten aus dem Bewertungsring von V das Lemma von Hensel, so wird k relativ-perfekt genannt. Nach A. Ostrowski (dies. Zbl. 10, 150) ist hiermit gleichwertig: (0) k ist einziger über k algebraisch-separabler Teilkörper der perfekten Hülle von k . — Die vorliegende Arbeit bringt eine Reihe weiterer charakteristischer Eigenschaften relativ-perfekter Körper. ($\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$: \mathcal{A} und \mathcal{B} gleichwertig, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$: \mathcal{A} impliziert \mathcal{B} . Alle Bewertungsbegriffe bezüglich der festen Bewertung V verstanden.) (1) k ist relativ-perfekt $\leftrightarrow V$ hat für jede algebraische Erweiterung über k genau eine Fortsetzungsbewertung. Hierbei ist \rightarrow wohlbekannt; \leftarrow wird unabhängig von (0) bewiesen und (0) aus (1) gefolgert. Aus (1) ergibt sich unmittelbar, daß jede algebraische Erweiterung eines relativ-perfekten Körpers ebenfalls relativ-perfekt ist. Die Beweise der weiteren Sätze stützen sich im wesentlichen auf (0). (2) k ist relativ-perfekt \leftrightarrow für jedes separable und irreduzible Polynom $f(x)$ über k , $\text{Grad } f(x) > 1$, ist die Zahlenmenge $V(f(a))$, $a \in k$, nach oben beschränkt. (Analogon zu den im reellen Zahlkörper bei Absolutbetragbewertung bestehenden Verhältnissen.) — Für ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ über k werde $V(f(x)) = \text{Min}\{V(a_0), \dots, V(a_n)\}$ gesetzt. Eine Umgebung von $f(x)$ ($a \in k$) sei die Menge aller Polynome $g(x)$ über k (Elemente $b - k$) mit $V(g(x) - f(x)) \geq \lambda$ ($V(b - a) \geq \lambda$). (3) k ist relativ-perfekt \leftrightarrow jedes separable Polynom über k , das in k keine Wurzel hat, besitzt eine Umgebung, derart, daß jedes Polynom dieser Umgebung ebenfalls keine Wurzel in k hat. (4) k ist relativ-perfekt \rightarrow jedes Polynom über k , das in k eine einfache Wurzel a hat, besitzt eine Umgebung, derart, daß jedes Polynom dieser Umgebung in einer gewissen Umgebung von a ebenfalls eine einfache Wurzel hat. (4) ergibt als Korollar: k ist relativ-perfekt \rightarrow zu jeder natürlichen Zahl n , Char. $k \nmid n$, gibt es eine reelle Zahl λ , für die alle $a \in k$, $V(a - 1) \geq \lambda$, n -te Potenzen von Elementen aus k sind. W. Gaschütz.

Witt, Ernst: Über einen Satz von Ostrowski. Arch. der Math. 3, 334 (1952).

Für den Satz des Ref. über den Isomorphietypus archimedisch bewerteter vollständiger Körper skizziert Verf. einen neuen Beweis, der sowohl von demjenigen des Ref. als auch von den Beweisen von Mazur und Lorch verschieden ist. A. Ostrowski.

Zahlkörper. Funktionenkörper:

• **Iwasawa, K.:** Theorie der algebraischen Funktionen. Tokyo: Iwanami Shoten 1952. 356 S. 700 Yen. [Japanisch].

Most parts of this book were written about the period of 1947—48. The book consists of five chapters. The first of these chapters deals with discrete non-Archimedean valuation. In the second chapter algebraic theory of algebraic functions are developed, Riemann-Roch theorem is proved by Weil's method, for arbitrary constant fields, and coincidence of the concepts of differentials due to Weil and Hasse are proved for function fields with perfect constant fields. In the third chapter the author treats classical theory of Riemann. Starting from Rado's definition of Riemann surfaces [Acta Szeged 2, 101—121 (1925)] the author proves the well-known existence theorem by Weyl's method employing Hilbert's space (this Zbl. 26, 20), instead of classical Dirichlet's principle. Following Weyl's celebrated „Die Idee der Riemannschen Fläche“ the author then distinguishes the types of Riemann surfaces. In the fourth chapter the author treats the correspondence between the algebraic function fields and closed Riemann surfaces and also the canonical dissection of such surfaces. In the last chapter main theorems of classical function theory are proved: Riemann's inequality, dual aspect of linear space of differentials of first kind and one dimensional homology group of the Riemann surface, Abel's theorem and Jacobi's theorem etc. The book will be a very good guide in this direction for Japanese students. T. Tannaka.

Roquette, Peter: Arithmetische Untersuchung des abelschen Funktionenkörpers, der einem algebraischen Funktionenkörper höheren Geschlechts zugeordnet ist. Mit einem Anhang über eine neue Begründung der Korrespondenztheorie algebraischer Funktionenkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 144—178 (1952).

Ref. (dies. Zbl. 28, 341) hatte die Grundlagen für einen arithmetischen Aufbau der Theorie des Abelschen Funktionenkörpers A zu einem algebraischen Funktionenkörper K vom Transzendenzgrad 1 über einem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper Ω entwickelt. Dort

waren einige Fragen offen geblieben, die sich auf die Invarianz des Punktbegriffes in A/Ω bei den Translationen, Spiegelungen und Multiplikationen beziehen. Diese Lücken hatte inzwischen v. d. Waerden (dies. Zbl. 35, 306) durch Anwendung des Prinzips der relationstreuen Spezialisierung aus der algebraischen Geometrie geschlossen. Verf. hat sich in der vorliegenden Arbeit zum Ziel gesetzt, diese Ergebnisse über den Abelschen Funktionenkörper A/Ω auf dem vom Ref. eingeschlagenen arithmetischen Wege, also durch geeignete Fortbildung der bewertungstheoretischen Methoden zu gewinnen, wie sie der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper A/Ω vom Transzendenzgrad 1 zugrunde liegen. — Verf. definiert (wie Ref.) A/Ω zu K/Ω als das symmetrische Kompositum aus g algebraisch-unabhängigen Exemplaren des Typus K/Ω , wo $g (\geq 1)$ das Geschlecht von K/Ω bedeutet. Er definiert ferner (anders als Ref.) die Punkte von A/Ω als die Klassen äquivalenter Örter von A/Ω . Die Örter von A/Ω sind dabei — und darin besteht die Fortbildung der bewertungstheoretischen Methoden — durch diejenigen allgemeinen Bewertungen (mit nicht-archimedischer Wertgruppe) im Sinne von Krull (dies. Zbl. 4, 98) erklärt, deren Restklassenkörper über Ω algebraisch ist, also hier wegen der Voraussetzung der algebraischen Abgeschlossenheit mit Ω zusammenfällt. Jedem solchen Ort g von A/Ω ist durch die Restklassenabbildung für die Komponentenkörper von A/Ω eindeutig ein ganzer g -gradiger Divisor g von K/Ω zugeordnet. Indem man nur auf die Divisorenklasse G von g in K/Ω achtet, erhält man den Begriff des Punktes von A/Ω . Stellt man diese Punkte G von A/Ω vermöge eines ganzen g -gradigen Bezugsdivisors o von K/Ω durch die Nullklassen $C = G - o$ von K/Ω dar, so liefern die Translationen $\tau_N C = N + C$, Spiegelungen $\sigma_N C = N - C$ und Multiplikationen μC (letztere im Sinne der Korrespondenztheorie für K/Ω) Punktoperatoren $\tau_N, \sigma_N, o, \mu_o$ für A/Ω . Die eingangs erwähnten, vom Ref. nur als Vermutungen ausgesprochenen Tatsachen laufen dann darauf hinaus, daß sich diese Punktoperatoren auch als Korrespondenzen von A/Ω in sich deuten lassen. Die Korrespondenzen von A/Ω in sich werden wie folgt definiert. Sei η ein Meromorphismus ersten Grades von A/Ω , also ein Isomorphismus von A/Ω auf einen Teilkörper $A\eta/\Omega$. Versteht man dann unter $pr_{A/A\eta}(g)$ (Projektion) den durch einen Ort g von A/Ω induzierten Ort des Teilkörpers $A\eta/\Omega$, so liefert die isomorphe Rückabbildung $\eta g = pr_{A/A\eta}(g) \eta^{-1}$ nach A/Ω eine Korrespondenz der Örter g von A/Ω in sich. Indem man nun die Operationen $\tau_N, \sigma_N, o, \mu_o$ von A/Ω auf die Konstantenerweiterung KA/A fortsetzt, erhält man, durch Anwendung auf einen ganzen g -gradigen Divisor \mathfrak{r} dieser Konstantenerweiterung mit dem Koordinatenkörper $\Omega(\mathfrak{r}) = A$, zugeordnete Meromorphismen ersten Grades $\tau_N, \sigma_N, o, \mu_o$ von A/Ω . Die zu beweisende Invarianz des Punktbegriffs läuft dann auf den folgenden Äquivalenzsatz hinaus: Für eine Korrespondenz η von A/Ω in sich vom Typus $\tau_N, \sigma_N, o, \mu_o$ ist eine Äquivalenz $g' \sim \eta g$ zwischen Örtern von A/Ω gleichbedeutend mit der Äquivalenz $g' \sim \eta g$ zwischen den zugeordneten ganzen g -gradigen Divisoren von K/Ω . — Der Beweis dieses Äquivalenzsatzes wird erbracht, indem eine Theorie der Divisorreste für die Konstantenerweiterung KA/A von K/K entwickelt wird, die zu der vom Verf. in seiner Dissertation [erscheint im J. reine angew. Math. 191 (1953)] entwickelten Theorie der Divisorreste für einen Doppelkörper KK'/K' weitgehend analog ist. Es werden die Divisoren \mathfrak{g} von KA/A vermöge eines Ortes g von A/Ω auf Divisoren \mathfrak{g} von K/Ω reduziert. Diese Divisorreste \mathfrak{g} , die beitragsweise durch lokale größte gemeinsame Teilerbildung definiert werden, sind für Hauptdivisoren z von KK/K divisorsgleich zu den Elementresten $z g$. Der Hauptsatz über Divisorreste sagt aus, daß die Abbildung $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} g$ ein Homomorphismus der Divisorgruppe von KA/A auf die von K/Ω ist, bei dem Grad, Teilbarkeit und Äquivalenz erhalten bleiben. — Als Anwendung dieses Hauptsatzes über Divisorreste und des aus ihm gefolgerten Äquivalenzsatzes bestimmt Verf. die algebraische Struktur des einem regulären Multiplikators μ von A/Ω in sich zugeordneten μ -Teilungskörpers $A/A\mu$ sowie die Anzahl der μ -Teilungsklassen von K/Ω . — In einem Anhang gibt Verf. eine Anwendung seiner Theorie der Divisorreste zu einer neuen Begründung der von Deuring (dies. Zbl. 16, 346) entwickelten arithmetischen Theorie der Korrespondenzen von K/Ω in K'/Ω , wobei der Doppelkörper KK'/K' an die Stelle von KA/A tritt. Diese neue Begründung zeichnet sich gegenüber der von Deuring durch größere Einfachheit und Durchsichtigkeit aus; insbesondere hat man es dabei nicht nötig, die ihrer Natur nach in die algebraische Geometrie zugehörige Resultate heranzuziehen. — In einer bei der Korrektur hinzugefügten Fußnote bemerkt Verf., daß sein Beweis der für alles grundlegenden Homomorphieeigenschaft der Divisorreste sich auf Grund von Bemerkungen von v. d. Waerden noch erheblich vereinfachen läßt, worauf er zurückzukommen gedenkt.

H. Hasse.

Deuring, Max: Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper und die Klassenkörper der imaginären quadratischen Zahlkörper. Math. Ann. 124, 393–426 (1952).

In einer vorangegangenen Abhandlung I (dies. Zbl. 33, 197) begründete Verf. den Hauptsatz der „Komplexen Multiplikation“ — Erzeugung der Klassenkörper über einem imaginär-quadratischen Zahlkörper Σ durch singuläre Werte $j(\tau)$ der Modulfunktion und Teilwerte $\tau(\frac{f}{m})$ einer elliptischen Funktion — rein algebraisch aus der Struktur der algebraischen Funktionenkörper vom Geschlecht 1, kurz der elliptischen Funktionenkörper. Dort wurden die Sätze der allgemeinen Klassenkörpertheorie möglichst weitgehend ausgenutzt. In der vorliegenden Arbeit

II wird eine rein algebraische Begründung des Hauptsatzes (siehe die Formulierung im Referat über I) ohne Verwendung der allgemeinen Klassenkörpertheorie gegeben, wie das ja das eigentliche Ziel der unter dem Namen „Komplexe Multiplikation“ bekannten Theorie ist. Verf. erfüllt dabei auch weitgehend den von Ref. bei der Besprechung von I ausgesprochenen Wunsch nach einer in sich geschlossenen, systematisch aufbauenden Darstellung der Theorie. Wesentlich herangezogen werden neben den Grundlagen der arithmetischen Theorie der elliptischen Funktionenkörper lediglich Ergebnisse des Verf. über die Typen der Multiplikatorenringe dieser Körper (dies. Zbl. 25, 20). — Wesentliches Hilfsmittel für die rein algebraische Formulierung des Hauptsatzes und Durchführung des Beweises ist, wie schon in I, der Begriff des verallgemeinerten Meromorphismus eines elliptischen Funktionenkörpers K/k , nämlich eines Isomorphismus von K in sich, bei dem der Konstantenkörper k irgendeinen (nicht notwendig den identischen) Automorphismus erfährt. Während die gewöhnlichen Meromorphismen den Multiplikationen mit Elementen α des Multiplikatorenrings R von K/k entsprechen, sind die verallgemeinerten Meromorphismen den Multiplikationen mit Idealen \mathfrak{a} von R zugeordnet. Die Heranziehung solcher verallgemeinerter „komplexer Multiplikatoren“ tritt ja schon beim klassischen, analytischen Aufbau der Theorie hervor, in Gestalt der Transformationen von j zu Idealbasen und der Bildung von Teilwerten von τ mit Idealenennern. — Es gelingt Verf., den klassenkörpertheoretischen Isomorphismus der Galoisgruppe auf die Klassengruppe sowohl bei der absoluten Klasseneinteilung als auch bei den Strahlklasseneinteilungen in Σ durch verallgemeinerte Meromorphismen eines zugeordneten elliptischen Funktionenkörpers K (der Charakteristik 0) zu deuten, dessen Multiplikatorenring R die Hauptordnung von Σ ist; für die Strahlklasseneinteilungen muß man dabei noch zum Invariantenkörper K_0 von K bei der Einheitengruppe von R übergehen, entsprechend dem Übergang von der Weierstraßschen \wp -Funktion zur Weberschen τ -Funktion in der klassischen Theorie. So ergibt sich jedesmal auf rein algebraischem Wege der Beweis des Isomorphiesatzes der Klassenkörpertheorie, und zwar in der genaueren Gestalt des Artinschen Reziprozitätsgesetzes. Die Untersuchung wird übrigens gleich allgemeiner für eine beliebige Ordnung R von Σ und beliebige Module \mathfrak{m} in R durchgeführt (statt nur die Hauptordnung R und Ideale \mathfrak{m} in R), entsprechend der klassischen Theorie der Ringklassenkörper und der über ihnen gelegenen Strahlklassenkörper zu Σ , was allerdings für das erste Eindringen erschwerende Komplikationen mit sich bringt. Während beim absoluten Klassenkörper keinerlei Einschränkung für das im Zerlegungsgesetz zugrunde gelegte Primideal \mathfrak{p} von Σ nötig ist, kann Verf. bei den Ring- und Strahlklassenkörpern nur eine obere Abschätzung in bestimmter Form für die Trägheitsgruppe zu \mathfrak{p} geben, d. h. es bleiben, wie in der klassischen Theorie endlich viele, nicht-organische Ausnahmeprimideale. Um diese letzte Lücke der im übrigen vollständigen Theorie zu schließen, wäre die Reduktionstheorie von K nach Primdivisoren von k als Theorie von algebraischen Funktionen mit ganzalgebraischem Koeffizientenbereich formal analog zur Theorie der algebraischen Funktionen von zwei Veränderlichen weiter auszubauen. *H. Hasse.*

Moriya, Mikao: Eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Klassenkörpertheorie im Kleinen. Math. J. Okayama Univ. 2, 13—20 (1952).

Hinreichend für die Gültigkeit der Klassenkörpertheorie über einem diskret-bewerteten perfekten Körper k mit dem Restklassenkörper \mathfrak{k} ist nach früheren Arbeiten des Verf. [Proc. Imp. Acad. Tokyo 18, 39—44 (1942), 19, 132—137 (1943), letztere gemeinsam mit Nakayama], daß \mathfrak{k} vollkommen ist und zu jedem natürlichen n genau eine Erweiterung vom Grade n besitzt. Verf. zeigt jetzt, daß diese Bedingung in folgendem Sinne auch notwendig ist: Wenn über jeder endlich-algebraischen separablen Erweiterung von k Umkehrsatz, Isomorphiesatz und Abgrenzungssatz der Klassenkörpertheorie gelten, so ist \mathfrak{k} vollkommen und besitzt zu jedem natürlichen n genau eine Erweiterung vom Grade n . Der Beweis dieser Behauptung geht unter der angegebenen Voraussetzung in Schritten vor: 1. Jede endlich-algebraische separable unverzweigte Erweiterung W von k ist ein zyklischer Klassenkörper über k , und jede Einheit aus k ist Norm für W/k einer Einheit aus W . — 2. \mathfrak{k} ist vollkommen. — 3. Jede endlich algebraische Erweiterung $\mathfrak{K}/\mathfrak{k}$ ist zyklisch, und es existiert dazu eine separable unverzweigte Erweiterung K/k gleichen Grades derart, daß \mathfrak{K} der Restklassenkörper von K ist. — 4. Zu jedem natürlichen n gibt es über \mathfrak{k} höchstens eine Erweiterung vom Grade n . — 5. Ist n Primzahlpotenz, so existiert wirklich eine solche Erweiterung. — 6. Für jedes natürliche n existiert eine solche Erweiterung. *H. Hasse.*

Remak, Robert: Über Größenbeziehungen zwischen Diskriminante und Regulator eines algebraischen Zahlkörpers. Compositio math. 10, 245—285 (1952).

Die vorliegende (nachgelassene) Arbeit schließt sich an eine frühere Arbeit des Verf. an (dies. Zbl. 3, 198), in der er für den Regulator R eines algebraischen Zahlkörpers K eine untere

Abschätzung $R \geq A(n, r)$ durch den Grad n und die Anzahl r der unendlichen Primstellen von K gibt. Bei dieser Abschätzung wächst mit $n \rightarrow \infty$ die Schranke $A(n, r)$ für total-reelle Körper ($r = n$) noch langsam gegen ∞ , während sie für total-imaginäre Körper ($r = \frac{1}{2}n$) schnell gegen 0 fällt. Die Schranke $A(n, r)$ hängt nicht von dem Diskriminantenbetrag d des Körpers K ab. Da R und \sqrt{d} beide Inhalte von Gittergrundmaschen (im Konjugiertenraum bzw. Logarithmenraum von K) sind, liegt es nahe, eine gegenseitige Beschränkung der Größen von R und d zu vermuten. In dieser Hinsicht ist eine obere Abschätzung von R durch d aus einer Arbeit von Landau bekannt [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1918, 478—488 (1918)]. Verf. behandelt hier die umgekehrte Aufgabe, eine obere Abschätzung von d durch R zu finden. Da (anders als bei d) nach der obigen Bemerkung nicht feststeht, ob R mit n gegen ∞ wächst, kann man nur eine Abschätzung der Form $d \leq B(R, n, r)$ erwarten. — Verf. zeigt zunächst, daß eine derartige Abschätzung nicht im Bereich aller algebraischen Zahlkörper K bestehen kann, weil es sein kann, daß alle Einheiten von K bereits in einem echten Teilkörper K_0 liegen (Körper mit starkem Einheitsdefekt). Er schließt zunächst auch diejenigen Körper K aus, die einen echten Teilkörper $K_0 < K$ mit der gleichen unendlichen Primstellenanzahl $r_0 = r$ besitzen, d. h. die nicht total-imaginär mit total-reellem Teilkörper vom Index 2 sind (Körper mit schwachem Einheitsdefekt). Im Bereich dieser Körper K beweist er, durch Anwendung des nach Blichfeldt verschärften Minkowskischen Gitterpunktsatzes im Konjugiertenraum und im Logarithmenraum von K , daß tatsächlich eine Abschätzung der angegebenen Form besteht, nämlich

$$\log d \leq n \log n + \frac{R}{A(n, r)} \cdot \log 2 \cdot \frac{2n(n-1)}{r} g^{(r-2)/2} \quad \text{mit} \quad g = \frac{r+4+\sqrt{r^2+16}}{2}.$$

Dabei ist zunächst $r > 2$ vorausgesetzt. Der Fall $r = 2$ ordnet sich einer anschließend gegebenen Verschärfung der Abschätzung für solche Körper K unter, die höchstens einen imaginär-quadratischen Teilkörper besitzen. Verf. bemerkt schließlich ohne Beweis, daß es ihm gelungen ist, die Gültigkeit der angegebenen Abschätzung auf alle Körper K mit höchstens schwachem Einheitsdefekt auszudehnen.

H. Hasse.

Carlitz, L.: A note on common index divisors. Proc. Amer. math. Soc. 3, 688—692 (1952).

Sei Z_p^n der zyklische Teilkörper n -ten Grades des Körpers der p -ten Einheitswurzeln mit einer Primzahl $p \equiv 1 \pmod n$. Damit eine Primzahl q gemeinsamer außerwesentlicher Diskriminantenteiler (kurz g. a. D. T.) in Z_p^n ist, muß nach dem allgemeinen Kriterium von Hensel notwendig $q < n$ sein, und es reicht hin, daß q für mindestens einen der in Frage kommenden Grade $f|n$ mehr Primteiler in Z_p^n besitzt, als es mod. q irreduzible Polynome f -ten Grades gibt. Für den Fall $n = 3$ kommt demnach nur $q = 2$ in Frage und ist g. a. D. T. genau dann, wenn 2 in Z_p^3 vollzerlegt ist, was nach dem bekannten Zerlegungsgesetz für zyklische kubische Zahlkörper genau dann der Fall ist, wenn $p = a^2 + 27b^2$ mit ganzrationalen a, b ist. — Dieses bereits von Hensel ausgesprochene spezielle Kriterium verallgemeinert Verf. auf einige weitere spezielle n, q , jedesmal unter Anwendung des entsprechenden Zerlegungsgesetzes, nämlich $n = 4$ mit $q = 2, 3$; $n = 6$ mit $q = 2, 3$ (es fehlt $q = 5$); $n = 12$ mit nur $q = 2$; $n = 8$ mit nur $q = 2, 3$.

H. Hasse.

Bergman, Gösta: A generalization of a theorem of Nagell. Ark. Mat. 2, 299—305 (1952).

The coordinates of the curve (1) $y^2 = x^3 - Ax - B$ ($4A^3 - 27B^2 \neq 0$) can be represented by Weierstrass's \wp -function with the invariants $4A$ and $4B$: $x = \wp(u; 4A, 4B)$, $y = \frac{1}{2}\wp'(u; 4A, 4B)$. The author gives the following extension of a theorem of T. Nagell (this Zbl. 11, 147): Let A and B be integers in the algebraic number field Ω , and let (x, y) be an exceptional point in Ω of order $n > 1$ on (1). Then x and y are integers in the following cases: 1. If n is not a power of an odd prime. 2. If n is a power of 3 and the number 3 is not divisible by the eighth power of any prime ideal on Ω . 3. If n is a power of a prime $p > 3$ and p is not divisible by the $(p-1)$ th power of any prime ideal in Ω . If n is a power of the odd prime p , then the number px is always integral. If $n > 2$ and the two numbers $\wp(u) = x$ and $\wp(2u)$ are integral, then y is an integer $\neq 0$, and y^2 divides $4A^3 - 27B^2$. — In the well-known formula $\frac{\sigma(nu)}{[\sigma(u)]^n} = P_n(\wp(u)) = \sum_{i=0}^m \alpha_{n,i} x^{m-i}$, n odd and $m = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$, $\alpha_{n,i}$ are polynomials in A and B with integral rational

coefficients. The proof is based on the lemma that every coefficient of the polynomial $\alpha_{p,i}$ is divisible by the prime $p > 5$ for $i = 2, 3, 4, \dots, \frac{1}{2}(p-3)$.

W. Ljunggren.

Aigner, Alexander: Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern. *Monath. Math.* **56**, 240—252 (1952).

Bekanntlich hat R. Fueter folgendes bewiesen (1913): ist $m = -(3n+1) < 0$ und die Klassenzahl des Körpers $R(\sqrt{m})$ nicht durch 3 teilbar, so ist $x^3 + y^3 = z^3$ in Zahlen aus $R(\sqrt{m})$ unmöglich. Verf. beweist nun ein ganz analoges Resultat: Für $m = 3n+1 > 0$ ist die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ im Körper $R(\sqrt{m})$ unmöglich, wenn der Körper $R(\sqrt{-3m})$ eine nicht durch 3 teilbare Klassenzahl hat. [Die Klassenzahl von $R(\sqrt{m})$ ist nicht durch 3 teilbar, sobald es die von $R(\sqrt{-3m})$ nicht ist.] Die Möglichkeit oder Unmöglichkeit unserer Gleichung gilt immer zugleich in den beiden Körpern $R(\sqrt{m})$ und $R(\sqrt{-3m})$, so daß wir noch zwei weitere Fälle übrig haben: $R(\sqrt{3n+2})$ und $R(\sqrt{-(9n+6)})$, $R(\sqrt{-(3n+2)})$ und $R(\sqrt{9n+6})$. In diesen beiden Fällen macht Verf. eine Bemerkung bezüglich der Gültigkeit unserer Gleichung. Ferner wird gezeigt: Enthält m nur Primfaktoren der Art $3n+1$, nach denen 2 nicht-kubischer Rest ist, so ist $x^3 + y^3 = z^3$ in $R(\sqrt{m})$, $R(\sqrt{-m})$, $R(\sqrt{3m})$, $R(\sqrt{-3m})$ immer unmöglich. Um den Beweis durchzuführen, muß man einen kubischen Körper, nämlich $R(\sqrt[3]{2})$, in Betracht ziehen. Am Ende stehen zwei Tabellen.

Z. Suetuna.

Davenport, H.: Linear forms associated with an algebraic number-field. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **3**, 32—41 (1952).

Bezeichne K einen algebraischen Zahlkörper n -ten Grades mit der Diskriminante d . Man nehme eine Minimalbasis $\omega_1, \dots, \omega_n$ für K , bilde die Form $\xi = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$ und bezeichne mit $\xi_j = \omega_{j1} x_1 + \dots + \omega_{jn} x_n$ ($j = 1, \dots, n$) die Konjugierten, ferner gebe man n Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ an, so daß $\xi_1, \dots, \xi_r, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ reell, $\xi_{r+1}, \dots, \xi_n, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$ nicht-reell, ferner sowohl ξ_{r+j}, ξ_{r+s+j} als auch $\alpha_{r+j}, \alpha_{r+s+j}$ konjugiert komplex sind. Sehr wichtig ist Satz 1: Die Ungleichung $|(\xi_1 - \alpha_1) \dots (\xi_n - \alpha_n)| < C_n |d|^{n/2(n-s)}$ hat eine ganzrationale nichttriviale Lösung x_1, \dots, x_n , wobei C_n eine passende, nur von n abhängige Konstante ist. Wenn alle Konjugierten von K reell sind ($s = 0$), so ist Satz 1 eine Folgerung des bekannten Satzes von Tschebotareff. Für $s > 0$ war nur der viel schwächere Satz von Clarke [*Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **2**, 308—315 (1951)] bekannt, nach dem nämlich $n/2$ [statt $n/2(n-s)$] ein passender Exponent ist, den er für Primzahlen n auf $n/2 - (n-2)/(n-1)$ herabdrücken konnte. Für den Fall $n = 3$, $r = s = 1$ gilt im Satz 1 der Exponent $3/4$. Hierzu zeigte Verf. (dies. Zbl. **37**, 308—309), daß er sich nicht auf $1/2$ herabdrücken läßt. Nach Clarke läßt er sich nicht einmal immer auf $2/3$ herabdrücken. Nach Verf. ist es fraglich, ob im gesagten Fall $3/4$ schon der kleinstmögliche Exponent ist. Ähnlich wie Satz 1 entsteht Satz 2: Ist a ein Ideal und α eine Zahl in K , so gibt es eine Zahl η in K , so daß $\eta = \alpha \pmod{a}$, $|N \eta| < C_n |d|^{n/2(n-s)} N a$. (Ref. bemerkt, daß ein Schreibfehler in diesem Satz nach einer brieflichen Mitteilung des Verf. beseitigt wurde.) Verf. beweist noch mit Hilfe eines von Clarke angewendten Kunstgriffs, daß der Exponent in den Sätzen 1, 2 sich um $(s-1)/[(n-1)(n-s)]$ vermindern läßt, wenn n prim und $s \geq 2$ ist. Die Hauptidee zum Beweis von Satz 1 besteht in der Zuhilfenahme der reellen quadratischen Form $q_\lambda(x) = \lambda_1 |\xi_1|^2 + \dots + \lambda_n |\xi_n|^2$ ($\lambda_{r+j} = \lambda_{r+s+j}$; $j = 1, \dots, s$; $\lambda_1 \dots \lambda_n = 1$), in der die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so gewählt werden, daß unter den n aufeinanderfolgenden Minima nach Minkowski von $q_\lambda(x)$ die letzten $r+s$, „ungefähr“ gleich sind. {Nach Verf. können sie wahrscheinlich sogar gleich gesetzt werden, der Beweis scheint aber schwierig zu sein, ausgenommen einige kleine Werte von n [vgl. Dyson (dies. Zbl. **31**, 154)]}. Die Möglichkeit der gewünschten Wahl der λ_j geschieht mit der Modifikation einer Methode von Siegel, vgl. Davenport [*Acta arithm.* **2**, 262—265 (1937)].

L. Rédei.

Schmetterer, Leopold: Über das Produkt zweier komplexer inhomogener Linearformen. *Monatsh. Math.* **56**, 339—343 (1952).

Verf. zeigt folgenden wichtigen Satz: Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta$ komplexe Zahlen mit $|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$, dann gibt es stets ganze Zahlen x, y aus $R(i\sqrt{7})$ (R Körper der rationalen Zahlen), so daß $|a x + \beta y - \xi| |\gamma x + \delta y - \eta| \leq 4/7$, und diese Schranke

ist scharf. — Damit ist nun der inhomogene Linearformensatz für alle imaginär quadratischen Zahlkörper mit euklidischem Algorithmus, den letzten Körper $R(i \mid 11)$ ausgenommen, bewiesen. Verf. benützt bei seinem Beweis die Methode von O. Per-ron (dies. Zbl. 33, 106). E. Hlawka.

Ankeny, N. C.: Representations of primes by quadratic forms. Amer. J. Math. 74, 913—919 (1952).

Hecke hat mit Hilfe seiner Zetafunktionen mit Größencharakteren bewiesen, daß es unter den Zahlen $q = a^2 + b^2$ mit ganzen rationalen a, b unendlich viele Primzahlen gibt, derartig daß $b^2 = o(q)$, wenn $q \rightarrow \infty$. Verf. beweist unter der Annahme, daß die Kilmannsche Vermutung für alle Zetafunktionen mit Größencharakteren aus dem Gaußschen Zahlkörper $R(i)$ zutrifft, die Verschärfung, daß es unendlich viele Primzahlen q mit $b = O(\log q)$ gibt. Dazu benutzt er folgendes, früher (N. C. Ankeny, dies. Zbl. 46, 50) von ihm mit Hilfe der Ergebnisse von A. Selberg [dies. Zbl. 28, 111 und Skr. Norske Vid. Akad. Oslo I. 1946, no. 3, 62 p. (1946)] über die Nullstellen von Dirichletschen L -Reihen hergeleitetes Lemma: Sei P eine Primzahl aus $R(i)$, P' die Konjugierte zu P , $N(P)$ die Norm des Ideals (P) ; $\exp(i\theta_P) = P P'^{-1}$; n eine natürliche Zahl. Dann ist

$$\sum_{(i)} \cos(n\theta_P) (\log N(P)) e^{-N(P)/T} = O(T^{1/2} \log(n+3))$$

bei $T \rightarrow \infty$. Mit diesem Lemma werden zwei Theoreme hergeleitet, aus denen die Behauptung folgt: I. Sei $|\bar{u}|$ der Betrag von \bar{u} und $\bar{u} = u \pmod{2\pi}$, $-\pi \leq \bar{u} \leq \pi$. $f_1(\theta, T, \lambda)$ sei definiert durch $f_1 = 1$, wenn $|\bar{\lambda} - \theta| \leq (\log T)^{1+\varepsilon} T^{-1/2}$; $f_1 = 0$ sonst; $\varepsilon > 0$, $T > T_0(\varepsilon)$. Für beliebiges λ ist dann

$$\sum_{(i)} f_1(\theta_P, T, \lambda) (\log N(P)) e^{-N(P)/T} = \frac{1}{\pi} T^{1/2} (\log T)^{1+\varepsilon} + o(T^{1/2} (\log T)^{1+\varepsilon}), \quad T \rightarrow \infty.$$

II. Sei $f_2(\theta, T)$ definiert durch $f_2 = 1$, wenn $|\theta| \leq c_1 (\log T/T^{1/2})$, $f_2 = 0$ sonst; c_1 ist eine hinreichend große Konstante. Dann ist

$$\sum_{(i)} f_2(\theta_P, T) (\log N(P)) e^{-N(P)/T} > T^{1/2} \log T, \quad T \rightarrow \infty.$$

Diese Ergebnisse werden auf alle imaginär-quadratischen Zahlkörper über dem Körper der rationalen Zahlen erweitert. B. Schoeneberg.

Dufresnoy, Jacques et Charles Pisot: Sur un problème de M. Siegel relatif à un ensemble fermé d'entiers algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1592—1593 (1952).

Sei $\theta > 1$ eine reelle, ganzzahlgebräusche Zahl, deren Konjugierte — abgesehen von θ selbst — einen absoluten Betrag kleiner als 1 besitzen. Wie R. Salem [Duke math. J. 11, 103—108 (1944)] gezeigt hat, ist die Menge S aller derartigen Zahlen abgeschlossen. Von C. L. Siegel [Duke math. J. 11, 597—602 (1944)] wurden die zwei kleinsten Zahlen der Menge S angegeben und gezeigt, daß sie innerhalb S isolierte Punkte darstellen. Andererseits bewies C. L. Siegel, daß $\theta_0 = (1 + \sqrt{5})/2$ ein nichtisolierter Punkt aus S ist, und knüpfte an diese Ergebnisse die Frage nach dem kleinsten nichtisolierten Punkt aus S . Diese Frage wird von den Verff. dahingehend beantwortet, daß θ_0 bereits der kleinste derartige Punkt ist. Der Beweis wird in dieser kurzen Note nur angedeutet. — Zum Schluß werden zwei weitere Ergebnisse über nichtisolierte Punkte aus S mitgeteilt. F. Kasch.

Prachar, K.: Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy und Ramanujan auf algebraische Zahlkörper. Monatsh. Math. 56, 229—232 (1952).

Suppose K is an algebraic number field and δ is an arbitrary positive real number. If \mathfrak{a} is an integral ideal of K , let $N\mathfrak{a}$ denote the norm of \mathfrak{a} and $\omega(\mathfrak{a})$ the number of distinct prime ideals of K which divide \mathfrak{a} . The author proves that the number of integral ideals \mathfrak{a} such that $N\mathfrak{a} \leq x$ and $|\omega(\mathfrak{a}) - \log \log N\mathfrak{a}| > (\log \log N\mathfrak{a})^{1+\delta}$ is $o(x)$. For the rational number field this was proved by Hardy and Ramanujan [Quart. J. Math. 48, 76—92 (1917)] and later, in a shorter way, by Turán (this Zbl. 10, 104). The proof in the present paper is an adaptation of Turán's proof to the general case. P. T. Bateman.

Zahlentheorie:

● Stewart, B. M.: *Theory of numbers*. New York: The Macmillan Company 1952. XIII, 261 p.

Das Buch ist die Wiedergabe einer kürzeren einsemestrigen Vorlesung über elementare Zahlentheorie, „offered to a mixed group of undergraduate and beginning graduate students“. Das pädagogische Ziel ist nicht zuletzt eine Einführung in typische mathematische Denk- und Schlußweisen. So finden sich neben den üblichen Bestandteilen einer elementaren Zahlentheorie, etwa Satz machend mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz, leicht verständliche Ausführungen über den axiomatischen Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen nach Peano, Konstruktion der rationalen Zahlen, Theorie der reellen Zahlen (mittels Fundamentalfolgen, absichtlich nur skizzenhaft). Jedem Abschnitt ist eine Fülle von Übungsaufgaben beigefügt.

M. Eichler.

Ankeny, Nesmith C.: *The insolubility of sets of diophantine equations in the rational numbers*. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 880—884 (1952).

Let $M(T, a_1, a_2, \dots, a_n) = M(T)$ denote the set of all positive integers $m < T$ for which the equation (1) $a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \dots + a_n x_n^m = 0$ has a non-trivial solution (not all of the x 's are zero) in the rational integers. Assuming (2) $\sum_{j=1}^n a_j \varepsilon_j \neq 0$,

where $\varepsilon_j = \pm 1$ or 0, then the following two theorems are stated: (I) If a_1, a_2, \dots, a_n satisfies (2), $M(T) = o(T)$, as $T \rightarrow \infty$. (II) The density of integers $m < T$ for which the equation $x_1^m + x_2^m + x_3^m = 0$ has a rational solution and for which $(x_1 x_2 x_3, m) = 1$ is $o(T)$ as $T \rightarrow \infty$. These results from the coefficients a_j contained in the ground field can be extended to similar results about a_j contained in any algebraic number field F , changing the condition (2) to $\sum_{j=1}^n a_j \lambda_j \neq 0$, where $\lambda_j = 0$

or any root of unity contained in F . The complete proof is not given. There is a sketch of the proofs of the main supporting lemmas, and in conclusion, the deduction of I and II from these. The lemmas are both from the algebraic and the analytic number theory. Use is made of the Brun-Selberg sieve methods and certain „probability“ theorems regarding the density of numbers having a fixed number of prime factors.

W. Ljunggren.

Stolt, Bengt: *On the Diophantine equation $u^2 - Dv^2 = \pm 4N$* . II. Ark. Mat. 2, 251—268 (1952).

The author continues his investigations in an earlier paper concerning the equation mentioned in the title (this Zbl. 47, 40). The maximum number of classes corresponding to an arbitrarily given N is determined, and it is proved that a given equation has at most one ambiguous class.

W. Ljunggren.

Kanold, Hans-Joachim: *Über ein spezielles System von zwei diophantischen Gleichungen*. J. reine angew. Math. 189, 243—245 (1952).

Die zwei Diophantischen Gleichungen $\sum_{v=0}^{p-1} p_i^v a_i = p p_j^{b_j}$ ($i, j = 1, 2; i \neq j$), wobei $p, p_i (> 0)$ Primzahlen, a_i, b_i natürliche Zahlen sind, haben nur die eine simultane Lösung: $1 + 3^2 = 2 \cdot 5, 1 + 5 = 2 \cdot 3$. Der Beweis ist elementar, aber mühsam, und stützt sich auf eine frühere Arbeit über Kreisteilungspolynome des Verf. (dies. Zbl. 35, 311). Als Anwendung stellt Verf. die Fortsetzung seiner früheren Resultate über ungerade vollkommene Zahlen in Aussicht.

L. Rédei.

Selmer, Ernst S.: *Homogeneous diophantine equations*. 11. Skand. Mat.-Kongr., Trondheim 1949, 296—300 (1952).

Ankündigung des inzwischen erschienenen Resultates (dies. Zbl. 42, 269), daß es im Kleinen überall lösbar, aber im Großen unlösbar Diophantische Gleichungen der Gestalt $a x^3 + b y^3 + c z^3 = 0$ gibt.

H. Reichardt.

Kanold, Hans-Joachim: Einige Bemerkungen über befreundete Zahlen. Arch. der Math. **3**, 282—284 (1952).

Let $m = 2^n p^\alpha$, $m' = p_1^{\alpha_1}$ or $p_1^{\alpha_1} q_1^{\beta_1}$, where p, p_1 and q_1 are odd primes, $p_1 < q_1$ and n, α, α_1 and β_1 are positive integers. It is proved that in both cases m and m' are not amicable numbers. — The proof, which is elementary, runs as follows. From $m + m' = \sigma(m) = \sigma(m')$ we get $(\sigma(m)/m - 1)(\sigma(m')/m' - 1) = 1$. On the other hand the prime decomposition gives $\sigma(m)/m < 2p/(p-1) \leq 3$ and for $m' = p_1^{\alpha_1}$ is $\sigma(m')/m' < p_1/(p_1-1) \leq 3/2$. This gives a contradiction. If $m' = p_1^{\alpha_1} q_1^{\beta_1}$ then in a similar way is concluded to $p_1 = 3$, $q_1 = 5$, $p = 5, 7, 11, 13$, or $p_1 = 3$, $q_1 = 7$, $p = 5$ or $p = p_1 = 3$. These remaining cases are settled with congruences found from the basic relation.

W. Verdenius.

Duparc, H. J. A.: On Carmichael numbers. Simon Stevin **29**, 21—24 (1952).

n heißt Carmichael-Zahl, wenn n keine Primzahl ist und $c^{n-1} \equiv 1 \pmod n$ für alle c mit $(c, n) = 1$ gilt. Jede Carmichael-Zahl ist bekanntlich ungerade, quadratfrei und besitzt mindestens drei Primteiler. Verf. beweist folgende Verallgemeinerung eines Satzes von Beeger (dies. Zbl. **37**, 166): Es existiert nur eine endliche Anzahl von Carmichael-Zahlen mit je r Primfaktoren, deren $r-2$ kleinste gegeben sind. Am Schluß werden 4 neue Carmichael-Zahlen mit je 4 Primfaktoren angegeben.

H.-J. Kanold.

Nagell, Trygve: Sur un théorème d'Axel Thue. Ark. mat. **1**, 489—496 (1952).

Der gemeinte Satz von Thue besagt, daß für jede Primzahl p die Zahlen $\pm x/y$ ($x, y = 1, 2, \dots < \sqrt{p}$) alle primen Restklassen mod p repräsentieren. Das gilt auch unter der Einschränkung $(x, y) = 1$. Dann wird jede Klasse höchstens zweimal repräsentiert. Und zwar kommt außer bei $p = 3, 7, 23, 47$ mindestens eine zweifache Repräsentation vor, was der Lösbarkeit von $p = x y_1 + x_1 y$ ($x, y, x_1, y_1 = 1, 2, \dots < \sqrt{p}$) gleichkommt. [Die Anzahl aller Lösungen ist stets $-p-1+4 \sum_{k=1}^{\sqrt{p}} \varphi(k)$.]

Als Hauptresultat ergibt sich dann leicht der wichtige Satz: Ist $p \equiv 7 \pmod 8$, so gibt es eine ungerade Primzahl $q < \sqrt{p}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$, ausgenommen $p = 7, 23$.

Früher bewies Verf. (dies. Zbl. **36**, 302) den gleichen Satz für $p \equiv 1 \pmod 8$ (ohne Ausnahme!) und zwei ähnliche, aber etwas schwächere Sätze für $p \equiv 3 \pmod 8$ und $p \equiv 5 \pmod 8$, wobei nämlich q von oben durch $2\sqrt{p}+1$ bzw. $\sqrt{2p}$ eingeschränkt wird. (Vgl. Rédei, dies. Zbl. **35**, 26.) Ref. bemerkt, daß er gleichzeitig eine Arbeit für die Acta Sci. math. in Druck schickt, in der bewiesen wird, daß es für alle ungeraden $p (\neq 3, 5, 7, 11, 13, 23, 59, 109, 131)$ eine ungerade Primzahl $q < \sqrt{p}$ mit $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$ gibt. (S. auch: A. Brauer, dies. Zbl. **1**, 57.) L. Rédei.

Reissig, Rolf: Die pandiagonalen Quadrate vierter Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Kl. **100**, Nr. 6, 54 S. (1952).

This paper follows closely that of Schnee (this Zbl. **42**, 277). A pandiagonal $n \times n$ square is one in which the elements are distinct integers, the sum of the elements in each row, column or diagonal being the same ($= s$). The author discusses the number of linearly independent elements and also the permutations of the elements which take a pandiagonal square into a pandiagonal square. In particular, every 4×4 square is determined by $a_{11}, a_{21}, a_{41}, a_{14}$, which are linearly independent; and is equivalent to precisely one in which $a_{11} = 1$ is the least element and $a_{12} < a_{21} < a_{41} < a_{14}$. The number of such squares with given s is thus the number of solutions of a set of linear inequalities. This is found in an elementary but complicated way as in Schnee (loc. cit.).

J. W. S. Cassels.

Kyhl, H.: Einige Bemerkungen über Primzahlen. Mat. Tidsskr. A 1952, 79—81 (1952) [Dänisch].

Wright, E. M.: Functional inequalities in the elementary theory of primes. Duke math. J. 19, 695—704 (1952).

Es wird folgendes gezeigt: Es seien $f(x)$, $\chi(x) > 0$ reelle Funktionen, beschränkt und integrierbar in jedem endlichen Intervall $1 < a \leq x \leq X$, $\chi(x) = o(x)$ für $x \rightarrow \infty$. Weiter gelte mit den Konstanten $A_1 > 0$, $A_2 \geq 0$, $A_3 > 0$, $\delta > 0$

$|f(x_2) - f(x_1)| \leq A_1 |x_2 - x_1| + A_2 x_1^{-\delta}$, $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(y) dy \right| \leq A_3$, $xf(x) \leq \int_a^x |f(y)| dy + \chi(x)$ für alle x , $x_1, x_2 \geq a$. — Ist weiter $\varphi(x)$ positiv und monoton abnehmend $\rightarrow 0$ und $\varphi(x) (\log x)^{1/2}$ nicht abnehmend, $\chi(x) = O(x\varphi^3)$, dann ist $f(x) = O(\varphi)$. Dieser Satz kann nicht mehr verschärft werden. Eine Funktion $\varphi(x)$ kann stets bei gegebenem χ bestimmt werden, z. B. $\varphi(x) = N(x) (\log x)^{-1/2}$ wo

$$N(x) = \sup_{a \leq y \leq x} M(y) (\log y)^{1/2}, \quad M(x) = \sup_{y \geq x} (\chi(y)/y)^{1/3}.$$

Die Voraussetzungen über $f(x)$ sind für $f(x) = e^{-x} \vartheta(e^x) - 1$, $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ und $\chi(x) = O(\log \log x)$ erfüllt und liefern über den Primzahlsatz hinaus $\vartheta(X) = X + O(X (\log \log X)^{-1/2})$, aber nicht mehr. Nach Mitteilung von Erdős liefert die Erdős-Selbergsche Methode $\vartheta(X) = X + O(X (\log X)^{-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$). E. Hlawka.

Sierpiński, Waclaw: Sur une formule donnant tous les nombres premiers. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1078—1079 (1952).

Verf. bemerkt: Falls p_n die n -te Primzahl und $a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot 10^{-2^n}$ ist, so gilt:

$$p_n = [10^{2^n} a] - 10^{2^{n-1}} [10^{2^{n-1}} a] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wo $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl ist.

H. D. Kloosterman.

Ore, Oystein: On the selection of subsequences. Proc. Amer. math. Soc. 3, 706—712 (1952).

Es sei $A = \{a_i\}$ eine Folge von positiven (pos.) Zahlen mit $a_i \rightarrow \infty$ (für $i \rightarrow \infty$) und $f(x)$ für $x > M$ (> 0) stetig und monoton wachsend. Ferner sei für jedes $a_i > M$ ein anderes $a_j > a_i$ im Intervall $(f(a_i - \delta_i), f(a_i + \varepsilon_i))$ ($\delta_i \geq 0, \varepsilon_i > 0$) enthalten. Dann läßt sich eine monoton wachsende Teilfolge $B = \{b_i\}$ so auswählen, daß $f(b_i - \delta_i) < b_{i+1} < f(b_i + \varepsilon_i)$ gilt, wobei δ_i und ε_i die oben eingeführten Konstanten für b_i bedeuten. Verf. nennt $f(x)$ eine Selektionsfunktion (selection function), wenn nun überdies $f(b_i - \delta_i) < b_{i+1} - \delta_{i+1} \leq b_{i+1} < b_{i+1} + \varepsilon_{i+1} < f(b_i + \varepsilon_i)$ gilt. Ist $f_i(x)$ die i -te Iteration dieser Funktion, so läßt sich beweisen, daß es eine Teilfolge $B = \{b_i\}$ und eine pos. Konstante K derart gibt, daß $b_i - \delta_i < f_i(K) < b_i + \varepsilon_i$ ist. Ist also A eine Folge von pos. ganzen Zahlen und $f(x)$ eine Selektionsfunktion mit $\delta_i = 0, \varepsilon_i < 1$ für alle i , so beweist Verf., daß es eine pos. Konstante derart gibt, daß $b_i = [f_i(K)]$ eine Teilfolge von A ist. Hieraus ergibt sich das Millssche Resultat: es gibt eine pos. Konstante K derart, daß $p_i = [K^{3^i}]$ immer eine Primzahl ist (W. H. Mills, dies. Zbl. 33, 163). Verf. zeigt sogar $p_i - K^{3^i} \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Wenn nun A eine Folge von wachsenden natürlichen Zahlen, für welche die Dichtigkeit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n} = p > 0$ ist, wobei $v(n)$ die Anzahl der Glieder von $A \leq n$ bedeutet, dann ist $f(x) = a^x$ ($a > 1$) eine Selektionsfunktion mit $\delta_i = 0, \varepsilon_i = \varepsilon < 1$ für alle i . Es gibt also eine pos. Konstante K derart, daß die Folge $\{b_i\}$ mit

$$b_1 = [2^K], \quad b_2 = [2^{2^K}], \quad b_3 = [2^{2^{2^K}}], \dots$$

eine Teilfolge von A ist. Um mit von Mises das Kollektiv zu definieren, muß man annehmen, daß ein Kollektiv eine solche Folge mit bestimmten Merkmalen sei, deren relative Häufigkeiten durch „Stellenauswahl“ unverändert bleiben. Eine Folge $\{a_i\}$ ist aber erst dann definiert, wenn a_i für alle i bestimmt wird. Wird also eine Folge durch ein Gesetz gegeben, dann soll ja deren Regellosigkeit ausgeschlossen sein. Durch das obige Resultat tritt diese Schwierigkeit der von Misesschen Theorie deutlich zutage.

Bellman, Richard and Harold N. Shapiro: On the normal order of arithmetic functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 884—886 (1952).

Verff. skizzieren eine Methode, um die normale Ordnung (n. O.) von

Z. Suetuna.

$F(x, y) = \sum_{x \leq n \leq x+y} f(n)$ für zahlentheoretische Funktionen $f(n)$ zu bestimmen.

Dabei sei $y = y(x)$ eine Funktion, welche für $x \rightarrow \infty$ gegen $\rightarrow \infty$ strebt. Die normale Ordnung $g(x)$ von $F(x, y)$ ist dadurch definiert, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$(1 - \varepsilon) g(x) \leq F(x, y) \leq (1 + \varepsilon) g(x)$$

für alle $x \leq z$, außer für eine Menge der Größenordnung $o(z)$ für $z \rightarrow \infty$. Es werden folgende Resultate angekündigt:

$\sum_{x \leq n \leq x+y} r(n)$ hat die n. O. $4y/\pi^2$, wenn $y = (\log x)^a$, $\sum_{x \leq n \leq x+y} d(n)$ die n. O. $\log x$, wenn $y = (\log x)^{1+a}$. Weiter be-

schäftigen sich die Verff. mit der Verteilung der quadratfreien Zahlen und geben folgenden interessanten Satz an: Die Anzahl der $n \leq z$, so daß das Intervall $(n, n + y(n))$ keine quadratfreien Zahlen enthält, ist $o(z)$ für $z \rightarrow \infty$;

wenn für ein λ , $0 < \lambda < 1$, $y(x)/y(\lambda x)$ beschränkt ist, so ist $\frac{6}{\pi^2} y$ die n. O. von

$$\sum_{x \leq n \leq x+y} \mu^2(n). \quad E. Hlawka.$$

Fawaz, A. Y.: On an unsolved problem in the analytic theory of numbers. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 282—295 (1952).

Für die summatorische Funktion $L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n)$ der Koeffizienten in der

Dirichletschen Reihe für $\zeta(2s)/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) n^{-s}$ hat Pólya [Jahresber. D. M. V.

28, 31—40 (1919)] vermutet, daß $L(x) \leq 0$ für $x \geq 2$, während Ingham [Amer. J. Math. 64, 313—9 (1942)] in Gegensatz dazu vermutet, daß \limsup bzw. $\liminf x^{-1/2} L(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gleich $+\infty$, bzw. $-\infty$ ist. Früher hat Verf. (dies. Zbl. 42, 273) die Differenz $I(x) = L_0(x) - x^{1/2}(\zeta(\frac{1}{2}))^{-1} - \sum_{\rho} \varrho^{-1} \zeta(2\rho) (\zeta'(\rho))^{-1} x^{\rho}$

[wo $L_0(x) = \frac{1}{2}(L(x+0) + L(x-0))$ und ρ die komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ durchläuft] durch eine unendliche Reihe dargestellt. Jetzt beweist er: A. Falls die Zahlen $a(\rho) = \varrho^{-1} \zeta(2\rho) (\zeta'(\rho))^{-1}$ nicht beschränkt sind, so ist

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1/2} L(x) = -\infty, \quad \liminf_{x \rightarrow 0+} x^{-1/2} I(x) = -\infty.$$

Falls die $a(\rho)$ dagegen beschränkt sind, so gilt für beliebiges positives x_0 :

$$\begin{aligned} \liminf x^{-1/2} L(x) &\leq x_0^{-1/2} \{L_0(x_0) - I(x_0)\} \leq \limsup x^{-1/2} L(x) \quad (x \rightarrow \infty); \\ \liminf x^{-1/2} I(x) &\leq x_0^{-1/2} \{I(x_0) - L_0(x_0)\} \leq \limsup x^{-1/2} I(x) \quad (x \rightarrow 0+). \end{aligned}$$

B. Es ist

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} x^{-1/2} L(x) = - \limsup_{x \rightarrow 0+} x^{-1/2} I(x).$$

H. D. Kloosterman.

Dragonette, Leila A.: Some asymptotic formulae for the mock theta series of Ramanujan. Trans. Amer. math. Soc. 72, 474—500 (1952).

Gegenstand der Untersuchung ist das von Ramanujan eingeführte und von Watson ergänzte System der sieben „mock theta“-Funktionen 3. Ordnung. Es war von Interesse, die Tragweite der Hardy-Littlewoodschen Methode an diesen Funktionen zu erproben, die sich ähnlich verhalten, wie die erzeugende Funktion der Partitionenzahl:

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1 - q)^2 (1 - q^2)^2 \dots (1 - q^n)^2}.$$

Zwei der „mock theta“-Funktionen lauten

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1 + q)^2 (1 + q^2)^2 \dots (1 + q^n)^2}, \quad \omega(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n(n+1)}}{(1 - q)^2 (1 - q^2)^2 \dots (1 - q^{2n+1})^2};$$

die übrigen sind von ähnlicher Bauart. Sie sind durch gewisse Relationen miteinander und mit den Thetafunktionen verknüpft (s. Watson, dies. Zbl. 13, 115). Die Anwendbarkeit der Hardy-Littlewoodschen Methode beruht auf gewissen Transformationsformeln, die eine asymptotische Abschätzung der Funktionen in der Nähe der wesentlichen Singularitäten $e^{2\pi i h/k}$ (h, k ganz

und teilerfremd, $k > 0$) ermöglichen. Es wird für $f(q)$ folgende Transformationsformel bewiesen:

$$f(e^{\pi i(h+iz)/k}) = \begin{cases} \epsilon_{hk} z^{-1/2} e^{-\pi z/24k + \pi z^{-1}/24k} f\left(\pm e^{\pi i(h'+iz^{-1})/k}\right) + O(k \log k) & \text{für } 2 \nmid h, \\ \eta_{hk} 2^{3/2} z^{-1/2} e^{-\pi z/24k - 4\pi z^{-1}/3k} \omega(e^{2\pi i(h'+iz^{-1})/k}) + O(k \log k) & \text{für } 2 \mid h, \end{cases}$$

wobei ϵ_{hk} und η_{hk} Zahlen vom Betrag 1 sind, $h h' + 1 \equiv O(k)$ und $\Re z > 0$, $|\Im z| \leq 1/(k+1)$ angenommen ist. Für festes k und $z \rightarrow 0 + 0$ folgt nun

$$f(e^{\pi i(h+iz)/k}) - \epsilon_{hk} z^{-1/2} e^{-\pi z/24k + \pi z^{-1}/24k} = O(1)$$

in Analogie zu

$$P(e^{2\pi i(h+iz)/k}) - \omega_{hk} z^{1/2} e^{(\pi/12k)(1/z-z)} = o(1),$$

wobei ω_{hk} eine Einheitswurzel bezeichnet. Mit Hilfe der Hardy-Littlewoodschen Methode wird nun eine Vermutung von Ramanujan bewiesen: Die Entwicklungskoeffizienten von $f(q) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} A(n) q^n$ genügen der asymptotischen Formel

$$A(n) = (-1)^{n-1} \frac{e^{\pi((n-1/24)/6)^{1/2}}}{2(n-1/24)^{1/2}} + O\left(\frac{e^{(\pi/2)((n-1/24)/6)^{1/2}}}{(n-1/24)^{1/2}}\right).$$

Als Hauptglied erscheint hier der Beitrag, der von der „stärksten“ Singularität der Funktion $f(q)$ in $q = -1$ herrührt. Berücksichtigt man auch noch die Beiträge von den übrigen Singularitäten in angemessener Weise, so ergibt sich die schärfere Abschätzung

$$A(n) = \sum_{0 < k \leq \sqrt{n}} \lambda(k) e^{(\pi/k)((n-1/24)/6)^{1/2}} + O(\sqrt{n} \log n),$$

wobei $\lambda(k)$ gewisse Einheitswurzelsummen bezeichnen. Numerische Rechnungen zeigen, daß die Differenz von $A(n)$ und der angegebenen Summe von $[\sqrt{n}]$ Gliedern für spezielle Werte $n \leq 200$ überraschend klein ist. Die exakten Werte von $A(n)$ können mit Hilfe von Rekursionsformeln einfach berechnet werden. Für die übrigen „mock theta“-Funktionen 3. Ordnung werden analoge Resultate angegeben. Ob die Hardy-Littlewoodsche Methode auf die „mock theta“-Funktionen 5. und 7. Ordnung mit gleichem Erfolg angewendet werden kann, ist nicht ohne weiteres zu übersehen, da keine Transformationsformeln bekannt sind, mit deren Hilfe das Verhalten der Funktionen in den Singularitäten $e^{2\pi i h/k}$ bestimmt werden kann.

H. Maaß.

Šapiro-Pjateckij, I. I.: Über eine Variante des Waring-Goldbachschen Problems.

Mat. Sbornik, n. Ser. **30** (72), 105–120 (1952) [Russisch].

Let C be a positive number but not an integer. Let $H(C)$ be the least integer r such that for any $\varepsilon > 0$, there exists $N_0(\varepsilon)$ and for any real number $N > N_0$ the inequality $|p_1^C + \dots + p_r^C - N| < \varepsilon$ has prime solutions in p_1, \dots, p_r . The author proved that for $C \geq 2$,

$$H(C) = \alpha \left(\left[\frac{\alpha \log(C+2) + \log \log(C+2)}{-\log(1-1/C)} \right] + \left[\frac{C}{\alpha} \right] \right) + 3$$

which is $\sim 4C \log C$ as $C \rightarrow \infty$ and where α is an absolute constant. (For $1 < C < \frac{3}{2}$, he proved $H(C) \leq 5$). The author proved also that let $J_{N,\varepsilon}$ be the number of system

of primes satisfying $|p_1 + p_2 + p_3^C - N| < \varepsilon$, then $J_{N,\varepsilon} \sim \frac{\alpha \varepsilon C^2}{(1+C)} N^{1+1/C} / \log^3 N$

as $N \rightarrow \infty$, and that the number of integers, not exceeding x , which are not representable by $p_1 + [p_2^C]$ is $O(x/\log^M x)$ where M is an arbitrary fixed integer. We can compare these results with those for integral C (Hua, this Zbl. **20**, 105; **18**, 294; **41**, 369). The method is an interesting refinement of that due to Segal but it is too long to be reviewed here.

L.-K. Hua.

Auluck, F. C. and C. B. Haselgrove: On Ingham's Tauberian theorem for partitions. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 566–570 (1952).

Sei $P(u)$ die Anzahl der Lösungen von

$$n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + \dots + n_r \lambda_r < u$$

in ganzen Zahlen $n_i \geq 0$. Sei 1. $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, 2. $N(u) = \sum_{\lambda_i \leq u} 1 =$

$B u^\beta + R(u)$, $\beta > 0$, $B > 0$, 3. $\int_0^u \left(\frac{R(v)}{v} \right) dv = a \log u + b + o(1)$, 4. $h > 0$

so beschaffen, daß $P_h(u) = h^{-1}(P(u+h) - P(u))$ monoton mit u wächst. Dann

hat Ingham gezeigt

$$(*) \quad P_h(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} e^b M^{-(a-1/2)\alpha} u^{(a-1/2)(1-\alpha)-1/2} e^{\alpha^{-1}(Mu)^\alpha},$$

$\alpha = \frac{\beta}{(\beta+1)}$, $M = \{B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1)\}^{1/\beta}$. Verff. zeigen die Gültigkeit von (*) unter folgenden Bedingungen:

$$1'. \quad 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad 2., \quad 3'. \quad \int_0^u \left(1 - \frac{v}{u}\right)^{k-1} \frac{R(v)}{v} dv = A_k \log u + B_k + o(1),$$

und 4'. $\lambda_i = k_i \lambda_0$, $k_i > 0$, ganz; $h > 0$ ist Vielfaches des größten gemeinsamen Teilers aller k_i ; oder 4''. $h > 0$, beliebig, λ_i nicht ganzzahlige Vielfache desselben λ_0 .

K. Prachar.

Barnes, E. S.: The minimum of a bilinear form. Acta math. 88, 253—277 (1952).

Während sich I. Schur [S.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. 1913, 212—231] auf symmetrische Bilinearformen, Davenport und Heilbronn (dies. Zbl. 29, 111) und Barnes (dies. Zbl. 44, 41) auf zerlegbare Bilinearformen beschränkten, werden nun beliebige Bilinearformen

$$B(x, y, z, t) = \alpha xz + \beta xt + \gamma yz + \delta yt$$

betrachtet. Assoziiert damit werde die quadratische Form $Q(x, y) = B(x, y, x, y)$ mit der Diskriminante $D = \theta^2 - 4\Delta$, wo $\theta = |\beta - \gamma|$ und $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$. Die einzige Einschränkung sei $D \neq 0$, und falls $D > 0$, so sei $Q(x, y)$ keine Nullform. Es sei $M(B)$ die untere Grenze von $B(x, y, z, t)$, erstreckt über alle ganzen Zahlen x, y, z, t , die der Bedingung $|xt - yz| = 1$ genügen. Das Problem ist nun, $M(B)$ möglichst gut abzuschätzen. Verf. zeigt: Wenn $D > 0$, so ist $M(B) \leq \sqrt{D}/2\sqrt{5}$ und, wenn $D < 0$, so ist $M(B) \leq \sqrt{|D|}/2\sqrt{3}$, wobei die Konstanten bestmöglich sind. Der Beweis ist nicht schwer und beruht auf einem Lemma über die assoziierte quadratische Form $Q(x, y)$. Bezeichnet $\omega = \theta/\sqrt{|D|}$, so ist $\omega = 0$ für symmetrische, $\omega = 1$ für zerlegbare Bilinearformen und umgekehrt. Während obige Abschätzung von $M(B)$ nur von D , aber nicht von ω abhängt, kann man sich auch die Aufgabe stellen, möglichst gute Abschätzungen von $M(B)$ zu finden, die von ω und D abhängen. Verf. beschränkt sich auf den Fall $D > 0$ und das Intervall $0 \leq \omega \leq 1,24$ und findet: $M(B) \leq \frac{1}{2}\sqrt{D} \cdot \chi(\omega)$. Dabei ist $\chi(\omega)$ eine von ω und konstanten Zahlen κ_i und τ_i ($i = 1, \dots, 8$) abhängige Funktion. Für jedes ω aus dem obigen Intervall gibt es eine Bilinearform B , für die das Gleichheitszeichen gilt. Diese Abschätzung umfaßt die bisher gefundenen als Spezialfälle ($\omega = 0$ und $\omega = 1$). Der Nachweis ist außerordentlich mühevoll und beruht auf der Reduktions- und Äquivalenztheorie der indefiniten binären quadratischen Formen und den durch sie dargestellten Zahlen. N. Hofreiter.

Barnes, E. S. and H. P. F. Swinnerton-Dyer: The inhomogeneous minima of binary quadratic forms. II. Acta math. 88, 279—316 (1952).

The methods of the first part (this Zbl. 46, 276) are extended to show the existence of a denumerable set of successive inhomogeneous minima for certain quadratic forms. Such sets have been found previously by Davenport [Nederl. Akad. Wet., Proc. 50, 378—389, 484—491, 741—749, 909—917 (1946)] and by Varnavides using Davenport's methods (this Zbl. 29, 203; 30, 19) but the present technique is more perspicuous and, apparently, stronger. If $f(x, y)$ is the given form and K a suitably chosen constant, the points (x_0, y_0) with $\text{Min } |f(x, y)| \geq K$ [$x \equiv x_0$, $y \equiv y_0 \pmod{1}$] are first shown to lie modulo 1 in one of a certain set of regions $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_h$. But if T is any automorph of the form, then $T(x_0, y_0)$ must also lie in one of $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_h$. By taking for T all the powers of the fundamental automorph and considering the various possibilities for $T(x_0, y_0)$ it is shown that (x_0, y_0) must have one of a certain set of expansions in powers of the fundamental unit of the relevant quadratic field. Finally, the precise minima of these (x_0, y_0) can now be computed in terms of this expansion. In particular, if $f = x^2 - 11y^2$ there is a denumerable set of minima $M_1 > M_2 > \dots$ tending to a limit M_∞ but there are indenumerably many points with minimum $> M_\infty - \varepsilon$. The form $x^2 + 3xy - y^2$ has a much more complicated sequence of minima: there is a number M^{IV} such that the set of points with minimum $> M^{\text{IV}} - \varepsilon$ is indenumerable and the set of points with minimum $> M^{\text{IV}}$ is denumerable; but the set of minima $> M^{\text{IV}}$ has infinitely many limit points. — The authors also give some general theorems. In particular, if f has rational coefficients and first minimum M_1 then there is a rational point with minimum $> M_1 - \varepsilon$ for any $\varepsilon > 0$. They conclude by a general discussion on the significance of their results and the applicability of their method to a general norm-form.

J. W. S. Cassels.

Ramanathan, K. G.: Abelian quadratic forms. Canadian J. Math. 4, 352—368 (1952).

Eine reelle quadratische Form (q. F.)

$$x' S x = \sum_{k,l=1}^{2n} s_{kl} x_k x_l$$

mit der Matrix $(s_{kl}) = S = S'$ wird als abelsch bezeichnet, wenn für einen reellen Parameter $\kappa \neq 0$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, wobei E die n -reihige Einheitsmatrix bedeutet, die Bedingung $SJS = \kappa J$ erfüllt ist. Abelsche q. F. wurden zuerst von C. Hermite eingeführt (Oeuvres I, Paris 1905, S. 444—478). Für $n = 1$ ist jede binäre q. F. abelsch, wobei κ die Determinante der q. F. ist.

Allgemein ist die q. F. mit der Matrix $S = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ bei n -reihigen A, B, C genau dann abelsch, wenn $AB' = BA$ und $AC - B^2 = \kappa E$. Eine abelsche q. F. ist genau dann positiv-definit, wenn $\kappa > 0$ und A Matrix einer positiv-definiten q. F. ist. Abelsche q. F. sind solche, deren symmetrische Matrix außerdem symplektisch ist. Die reellen Matrizen L , die $L'JL = \kappa J$ erfüllen, werden nämlich symplektische Matrizen vom Kern κ genannt. Sie bilden die verallgemeinerte symplektische Gruppe $\mathfrak{G}(\kappa)$. Für $\kappa = 1$ entsteht als Untergruppe die gew. symplektische Gruppe, die ausführlich von C. L. Siegel in Symplectic geometry [Amer. J. Math. 65, 1—86 (1943)] behandelt wurde. Entsprechend dem, daß eine symplektische Matrix vom Kern 1 die Determinante $+1$ hat, zeigt Verf., daß eine symplektische Matrix vom Kern κ die Determinante κ^n hat. — Die Modulgruppe n -ten Grades, $\mathfrak{M}(n)$, besteht aus allen ganz-rationalen M , die $M'JM = J$ genügen (C. L. Siegel, dies. Zbl. 21, 203 und Symplectic geometry, s. o.). Zwei ganz rationale Matrizen L_1, L_2 aus $\mathfrak{G}(n)$ werden assoziiert genannt, wenn es ein M aus $\mathfrak{M}(n)$ gibt, so daß $L_1 = L_2 M$ besteht. Die ganzrationalen Matrizen aus $\mathfrak{G}(n)$ zerfallen in Klassen assoziierter von gleichem Kern. Verf. zeigt, daß die Anzahl dieser Klassen bei festem Kern endlich ist. — Für M aus $\mathfrak{M}(n)$ ist mit $x'Sx$ auch $x'M'SMx$ eine abelsche q. F. Zwei abelsche q. F. seien s -äquivalent genannt, wenn es zu ihren Matrizen S_1, S_2 ein M aus $\mathfrak{M}(n)$ gibt, so daß $S_2 = M'S_1M$. Unter Anwendung der Minkowskischen Reduktionstheorie arbeitet Verf. die Reduktionstheorie der positiv-definiten abelschen q. F. bei s -Äquivalenz aus. Er zeigt, daß zu jedem positiv-definiten abelschen S_1 ein M aus $\mathfrak{M}(n)$ gefunden werden kann, so daß für $M'S_1M = \begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix}$ gilt: I. $|A|$ ist Minimum, II. A ist im Minkowskischen Sinn reduziert, III. Der abs.

Betrag der Elemente von $A^{-1}B$ ist $\leq \frac{1}{2}$. Positiv-definite abelsche q. F. mit den Eigenschaften I—III werden s -reduziert genannt. Verf. beweist für s -reduziertes S , dessen Diagonalelemente $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n$ seien, die Ungleichung $(1) |A| |C| \leq a_1 \cdots a_n c_1 \cdots c_n \leq \mu_n |S|$, mit einer nur von n abhängigen Konstanten μ_n . Speziell folgt hieraus, daß es zu festem Kern κ nur eine endliche Anzahl ganzer, positiv-definiten, s -reduzierter abelscher q. F. gibt. Für $n = 2$ zeigt Verf. leicht, daß es nur je eine solche s -reduzierte Form vom Kern 1 und 2, jedoch mindestens 2 vom Kern 3 gibt. (Bem. der Ref.: Verf. gibt an, daß ein enger Zusammenhang zwischen positiv-definiten abelschen q. F. und dem Siegelschen Halbraum besteht, wenn man $Z = X + iY = -A^{-1}B + i\sqrt{\kappa}A^{-1}$ setzt. Darüber hinaus können die Resultate des Verf. bez. Reduktion, insbesondere I—III, ohne weiteres aus der Siegelschen Konstruktion eines Fundamentalbereiches für $\mathfrak{M}(n)$ gefolgt werden, wenn man noch das Siegelsche Lemma 6 aus Symplectic geometry anwendet. Umgekehrt geben die Resultate des Verf. auf Grund dieses Lemmas gerade den Siegelschen Fundamentalbereich für $\mathfrak{M}(n)$. Es besteht hier derselbe Zusammenhang wie zwischen der Reduktion binärer q. F. nach Gauß und dem Fundamentalbereich der gewöhnlichen Modulgruppe.) — Verf. geht auch auf die Reduktion indefiniter abelscher q. F. ein. Man hat für festes indefinites, abelsches $x'Sx$ und variables, definites, abelsches $x'Hx$ die Matrixgleichung $HS^{-1}H = S$ zu untersuchen. Anwendung der von Siegel (dies. Zbl. 23, 7) entwickelten Theorie ergibt die gleichen Resultate über Klassenzahl wie im gewöhnlichen Fall. — Verf. führt aus, daß man von der hermiteschen-symplektischen Gruppe ebenso ausgehen kann wie von der verallgemeinerten symplektischen Gruppe. Man definiert dann als abelsche hermitesche Formen solche, deren Matrix $H = \bar{H}'$ die Bedingung $HJH = \kappa J$ erfüllen. Hierauf kann man sinngemäß die Ansätze übertragen, die Verf. für abelsche q. F. macht. Auf Grund des Lemmas 3 der Ref. [Ann. of Math., II. Ser. 53, 143—160 (1951)] zeigt Verf., daß auch eine entsprechende Ungleichung wie (1) gilt. (Bem. der Ref.: Der Zusammenhang zwischen Reduktion positiv-definiter abelscher hermitescher Formen und Fundamentalbereich der hermiteschen Modulgruppe ist entsprechend dem oben von Ref. angegebenen.)

H. Braun.

Blij, F. van der: Binary quadratic forms of discriminant — 23. Indagationes math. 14, 498—503 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 498—503 (1952).

Einzelausführung der von E. Hecke (dies. Zbl. 24, 9) aufgestellten Theorie im Falle der binären Formen der Diskriminante — 23 (Klassenzahl 3) mittels elementarzahletheoretischer Schlüsse.

M. Eichler.

Salem, R.: Uniform distribution and capacity of sets. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 193—195 (1952).

Es sei n_1, n_2, \dots eine Folge von positiven ganzen Zahlen mit $n_i \neq n_j$ für $i \neq j$. Die reellen Zahlen x in $0 \leq x < 1$ werden abgebildet auf die Punkte des Kreises C mit Mittelpunkt im Nullpunkt und Umfang 1. Verf. beweist: Falls $\text{Max } (n_1, n_2, \dots, n_k) = O(k^p)$ für ein gewisses $p \geq 1$, so ist die Folge $\{n_k x\}$ gleichverteilt mod 1 für alle x mit eventueller Ausnahme einer Punktmenge mit α -Kapazität 0 [d. h. in bezug auf ein verallgemeinertes Potential $\int \frac{d\mu(x)}{r^\alpha}$, wo $\mu(x)$ eine Massenverteilung auf C ist] für $\alpha > 1 - 1/p$.

H. D. Kloosterman.

Koksma, J. F.: On continued fractions. Simon Stevin 29, 96—102 (1952). Every real number a can be written as a continued fraction

$$(A) \quad a = b_0 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots = (b_0, b_1, \dots),$$

with elements b_n which are positive integers (b_0 an integer ≥ 0), and approximants p_n/q_n . If the continued fraction terminates, a is a rational number, and if it is infinite a designates an irrational number. The even approximants and their interpolated secondary approximants $(b p_{n-1} + p_{n-2})/(b q_{n-1} + q_{n-2})$, ($b = 1, 2, \dots, b_n - 1$) ($n \geq 1$), form an increasing sequence S_t of fractions $p/q \leq a$ and the odd approximants with their interpolated secondary approximants form a decreasing sequence S_r of fractions $p/q \geq a$. (i) Let S denote one of the two monotonic sequences S_t or S_r belonging to the continued fraction (A). Let $k = p/q$ ($q \geq 1$) denote a fraction which does not belong to S but lies between two consecutive elements p'/q' and p''/q'' of S . Then $q > q''$. (ii) Each approximant p/q ($q \geq 1$) satisfies the inequality (B) $|a - p/q| \leq 1/q^2$. (iii) If (A) is a given continued fraction and if $k = p/q$ ($q > 1$) satisfies (B), then k is equal to an approximant p_n/q_n ($n \geq 0$) of a , or to a secondary approximant of a . (iv) If (A) is a given continued fraction and if the fraction $k = p/q$ ($q \geq 1$) satisfies the inequality $|a - p/q| \leq 1/2 q^2$, then k is equal to one of the approximants p_n/q_n ($n \geq 0$) of a (a theorem due to Legendre). (v) Let $a = (b_0, b_1, \dots)$ be a given real number and $k = p/q$ ($q > 1$) a fraction which satisfies $|a - p/q| \leq 1/\kappa q^2$ ($\kappa \geq 1$). Then if k is reducible, k is equal to an approximant of a ; if k is irreducible, for some $n \geq 0$, k is identical to a fraction $p/q = (b p_n + p_{n-1})/(b q_n + q_{n-1})$, ($0 \leq b \leq b_{n+1}$); moreover in that case $1/b + 1/(b_{n+1} - b) \geq \kappa$, where the equality sign may be omitted unless $a = (b_0, b_1)$. (vi) Of the secondary approximants ($n \geq 0$) belonging to the simple continued fraction (A), at most the extreme ones, i. e., those with $b = 1$ or $b = b_n - 1$ can satisfy the inequality $|a - p/q| \leq 1/q^2$.

E. Frank.

Analysis.

● **Rothe, R.:** Höhere Mathematik. Teil I; II; III; IV, Heft 5/6. Herausgegeben von W. Schmeidler. 10., 8., 5., 4. Aufl. (Teubners Mathematische Leitfäden. Bd. 21, 22, 23, 37/38). Leipzig: B. G. Teubner 1952. 161, 98, 167, 59 Textabb., 211, 210, 236, 108 S. DM 6,30; 6,60; 5,80; 3,40.

● **Hardy, G. H.:** A course of pure mathematics. 10th ed. London: Cambridge University Press 1952. XII, 509 p. \$ 4,75.

● **May, Kenneth O.:** Elementary analysis. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1952. XVIII, 635 p. 40 s.

● **Palmer, C. I. and S. F. Bibb:** Practical mathematics. 4. ed. London: McGraw-Hill 1952. XII, 769 p. \$ 6.

● **Palmer, C. I. and C. E. Stout:** Practical calculus. Rev. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Co. 1952. \$ 6,00.

● **Kaplan, Wilfried:** Advanced calculus. (Addison-Wesley Math. Series). Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1952. XIII, 679 p. \$ 8,50.

Das Buch führt in die verschiedenen Anwendungsgebiete der Differential- und Integralrechnung ein; die betonte Ausrichtung auf physikalische Probleme äußert sich in einer besonders ausführlichen Behandlung der zwei- und dreidimensionalen Vektoralgebra und Analysis und der Einbeziehung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Des öfteren beschränkt sich Verf. auf Formulierung und Erläuterung von Sätzen, sogar von solchen fundamentalen Art, und beruft sich wegen eines Beweises auf einschlägige Lehrbücher. Der Fluß der Darbietung des umfangreichen Stoffes wird nur unterbrochen von den eingestreuten Übungsaufgaben, etwa 700 an

der Zahl, von allen Schwierigkeitsgraden, sei es die einfache rechnerische Anwendung eines Satzes (mit Angabe des Resultates) oder die Durchführung eines mit knapper Anleitung versehenen Beweises eines den Text ergänzenden Satzes. Kapitelüberschriften (in Klammern Länge in Seitenanzahl) sind: 0. Rückblick auf die Elemente der Algebra, analytischen Geometrie und Differential- und Integralrechnung (31); 1. Vektoren (40); 2. Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen (68); 3. Vektordifferentialrechnung (27); 4. Integralrechnung von Funktionen mehrerer Veränderlichen (58); 5. Vektorintegralrechnung, zweidimensional und dreidimensional (77); 6. Unendliche Reihen (85); 7. Fouriersche Reihen und orthogonale Funktionen (50); 8. Gewöhnliche Differentialgleichungen (48); 9. Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen (131); 10. Partielle Differentialgleichungen (55); Index (9). — Die Absicht des Werkes, dem Ingenieur, dem mathematisch interessierten Physiker und dem Mathematiker selbst in begrifflich sauberer Weise einen vielseitigen Einblick in die höhere Analysis zu vermitteln, ist bestens gelungen. Druck und Ausstattung, einschließlich der durch plastische Schattierung ansprechenden Figuren (ein Schönheitsfehler: die Tangenskurve auf S. 17 schneidet die x -Achse in $x = \pm 3,00$) sind vorzüglich.

G. Aumann.

● Angot, André: *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des télécommunications*. Préf. de L. de Broglie. (Collection Technique du C. N. E. T.) 2. éd. Paris: Éditions de la Revue d'Optique 1952. VI, 688 p.

Das Werk ist gedacht als ein Lehr- und Handbuch der Mathematik für den Ingenieur der Elektro- und Nachrichtentechnik, der ja in besonders hohem Grade alle Begriffe und Methoden der modernen Mathematik kennen und anwenden muß. Der bei solcher Zielsetzung notwendige Kompromiß zwischen mathematischer Strenge und Verständlichkeit (für den Ingenieur) scheint dem Ref. i. a. zweckmäßig gewählt zu sein, wenn es auch den Mathematiker schmerzt, z. B. gleich auf S. 1 die Begriffe „reell“ und „algebraisch“ nicht klar getrennt zu finden. Zahlreiche Abbildungen kommen der anschaulichen Denkweise des Ingenieurs entgegen; mathematische Fragestellungen und Methoden (z. B. der Operatorenkalkül) werden z. T. an Hand elektrotechnischer Probleme eingeführt, dann aber als rein mathematische Theorie (Laplace-Transformation) behandelt und schließlich durch viele Anwendungsbeispiele erläutert. Formel- und Zahlentabellen (insbesondere für die speziellen Funktionen) sowie ein ausführliches Inhaltsverzeichnis und Register erhöhen den Wert des Werkes als Handbuch. In einem Vorwort von L. de Broglie wird das Buch Elektroingenieuren und Physikern warm empfohlen. — In neun Kapiteln wird behandelt: I. Komplexe Zahlen und Anwendungen (Einführung der komplexen Zahlen, Elemente der Funktionentheorie, Residuenmethode, Berechnung bestimmter Integrale, konforme Abbildung; 56 S.). II. Fouriersche Reihen und Integrale (33 S.). III. Vektorrechnung (Vektoralgebra, Vektoranalysis, Elektromagnetische Felder, die wichtigsten krummlinigen orthogonalen Koordinatensysteme; 53 S.); IV. Matrizenrechnung (Algebra reeller und komplexer Matrizen, Funktionen einer Matrix, Lineare Differentialgleichungen, Vierpoltheorie; 67 S.). V. Tensorrechnung (Tensor-Algebra und -Analysis, Elektrische Netze, Anisotrope Medien; 70 S.). VI. Differentialgleichungen (Gewöhnliche Differentialgleichungen und Systeme: numerische und graphische Methoden; partielle Differentialgleichungen, insbesondere von Laplace und Poisson; 58 S.). VII. Spezielle Funktionen (Hyperbelfunktionen, Integral-Sinus und -Cosinus, Fehlerfunktion, Γ -Funktion, Besselfunktionen und dgl., Legendre-Funktionen, Mathiesche Funktionen, Webersche Funktionen; 138 S.). VIII. Symbolischer Kalkül (Laplace-Transformation, Zusammenhang mit Heaviside-Kalkül, Elektrotechnische Anwendungen, Mathematische Anwendungen: Bestimmte Integrale, Differential- und Integralgleichungen; 103 S.). IX. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen (84 S.).

J. Weissinger.

● Onofri, L. e V. E. Bononcini: *Esercizi di analisi matematica*. (Ad uso degli studenti di matematica, fisica e ingegneria). Vol. 1. Padova: CEDAM 1952. IV, 332 p.

Dies ist der erste Band einer Sammlung von Übungsaufgaben zur Analysis für Physiker und Techniker. Es enthält Aufgaben zur elementaren Algebra und zur Differentialrechnung in einer Veränderlichen. Die Übungen sind alle vollständig durchgerechnet, jedem Kapitel ist eine Zusammenstellung der zur Lösung notwendigen Methoden und Sätze vorangestellt. Dem Zweck des Buches entsprechend, steht der reine Kalkül im Vordergrund, die Durchführung entspricht jedoch stets den heutigen Anforderungen an Strenge der Beweisführung. Es scheint dem Referenten nicht ganz den Absichten der Verff. zu entsprechen, wenn bei der Auflösung linearer Gleichungssysteme nur die Methode der Determinanten geübt wird und die sukzessive Elimination mit keinem Wort erwähnt wird.

G. Köthe.

Masani, P.: What is a function? Math. Student 19, 81—101 (1951).

Il concetto di funzione viene ampiamente e accuratamente esposto, sia dal punto di vista storico che da quello filosofico. Notevolmente acute ed esaurienti le informazioni sull'evoluzione moderna dell concetto nella logica matematica. Il lavoro termina con un'interessante trattazione dei metodi pedagogici sull'argomento.

T. Viola.

Hermes, Hans: Über den Begriff der Grenze in der Mathematik. Studium generale 5, 585—591 (1952).

Die Zeitschrift „studium generale“ hat den Begriff „Grenze“ Psychologen, Philosophen, Architekten, Wirtschaftswissenschaftlern und auch Mathematikern zur Diskussion vorgelegt. Verf. berichtet (natürlich nur summarisch, aber so gut es eben in dem gegebenen Rahmen gehen kann) über Konvergenz rationaler Zahlenfolgen, Konstruktion der reellen Zahlen, Definition von Ableitung und Integral, Konvergenz nach Moore-Smith, topologische Räume und Dimensionstheorie.

W. Maak.

Rootselaar, B. van: Un problème de M. Dijkman. Indagationes math. 14, 405—407 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 405—407 (1952).

Les définitions de dérivée données au moyen de la limite de suites convergentes ou au moyen des ε et δ coïncident (même en mathématiques intuitionistes) à cause de la continuité des fonctions pleines.

H. Freudenthal.

Mengenlehre:

Gottschalk, W. H.: The extremum law. Proc. Amer. math. Soc. 3, 631 (1952).

„Das Extremum-Gesetz wird definiert als die Klasse E aller Aussagen S derart, daß S dem Auswahlaxiom äquivalent ist und daß die Conclusio von S die Existenz eines extremalen Elements behauptet. Ein Element von E wird eine Form des Extremum-Gesetzes genannt.“ — Man wird dies kaum als eine mathematische Definition bezeichnen können. Verf. gibt mehrere geringfügige Modifikationen der von A. D. Wallace, Bull. Amer. math. Soc. 50, 278 (1944), herrührenden „Form des Extremum-Gesetzes“ an.

Jürgen Schmidt.

Fan, Ky: Note on a theorem of Banach. Math. Z. 55, 308—309 (1952).

L'A. étend la proposition de S. Banach, „Sur les transformations biunivoques“ [Fundamenta Math. 6, 236—239 (1924)], comme suit: Si A_1, A_2, \dots, A_n est un cycle fini d'ensembles infinis ($2 \leq n < +\infty$, $A_{n+1} = A_1$) et t_i une transformation biunivoque de A_i dans A_{i+1} , (1) $t(A_i) \subset A_{i+1}$, il existe des ensembles B_i, C_i (l'un d'eux pouvant être vide), tels que (2) $A_i = B_i \cup C_i$, $B_i \cap C_i = 0$, pour lesquels (3) $t(B_i) = C_{i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $C_{n+1} = C_1$). — Je dois faire remarquer, que la proposition précédente cesse d'être vraie, en général, pour n impair, comme le montre tout exemple du type suivant: Soit n impair, en particulier $n=3$, α un élément appartenant à A_1 et invariant dans chacune des transformations $t_i(A_i)$, ce qui peut se réaliser. L'on devrait donc avoir, ou bien (I) $\alpha \in B_1$, ou bien (II) $\alpha \in C_1$. Dans le cas (I), par itération de (3) et en tenant compte de (2), l'on aurait successivement $t_1(B_1) = C_2$, $B_2 = A_2 - C_2$, $t_2(B_2) = C_3$, $B_3 = A_3 - C_3$, $t_3(B_3) = C_1$, $B_1 = A_1 - C_1$ et donc, à partir de (I), $\alpha \in B_1$, $\alpha \in C_2$, $\alpha \notin B_2$, $\alpha \notin C_3$, $\alpha \in B_3$, $\alpha \in C_1$, $\alpha \notin B_1$, ce qui contredit (I). L'on procédera de même pour prouver que (II) est aussi contradictoire.

A. Froda.

Jones, F. Burton: On the separation of the set of pairs of a set. J. Elisha Mitchell Sci. Soc. 68, 44—45 (1952).

Verf. stellt die Frage: Wenn M^2 die Menge der Paare einer (unendlichen) Menge M bezeichnet und $M^2 = H \cup K$ mit $H \cap K = 0$ ist, gibt es dazu eine Teilmenge N von M , welche mit M gleichmächtig und deren Paarmenge N^2 entweder $\subset H$ oder $\subset K$ ist? Bei abzählbar unendlichem M ist die Frage zu bejahen, bei nichtabzähl-

baren Teilmengen M der Zahlgeraden dagegen kann $N^2 \subset H$ oder K die Abzählbarkeit von N implizieren. G. Aumann.

Ellis, J. W.: A general set-separation theorem. Duke math. J. 19, 417—421 (1952).

In einer Menge S seien φ und ψ zwei algebraische Hüllenoperatoren, d. h. I. $E \subseteq \varphi(E)$, II. $\varphi(\varphi(E)) = \varphi(E)$, III. $\varphi(E) = \bigcup \{\varphi(F) \mid F \text{ endlich, } F \subseteq E\}$, für jedes $E \subseteq S$, und dasselbe mit ψ . E heiße φ -abgeschlossen, wenn $\varphi(E) = E$. Die Frage, ob es zu zwei fremden, φ - bzw. ψ -abgeschlossenen Mengen A und B stets komplementäre, φ - bzw. ψ -abgeschlossene Erweiterungen A' und B' gibt, wird unter den folgenden Voraussetzungen bejaht: IV. Bei endlichem, nicht leerem F ist $\varphi(F \cup \{p\})$ die Vereinigung aller $\varphi(\{a, p\})$ mit $a \in \varphi(F)$, und analog $\psi(F \cup \{p\})$; V. Liegt a in $\psi(\{b, p\})$ und c in $\varphi(\{d, p\})$, so ist $\varphi(\{a, d\}) \cap \psi(\{b, c\})$ nicht leer. Zum Beweis wird das Zornsche Lemma auf die komponentenweise halbgeordnete Menge aller Paare (D, E) aus fremden, φ - bzw. ψ -abgeschlossenen Erweiterungen D und E von A und B angewendet. Die Voraussetzung V erweist sich auch als notwendig, dagegen nicht die Endlichkeitsbedingung III. — Die folgenden Spezialisierungen liefern bekannte Sätze. 1. S sei ein distributiver Verband, $\varphi(E)$ bzw. $\psi(E)$ das kleinste E enthaltende \wedge - bzw. \vee -Ideal. 2. S sei ein reeller linearer Raum und $\varphi(E) = \psi(E)$ die konvexe Hülle von E . Durch passende Wahl von S , φ und ψ ergibt sich ferner: in einem reellen linearen Raum X mit dem Nullelement θ existiert zu jedem Kegel K mit $K \cap (-K) = \{\theta\}$ ein Kegel K' mit $K' \cap (-K') = \{\theta\}$ und $K' \cup (-K') = X$. Hieraus folgt die bereits bekannte Tatsache: liegt in X eine Topologie vor, in der die Addition partiell stetig ist, und enthält X einen dichten echten linearen Unterraum, so gibt es einen dichten Kegel K' mit $K' \cap (-K') = \{\theta\}$ und $K' \cup (-K') = X$. K. Krickeberg.

Inagaki, Takeshi: Sur deux théorèmes concernant un ensemble partiellement ordonné. Math. J. Okayama Univ. 1, 167—176 (1952).

E sei eine geordnete (= teilweise geordnete) Menge, f eine extensive Abbildung von E in sich, d. h. es gelte $x \leq fx$ für jedes $x \in E$. Eine Menge $M \subseteq E$ heiße gesättigt, wenn sie folgenden Bedingungen genügt: 1. wenn $x \in M$, so $fx \in M$; 2. ist T eine nichtleere Teilmenge von M und existiert $\sup T$, so ist $\sup T \in M$. — Bourbaki hat [Arch. der Math. 2, 434—437 (1951)] folgenden Satz bewiesen: der Durchschnitt aller das Element a enthaltenden gesättigten Mengen (die gesättigte Hülle der einelementigen Menge $\{a\}$) ist wohlgeordnet. — M heiße schwach gesättigt, wenn an Stelle der Bedingung 2 die folgende tritt: 2*. ist T eine nichtleere, total (= einfach) geordnete Teilmenge von M und existiert $\sup T$, so ist $\sup T \in M$. — Auf Grund des Satzes von Bourbaki ist die schwach gesättigte mit der gesättigten Hülle von $\{a\}$ identisch. — Verf. nennt nun eine geordnete (= teilweise geordnete) Menge E schwach induktiv, wenn zu jeder nichtleeren (Ergänzung des Ref.), nach oben beschränkten, total (= einfach) geordneten Menge in E das Supremum existiert. Auf erheblich größerem Raume als Bourbaki beweist nun Verf. die folgende erhebliche Abschwächung des Bourbakischen Satzes: ist E schwach induktiv, so ist die schwach gesättigte Hülle von $\{a\}$ wohlgeordnet. Es folgen die üblichen Anwendungen (Lemma von Zorn usw.). Jürgen Schmidt.

Denjoy, Arnaud: L'insertion de nouveaux éléments dans un ensemble ordonné. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 31—50 (1952).

Verf. beschäftigt sich mit geordneten Mengen E , die ihren Typus behalten, wenn man innerhalb E neue Elemente einfügt. — Eine Menge E_2 heißt in eine fremde Menge E_1 eingeschaltet, wenn in der geordneten Summe $H = E_1 \cup E_2$ die Ordnung von E_1 dieselbe ist, wie zuvor und wenn in H jedes Element von E_2 zwischen zwei Elementen aus E_1 liegt. — Wechselseitig vermöge $H = E_1 \cup E_2$ ineinander eingeschaltete Mengen E_1, E_2 haben kein erstes und kein letztes Element. — Eine Menge E heißt Y -geordnet, wenn sie nicht leer ist, geordnet ist und kein erstes, kein letztes sowie kein Paar konsekutiver Elemente enthält. Ist E außerdem abzählbar, so wird Y_0 statt Y geschrieben; Y_0 kann

zugleich als Zeichen für den Ordnungstypus der Menge der rationalen Zahlen angesehen werden. — E_1 und E_2 heißen Y -ineinandergeschachtelt, wenn in $H = E_1 \cup E_2$ zwischen je zwei Elementen von E_1 bzw. E_2 ein Y -geordnetes Stück von E_2 bzw. E_1 enthalten ist. — Ist $\{E_i\}$ eine mindestens zwei Elemente enthaltende endliche oder abzählbare Menge von paarweise fremden Mengen, wird ferner die Vereinigung $H = \bigcup_i E_i$ so geordnet, daß in ihr je zwei Mengen

$E_p \neq E_q$ ineinander Y -eingeschachtelt sind, so ist die Ordnung von H und allen E_i eine Y -Ordnung; außerdem liefert jedes durch ein Element $a \in H$ bestimmte Anfangs- oder Endstück von H und jedes durch zwei Elemente $\alpha, \beta \in H$ bestimmte Mittelstück von H mit jedem E_i einen Y -geordneten Durchschnitt. — Hat man zwei Vereinigungsmengen $H = \bigcup_i E_i$ und $H' = \bigcup_i E'_i$

der oben genannten Art, die aus je abzählbar vielen abzählbaren Summanden bestehen ($i=1, 2, \dots$), wobei also die Y -Ordnung eine Ordnung vom Typus Y_0 wird, so ist es möglich, eine ähnliche Abbildung von H auf H' zu finden, welche zugleich jedes E_i auf E'_i abbildet. Zum Beweis denkt sich Verf. die E_i abgezählt und die Doppelfolge der Elemente der E_i nach dem Diagonalverfahren in eine einfache Folge gebracht, wodurch H abgezählt wird; dem ersten Element von H , das zugleich das erste Element von E_1 ist, wird das erste Element von E'_1 zugeordnet, und wenn für die $p-1$ ersten Elemente von H ihre Bilder gefunden sind, wird dem p^{ten} Element von H , das etwa zu E_i gehört, dasjenige Element aus E'_i mit kleinstem Index zugeordnet, das die Ordnungsbeziehung des p^{ten} Elementes von H zu den $p-1$ ersten Elementen von H in bezug auf deren Bilder wiederholt. Daß hierbei alle Elemente von H' erfaßt werden, soll sich nach einer Bemerkung des Verf. ebenso ergeben wie bei der analogen Art der Abbildung zweier Mengen vom Typus Y_0 . (Eine solche Abbildung findet sich bei Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis, § 61, aber Ref. gesteht, daß ihm die Übertragung auf den obigen allgemeinen Fall nicht klar ist. Dagegen funktioniert die Übertragung der in Hausdorff, Mengenlehre, § 11, angewandten Methode: man muß auch die Doppelfolge der Elemente der E'_i und damit H' abzählen und abwechselnd aus H und H' die noch nicht erfaßten Elemente mit kleinstem Index als Urbilder wählen.) — Ist E eine geordnete Menge, so bezeichne $\gamma_1(E)$ das größte wohlgeordnete Anfangsstück, $\delta_2(E)$ das größte invers wohlgeordnete Endstück von E (beide können leer sein). — Verf. konstruiert eine geordnete abzählbare Menge E mit den Eigenschaften: 1. Bei jeder ordinalen Zerlegung $E = C + D$, C und D nicht leer, ist $\delta_2(C) + \gamma_1(D)$ endlich oder leer. 2. Bei beliebiger Zwischenschaltung eines neuen Elements behält E ihren Typus. (Eine Menge E , bei der $\delta_2(C) + \gamma_1(D)$ immer unendlich ist, hat stets die zweite Eigenschaft.) — Ein Mittelstück einer geordneten Menge E heißt regulär, wenn es endlich oder wohlgeordnet oder invers wohlgeordnet ist oder in ein wohlgeordnetes Anfangs- und ein invers wohlgeordnetes Endstück zerfällt, also den Typus $m, \alpha, -\beta$ oder $(-\theta, \varepsilon)$ hat, unter m eine natürliche und unter $\alpha, \beta, \theta, \varepsilon$ beliebige transfinite Ordnungszahlen verstanden. Ein größtes reguläres Mittelstück σ ist definiert durch die Eigenschaft, kein echter Teil eines anderen regulären Mittelstückes zu sein. Die Menge J dieser Mittelstücke σ von E besteht aus disjunkten Mengen und ist geordnet durch die Ordnung von E . $J(\lambda)$ bedeute die Menge aller $\sigma \in J$ vom selben Typus λ , wo $\lambda = m, \alpha, -\beta$ oder $(-\theta, \varepsilon)$ ist. — Verf. zeigt, daß es abzählbare Mengen E gibt mit $E = \sum \sigma$ ($\sigma \in J$), bei denen J die Vereinigung unendlich vieler paarweise Y_0 -ineinandergeschachtelter Mengen $J(\lambda)$ ist. Der Typus eines solchen E ist völlig bestimmt durch die Menge der Typen λ . Setzt man noch voraus, daß $J(m)$ für jedes m existiert, daß ferner $J(\alpha + p)$ oder $J(-(\beta + p))$ oder $J(-(\theta + q), \varepsilon + r)$ für alle p, q, r existiert, wenn $J(\alpha)$ oder $J(-\beta)$ oder $J(-\theta, \varepsilon)$ existiert, dann kann man innerhalb E an beliebiger Stelle ein neues Element a einschalten und sogar unter Beachtung ziemlich weitherziger Vorschriften eine abzählbare Menge e , ohne daß die neue Menge einen anderen Typus annimmt als E .

W. Neumer.

Kurepa, Djuro: Sur une propriété caractéristique du continu linéaire et le problème de Suslin. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 97–108 (1952).

Ein Raum E hat die Suslinsche Eigenschaft, wenn jede Menge disjunkter offener Teilmengen von E höchstens abzählbar ist. Eine stetige geordnete Menge E hat die Suslinsche Eigenschaft, wenn jede Menge offener disjunkter Intervalle von E höchstens abzählbar ist. — Sind E_1, \dots, E_n geordnete Mengen, so sei $E_1 \times \dots \times E_n$ ihr topologisches Produkt, für $E_1 = \dots = E_n = E$ mit E^n bezeichnet, wobei in den E_i die offenen Intervalle als Umgebungen fungieren. Man kann $E_1 \times E_2$ als partiell geordnete Menge auffassen, indem man $(x, y) = (x', y')$ bzw. $(x, y) < (x', y')$ definiert für $x, x' \in E_1$, $y, y' \in E_2$, wenn $x = x'$, $y = y'$ bzw. $x < x'$, $y < y'$ gilt. Ein offenes Intervall in $E_1 \times E_2$ ist dann zugleich eine offene Rechteckumgebung und umgekehrt; $E_1 \times E_2$ hat die Suslinsche Eigenschaft, wenn jede Menge disjunkter offener Rechteckumgebungen höchstens abzählbar ist. — Alle bisher bekannten Räume mit der Suslinschen Eigenschaft liefern zu je zweien topologische Produkte, die wieder die Suslinsche Eigenschaft haben. Daß umgekehrt aus dem Bestehen der Suslinschen Eigenschaft für ein topologisches Produkt $E_1 \times E_2$ dieselbe Eigenschaft für E_1 und E_2 folgt, ist leicht einzusehen. — Verf. beweist (Theoreme 1 und 4, 1), daß eine stetige geordnete Menge E genau dann einer linearen Menge ähnlich ist, wenn jede Menge offener disjunkter Intervalle aus $E \times E$ (oder aus E^n mit einem $n > 1$) höchstens abzählbar ist. Das Suslinsche Problem, d. h. die Frage, ob eine stetige geordnete Menge mit der

Suslinschen Eigenschaft einer linearen Menge ähnlich ist, fände also eine bejahende Antwort, wenn man beweisen könnte, daß mit E stets auch $E \times E$ die Suslinsche Eigenschaft hat. — Den Beweis seines Satzes führt Verf. durch Konstruktion eines vollständigen verzweigten Schemas abgeschlossener Intervalle von E mit der Ordnungsrelation \supseteq . Zu dem Zweck nimmt er E als beiderseits begrenzt an und zerlegt jedes mehrpunktige Stück S von E in zwei Stücke mit einem gemeinsamen inneren Punkt von S ; das Paar dieser Stücke wird mit $f(S)$ bezeichnet. Ferner sei $D_0 = \{E\}$, $D_1 = f(E)$, allgemein, wenn alle $D_\xi (\xi < \alpha)$ definiert sind, $D_\alpha = \bigcup_X f(X)$

$(X \in D_{\alpha-1})$, falls $\alpha - 1$ existiert, andernfalls $D_\alpha = \bigcup_\xi \bigcap_\xi X_\xi (\xi < \alpha)$, summiert über alle

Folgen $X_0 \supseteq X_1 \supseteq \dots \supseteq X_\xi \supseteq \dots (\xi < \alpha)$ mit $X_\xi \in D_\xi$; dabei ist $f(X)$ leer, wenn X einpunktig ist. Endlich sei $D = \bigcup_\alpha D_\alpha$ und ΨM für $M \subseteq D$ die Menge aller mehrpunktigen Elemente

von M . Dann läßt sich zeigen, daß die Menge P der Endpunkte aller Intervalle $X \in \Psi D$ in E überall dicht ist. (Diese Folgerung gilt für beliebige stetige geordnete Mengen E ; die Suslinsche Eigenschaft braucht dabei nicht benützt zu werden. Ref.) Ist nun $f(X) = \{X_0, X_1\}$, $X = X_0 + X_1$ im Sinne der geordneten Addition, $X \in \Psi D$, so „überlappen“ sich die „Rechtecke“ $X_1 \times X_0 \subset E \times E$ niemals für verschiedene X . Wegen der Suslinschen Eigenschaft von $E \times E$ ist die Menge dieser Rechtecke höchstens abzählbar (sie sind ja im Innern einander fremd), also auch die Menge ΨD und somit die in E dichte Menge P . Nach einem Satz von Cantor hat daher E den Typus des Kontinuums der reellen Zahlen $0 \leq x \leq 1$. — Verf. bemerkt, daß Svetozar Kurepa aus obigem Theorem folgende gleichwertige Aussage hergeleitet hat. Damit die beiderseits begrenzte stetige geordnete und die Suslinsche Eigenschaft aufweisende Menge E einer linearen Menge ähnlich ist, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $n > 1$ der Raum E^n ein stetiges eindeutiges Bild von E ist. — Damit ist eine charakteristische Eigenschaft des linearen Kontinuums gefunden (es genügt, $n = 2$ zu nehmen). — Frage: Folgt schon aus der eindeutigen stetigen Abbildbarkeit der stetigen geordneten begrenzten Menge E auf $E \times E$, daß E den Typus des Kontinuums $0 \leq x \leq 1$ hat?

W. Neumer.

Gillman, Leonard: On intervals of ordered sets. Ann. of Math., II. Ser. 56, 440—459 (1952).

The main problem of the paper (that represents the author's Thesis) is to determine whether for a given cardinal m every totally ordered set contains a family of power m of disjoint intervals (consequently, the paper is connected with the general Suslin problem). In this connection, the following propositions are considered: $P(\aleph_\alpha)$: For every $\beta < \alpha$, one has $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$;

$P: P(\aleph_\alpha)$ is true for every singular \aleph_α ; $H(\aleph_\alpha)$: For every $\beta < \alpha$, $2^{\aleph_\beta} \leq \aleph_\alpha$; $H: H(\aleph_{\alpha+1})$ holds

for every α ; $P'(\aleph_\alpha)$: For every $\beta < \omega_{cf(\alpha)}$, one has $2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. In § 2 the author obtains (jointly with Tarski) some implications e. g. $Q(\aleph_\alpha) \Rightarrow P'(\aleph_\alpha)$ (Th. 2. 6); thus $Q(\aleph_{\alpha+1})$ fails; $P \Leftrightarrow Q$ (Th. 2. 15); consequently, Q implies that every inaccessible aleph \aleph_α is strongly inaccessible

(i. e. $\aleph_\beta < \aleph_\alpha \Rightarrow 2^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$). In § 3 the author considers $Q(\aleph_\alpha)$, if \aleph_α is inaccessible and gives in Th. 3. 8 three characteristic properties in order that ω_α be no Mahlo's \mathfrak{g}_0 -number [cf. Mahlo, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 63, 187—225 (1911)] one of which (property III) is the following one: Let A be any set of power \aleph_α and let $A_\beta (\beta < \omega_\alpha)$ be an increasing sequence of sets $\subseteq A$, whose union is A , and such that (the cardinal of $A_\beta =$) $k A_\beta = \aleph_\beta (\beta < \omega_\alpha)$, $A_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} A_\beta$ for any limit ordinal $\lambda < \omega_\alpha$; then there exists a set

$A_1 \subseteq A$ satisfying $k(A_1 \cap A_\gamma) < \aleph_\gamma$ for every regular $\aleph_\gamma < \aleph_\alpha$. In § 4 one considers some partitions of (totally ordered) sets. It is astonishing that the author did not mention reviewer's Thesis „Ensembles ordonnés et ramifiés [Paris 1935; 138 S., cf. this Zbl. 14, 394]; so e. g. what author calls a „Miller partial order“ [cf. Miller, Amer. J. Math. 63, 673—678 (1943)] is the same as reviewer's ramified sets. It is to be remarked that the Miller's theorem referred to is contained in reviewer's Thesis (loc. cit. 106, 121, 124, 132, equivalence of P_2 and P_6).

G. Kurepa.

Sierpiński, W.: Sur une propriété paradoxale de l'espace à trois dimensions équivalente à l'hypothèse du continu. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 7—10 (1952).

Première démonstration d'un théorème précédent (ce Zbl. 44, 272, 2. Referat); on y fait usage de nombres transfinis.

G. Kurepa.

Kurepa, Djuro: On a definition and notation of matrices. On a kind of switch matrices. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 4, 1—4 und serbische Zusammenfassg. 5—7 (1952).

Verf. betrachtet Matrizen $a = [a_{\xi\eta}]$, wo ξ bzw. η beliebige Ordnungszahlen $< \alpha$ bzw. $< \beta$ sind und die Elemente $a_{\xi\eta}$ irgendeiner Menge angehören. (α, β) heißt die Ordnung von a . Wenn $\alpha = \beta$, so heißt a quadratisch. Ist stets $a_{\xi\eta} \in \{0, 1\}$, so heißt a dyadisch oder „switsch“. Steht in jeder Zeile und Spalte einer dyadischen Matrix a genau eine 1, so sind α und β gleichmächtige Ordnungszahlen, d. h. durch Umordnung der Zeilen oder Spalten kann man a quadratisch machen. (Die Behauptung des Verf., daß a auf Grund der genannten Voraussetzungen schon quadratisch sei, stimmt nicht mit obiger Definition quadratischer Matrizen überein. Ref.). — Die Menge aller dyadischen Matrizen der Ordnung (α, α) , die in jeder Zeile und Spalte genau eine 1 haben, ist äquivalent der Menge aller Permutationen der Menge der Zahlen $< \alpha$, unter Permutation eine eindeutige Abbildung einer Menge auf sich verstanden. Die Mächtigkeit dieser Permutationenmenge bezeichnet Verf. mit $\alpha!$, α als Anfangszahl vorausgesetzt. (Diese Beschränkung ist unnötig. Bezeichnet man die betr. Mächtigkeit mit $\bar{\alpha}!$, $\bar{\alpha}$ = Kardinalzahl von α , so ist $\bar{\alpha}! = 2^{\bar{\alpha}}$ für transfinites α . Ref.).

W. Neumer.

Bourgin, D. G.: Sets of visibility. Portugaliae Math. 11, 137–140 (1952).

Ist S eine Teilmenge eines linearen topologischen Raumes, so bezeichne $W(S)$ die Menge aller jener Punkte x von S , von welchen aus jeder Punkt y von S „im strengen Sinne sichtbar“ ist, d. h. für welche für jedes $y \in S$ die Strecke xy in S enthalten ist und keine Teilstrecke mit der Begrenzung von S gemein hat. Verf. behandelt Beispiele zur Konstruktion von Mengen S zu vorgegebener Menge $W(S)$, insbesondere den Fall, daß $W(S)$ eine Kreisscheibe ist.

G. Aumann.

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

● **Mayrhofer, Karl:** Inhalt und Maß. Wien: Springer-Verlag 1952. VIII, 269 S. mit 17 Fig.

Das Buch gibt eine übersichtlich und klar geschriebene Darstellung der Inhalt- und Maßtheorie im klassischen Sinne, die auch als Nachschlagewerk brauchbar sein dürfte. Im einzelnen gliedert sich das Buch wie folgt: 1. Kap. Axiomatische Einführung von Inhalt und Maß sowie ihre allgemeine Theorie (Limessätze, maßgleiche Hüllen und Kerne, Vervollständigungs- und Erweiterungssätze, Produktinhalte). 2. und 3. Kap. Jordaninhalt sowie Borelsches und Lebesguesches Maß im euklidischen E_n ; Vitalischer Überdeckungssatz; Dichtesatz. 4. Kap. Jordaninhalt und Lebesguesches Maß bei linearen Transformationen des E_n . 5. Kap. Entwicklung der Maßtheorie ausgehend von „äußeren“ bzw. „inneren“ Maßfunktionen $f|z$ (wobei also z ein σ -Körper, $f(0) = 0$, $f(R) \leq f(Q)$ für $R \subseteq Q$ und $f(\bigcup R_n) \leq \sum f(R_n)$ bzw. $f(\bigcup Q_n) \geq \sum f(Q_n)$ falls $Q_n Q_k$ leer für $n \neq k$. Zusammenhang mit der im 1. Kap. entwickelten Theorie. Untersuchung der „gewöhnlichen“ (regulären) Maßfunktionen und der zu ihnen gehörigen Maße (zum 5. Kap. vgl. Arbeiten des Verf., z. B. dies. Zbl. 38, 200). 6. Kap. Einführung in die Theorie der Booleschen Verbände und der Maße über solchen (in Kap. 1–5 waren speziell Boolesche Mengenverbände zugrunde gelegt). Anhang. Borelsche Mengen. Otto Haupt.

Bledsoe, Woodrow W. and A. P. Morse: Some aspects of covering theory. Proc. Amer. math. Soc. 3, 804–812 (1952).

Es werden die auf die Φ -Vitalieigenschaft bezüglichen Sätze 3.2 und 3.3 in der Arbeit von A. P. Morse (dies. Zbl. 31, 387), die falsch formuliert sind, richtig gestellt; auf eine mit dieser Änderung notwendige Korrektur im nachfolgenden Teil der genannten Arbeit wird hingewiesen. Zur Ergänzung entwickeln Verf. eine Reihe von Sätzen, welche folgende Begriffe betreffen: Ein Netz ist ein Mengensystem \mathfrak{F} mit der Eigenschaft, daß für jedes nicht leere Teilsystem \mathfrak{G} von \mathfrak{F} mit $\bigcap \mathfrak{G} \neq 0$ gilt $\bigcup \mathfrak{G} \in \mathfrak{G}$; ein A-Netz ist ein Netz, wovon jedes Teilsystem von paarweise fremden Mengen abzählbar ist; \mathfrak{F}' mascht die Menge B außerhalb \mathfrak{F} ,

wenn \mathfrak{F}' ein A-Netz ist und es zu $\mathfrak{F} \ni F \ni x \in B$ stets ein F' aus \mathfrak{F}' gibt mit $x \in F'$ und $F \cap F' = 0$; $\{F: F \in \mathfrak{F} \text{ und } (F \subset F_1 \in \mathfrak{F} \rightarrow F_1 = F)\}$ heißt die Spitze von \mathfrak{F} . Als Anwendung dieser Netztheorie und zur Erläuterung der oben erwähnten Umformulierungen folgen einige Sätze über Überdeckungen auf der Zahlgeraden durch abgeschlossene Intervalle, insbesondere solche, welche die Vereinigung von zwei Φ -starken bzw. vollkommenen Bedeckungen betreffen.

G. Aumann.

Haupt, Otto: Zur Differentiation additiver Funktionen. Math. Nachr. 8, 93—97 (1952).

Eine topologiefreie, nur eine Maßstruktur und einen Begriff von punktweise konvergenten Mengenfolgen zugrunde legende Differentiationstheorie für Mengenfunktionen ist R. de Possel (dies. Zbl. 15, 205) zu verdanken, der die Rolle der Vitalischen Eigenschaften klar hervorgebracht hat. An Hand der Arbeiten von S. Kempisty (Fonctions d'intervalle non additives, Actual. sci. industr. Nr. 824, Paris 1939, dies. Zbl. 26, 391) und P. Romanovski [Mat. Sbornik, n. Ser. 9, 67—119 (1941)] nimmt Verf. eine ähnliche Übertragung der Differentiationstheorie von Intervallfunktionen vor. Bezeichnungen: J_0 : Grundmenge. \mathfrak{z} : Hausdorffscher σ -Körper von Teilmengen von J mit J_0 als größter Menge. m : endliches, auf \mathfrak{z} erklärtes, in J_0 vollständiges Maß (Grundmaß). i : Teilsystem von \mathfrak{z} derart, daß $J_0 \in i$ und $m(J) > 0$ für jedes $J \in i$. i -Einteilung: System t von endlich vielen, paarweise fremden $J_\nu \in i$, $\nu = 1, \dots, n$, deren Vereinigung α auf eine Nullmenge gleich J_0 ist. Norm $N(t)$ der i -Einteilung t : $\max(m(J_1), \dots, m(J_n))$. α : durch i erklärte Denjoysche Ableitungsbasis (dies. Zbl. 42, 283). Axiome: Zu jedem $J \in i$ existiert (mindestens) eine i -Einteilung t derart, daß J Element von t ist. Die i -Einteilungen bilden ein, der Inklusionsfeinheit nach, gerichtetes System. Es existieren i -Einteilungen beliebig kleiner Norm. Es existiert eine feste Nullmenge N_0 derart, daß für jedes Intervall $J \in i$ jeder Punkt $p \in J - J \cdot N_0$ total α -innerlich ist. α besitzt die de Posselsche starke Vitalische Eigenschaft. Definitionen: Auf eine reelle, endliche Funktion F mit i als Definitionsbereich, die als Intervallfunktion aufgefaßt ist, werden die üblichen Definitionen für Ober- bzw. Unteradditivität, Burkill-Integrale $\int J F$ und $\int F$, Totalvariation, Totalstetigkeit, obere bzw. untere

Derivierte \overline{DF} bzw. \underline{DF} übertragen. F heißt singulär, wenn fast überall $\overline{DF} = \underline{DF} = 0$. Sätze:

(1) Sind $\int J F$ und $\int F$ gleich und endlich für jedes $J \in i$ (Burkill-Summierbarkeit von F) und

bezeichnet $B(J)$ den gemeinsamen Wert, dann gilt $\overline{DF} = \overline{DB}$, $\underline{DF} = \underline{DB}$ fast überall. (2) Ist F von beschränkter Variation, dann sind \overline{DF} und \underline{DF} m -summierbar und es gilt

$$\int_{J_0} |\underline{DF}| dm \leq \int_{J_0} |F|, \quad \int_{J_0} |\overline{DF}| dm \leq \int_{J_0} |F|.$$

Ist überdies F Burkill-summierbar über J_0 , dann gilt $\overline{DF} = \underline{DF}$ fast überall. (3) Ist F total-

stetig, so gilt $\int F = \int \underline{DF} dm \leq \int F = \int \overline{DF} dm$. (4) Ist F von beschränkter Variation

und additiv, so ist F auf genau eine Weise darstellbar als Summe einer additiven, total-stetigen Funktion R und einer singulären Funktion S . Dabei ist $R = \int DF dm$. — Die Beweise werden in Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, III, 2. Aufl. demnächst erscheinen. [Bem. des Ref.: Durch die Kritik des Manuskriptes von Verf. angeregt, hat der Ref. die Übertragung der vorstehenden Theorie ohne die Vitalische Annahme in Angriff genommen. Die Derivierten werden entweder „global“ definiert oder durch Radon-Nikodymsche Integranden ersetzt. Beim Satze (3) ist die Ausschaltung der „Analyse Fine“ (Dieudonné) völlig geglückt, ebenso beim Satze (4), indem die Sakssche Definition (Theory of the Integral, Monografie Matem., Warszawa-Lwow 1937; dies. Zbl. 17, 300) für eine singuläre Intervallfunktion (ohne Bezug auf die Derivierten) herangezogen wird.]

Chr. Pauc.

Kappos, Demetrios A.: Über äquimeßbare (verteilungsgleiche) Funktionen. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1951, 113—128 (1952).

(\mathfrak{F}, w) sei ein vollideelles Wahrscheinlichkeitsfeld, d. h. \mathfrak{F} ein aus mindestens drei Elementen bestehender Boolescher σ -Verband mit dem Nullelement θ und dem Einselement e , und w ein in \mathfrak{F} definiertes Maß, so daß $w(e) = 1$ und $w(x) > 0$, falls $x \neq \theta$ (siehe dies. Zbl. 33, 382). [$X \leq \xi$], ($-\infty < \xi < +\infty$) bedeute die Spektralschar der Zufallsvariablen (Ortsfunktion) X über \mathfrak{F} und $\varphi_X(\xi) = w([X \leq \xi])$ ihre w -Verteilungsfunktion. X und Y heißen w -verteilungsgleich, wenn $\varphi_X = \varphi_Y$. Die Arbeit verfolgt das Ziel, Zusammenhänge zwischen der Struktur von \mathfrak{F} und der Richtigkeit der folgenden Aussage über eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ von Zufallsvariablen über \mathfrak{F} aufzudecken: A. Es gibt eine Familie $(Y_i)_{i \in I}$ paarweise unabhängiger Zufallsvariabler, so daß X_i und Y_i für jedes i verteilungsgleich sind. Die Theorie der Produkte von

Wahrscheinlichkeitsfeldern (dies. Zbl. 43, 338) liefert zunächst das folgende Kriterium, in dem \mathfrak{F}_{X_i} den kleinsten Booleschen σ -Unterverband von \mathfrak{F} über der Spektralschar von X_i bedeutet: A gilt dann und nur dann, wenn das vollideelle Produkt der Felder (\mathfrak{F}_{X_i}, w) isometrisch zu einem vollideellen Unterfeld von (\mathfrak{F}, w) ist. Hieraus folgt in dem Fall, in dem \mathfrak{F} eine empirische (d. h. höchstens abzählbare) Basis besitzt, daß A dann und nur dann auf jede höchstens abzählbare Familie $(X_i)_{i \in I}$ zutrifft, wenn in \mathfrak{F} keine Atome vorhanden sind. Ferner lassen sich Felder mit empirischer Basis konstruieren, die Atome enthalten und zu denen abzählbare Familien $(X_i)_{i \in I}$ existieren, auf die A zutrifft. Dabei wird ein Zusammenhang zwischen der Struktur spezieller Produktfelder und der Konvergenz und Summe gewisser unendlicher Reihen hergestellt, insbesondere solcher Reihen, die durch formales Ausmultiplizieren eines unendlichen Produktes von zweigliedrigen Summen entstehen. — Man erhält entsprechende Sätze über meßbare Funktionen statt über Zufallsvariable, wenn man aus einem gegebenen Maßverband mit Einselement und endlichem Maß μ durch Restklassenbildung nach dem System der Nullmengen ein Wahrscheinlichkeitsfeld herleitet; den Zufallsvariablen entsprechen dabei die Klassen μ -äquivalenter meßbarer Funktionen. Bisher war nur bekannt, daß A auf jede abzählbare Familie von Zufallsvariablen X_i über dem sogenannten eindimensionalen Lebesgueschen Maßverband zutrifft; in der Tat ist dieser atomfrei mit empirischer Basis.

K. Krickeberg.

Pfeiffer, Paul E.: Equivalence of totally finite measures on infinite product spaces. Ann. of Math., II. Ser. 56, 520—536 (1952).

$m \sim \mu$ bezeichne die Äquivalenz der Maße m, μ auf (X, S) , $m < \mu$ die absolute Stetigkeit von m bezüglich μ . Ist C eine Teilklasse des σ -Ringes S , so heiße m nullbeherrscht durch μ auf C , wenn für jede Menge $C \in C$ aus $|\mu|(C) = 0$ auch $|m|(C) = 0$ folgt; in Zeichen $m[<] \mu$. Gilt sowohl $m[<] \mu$ wie $\mu[<] m$ auf C , so heißen m und μ nulläquivalent auf C , in Zeichen $m[\sim] \mu$ auf C . Ist E ein Teilring von S , so sei E^* bzw. E_* die Klasse aller Mengen $\limsup E_n$ bzw. $\liminf E_n$, $E_n \in E$. Für endliche Maße auf (X, S) gilt dann, daß $m \sim \mu$ auf S dann und nur dann gilt, wenn $m[\sim] \mu$ auf E^* gilt, wobei der Teilring E die Voraussetzung $S = S(E)$ erfüllen muß. Es seien (X_i, S_i) , $i = 1, 2, \dots$, total meßbare Räume, (X, S) der zugehörige Produktmaßraum. Bezeichnet $X_{(n)}$ das Cartesische Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$ und $X^{(n)}$ das der restlichen X_i , so ist $X = X_{(n)} \times X^{(n)}$. Es seien $T_{(n)} x = x_{(n)}$, $T^{(n)} x = x^{(n)}$ die Projektionen von X auf $X_{(n)}$ bzw. $X^{(n)}$, $S_{(n)}$ bzw. $S^{(n)}$ seien die σ -Ringe, die durch die meßbaren Rechtecke auf $X_{(n)}$ bzw. $X^{(n)}$ erzeugt werden, ferner $S_{(n)}^*$ die Klasse $T_{(n)}^{-1}(S_{(n)})$, entsprechend $S^{(n)*}$ die Klasse $T^{(n)-1}(S^{(n)})$. Die Klasse F in X besteht aus allen meßbaren Mengen F , die entweder gleich der leeren Menge sind oder für jedes n die Form $X_{(n)} \times F^{(n)}$, $F^{(n)} = T^{(n)}(F)$, haben. Es gilt $F = F_* = F^*$. Ist $\mu(X) = 1$, $A \in S$, so sei $p_\mu(A, T^{(n)}(x))$ die durch $\mu(A \cap H) = \int_H p_\mu(A, T^{(n)}(x)) d\mu$ für alle $H \in S^{(n)*}$ modulo μ eindeutig bestimmte „bedingte Wahrscheinlichkeit“. Ist $\mu(X) = m(X) = 1$, so bedeute, daß (A) auf $C \subset S$ gilt, daß für jedes $C \in C$ und jedes n $p_\mu(C, T^{(n)}(x))$ und $p_m(C, T^{(n)}(x))$ so erklärt werden können, daß, wenn eine von beiden für $x \in X$ verschwindet, die andere ebenfalls verschwindet. Auf S ist (A) erfüllt, wenn $m \sim \mu$ auf S gilt. Der Hauptsatz der Arbeit lautet: Dann und nur dann ist $m \sim \mu$ auf S , wenn (A) auf einem E^* mit $S = S(E)$ gilt und wenn $m[\sim] \mu$ auf F gilt. Speziell ergibt sich daraus: Sind m und μ total endliche direkte Produktmaße $m_1 \times m_2 \times \dots$ bzw. $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots$ auf (X, S) , so ist $m \sim \mu$ auf S dann und nur dann, wenn sowohl $m_n \sim \mu_n$ auf S_n für jedes n , wie auch $m[\sim] \mu$ auf F gilt. Für Sätze von Kakutani (dies. Zbl. 30, 23) und Kawada (dies. Zbl. 41, 73) werden neue Beweise gegeben. G. Köthe.

Markus, Lawrence: On completeness of invariant measures defined by differential equations. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 341—353 (1952).

A function $\mu(x, y)$ defined for all (x, y) is constructed such that (i) it possesses partial derivatives of all orders everywhere, (ii) it is ≥ 0 and the set $Z = [\mu(x, y) = 0]$ is nowhere dense, (iii) the Lebesgue measure $m_L(Z)$ of Z is $= \infty$. $\mu(x, y)$ is an integrating factor of the differential system

$$\frac{dx}{dt} = \mu(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -2 \frac{\partial \mu}{\partial x} y + 1.$$

The „invariant“ measure m_μ defined on the Lebesgue measurable sets A by

$$m_\mu(A) = \iint_A \mu(x, y) dx dy$$

is not complete in the sense that there exists an m_μ -nullset, namely Z , of positive Lebesgue measure. This phenomenon is made possible by the flexibility of functions of class $C^{(\infty)}$, which can vanish on a nowhere dense closed set and be nevertheless positive on the open components of the complement; it does not occur with analytic integrating factors, more precisely. Theorem:

If $f(x, y)$ and $g(x, y)$ are two functions defined on an open set R of the plane, not vanishing simultaneously, possessing continuous partial derivatives of the first order and if $\mu(x, y)$ is an analytic integrating factor, then the m_μ -measure is complete, that is

$$(m_\mu(A) = 0) \sim (m_L(A) = 0).$$

[Remark — There is a misprint in the last formula (5), p. 347; the first minus sign in the exponent of e must be placed on a level with the fraction bar]. Chr. Pauc.

Kirsch, A.: Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen. Math. Ann. **124**, 343—363 (1952).

Es sei R ein abstrakter Raum und Γ eine Transformationsgruppe in R . Für $\tau \in \Gamma$ und $x \in R$ bedeute τx das aus x durch Anwendung von τ hervorgehende Element. Sind $f(x)$ und $g(x)$ in R definierte reelle Funktionen, so bedeute die Relation $f \simeq g$, daß es ein $\tau \in \Gamma$ mit $f(x) = g(\tau x)$ gibt. Zwei Funktionen f, g aus einer Menge \mathfrak{M} von Funktionen heißen zerlegungsgleich in \mathfrak{M}

($f \approx g$ in \mathfrak{M}), wenn zwei Zerlegungen $f = \sum_1^n f_v$, $g = \sum_1^n g_v$ existieren mit $f_v \simeq g_v$ ($v = 1, \dots, n$).

Diese Relation ist reflexiv, symmetrisch und — falls \mathfrak{M} linear und Γ -frei ist — auch transitiv. Enthält noch \mathfrak{M} mit f auch $|f|$, mit f und g auch $f \cdot g$, mit f und g ($g \geq f \geq 0$) auch f/g ($0/0$ bedeute 0), mit f_n ($f_n \geq f_{n+1} \geq \dots \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$) auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, so gilt der Äquivalenzsatz:

für $f, f', g, g' \in \mathfrak{M}$ und $f \geq g' \approx g$, $g \geq f' \approx f$ in \mathfrak{M} gilt $f \approx g$ in \mathfrak{M} . Dann läßt sich durch die Relation $f \gtrsim g$, die die Existenz einer Funktion $g' \in \mathfrak{M}$ mit $f \geq g' \approx g$ bedeutet, eine Teilordnung in \mathfrak{M} einführen, die eine Teilordnung der Klassen von in \mathfrak{M} zerlegungsgleichen Funktionen induziert. Fixiert man eine nichtleere Menge $W \subseteq R$ mit der charakteristischen Funktion $e(x)$, so besitzt die Klasse \mathfrak{B} der Funktionen $f(x)$ mit $|f(x)| \leq e(\sigma_1 x) + \dots + e(\sigma_m x)$ bei geeigneten $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Gamma$ alle für \mathfrak{M} aufgezählten Eigenschaften. Die Relationen $f \approx g$, $f \gtrsim g$ werden im folgenden auf \mathfrak{B} bezogen. Die lineare und e enthaltende Funktionenmenge $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}$ heiße ein Feld, wenn mit $f \in \mathfrak{F}$, $f' \simeq f$ auch $f' \in \mathfrak{F}$ gilt. Gilt sogar $f' \in \mathfrak{F}$, wenn $f \in \mathfrak{F}$ und $f' \approx f$ ist, dann heiße das Feld \mathfrak{F} zerlegungsfrei. Das im Felde \mathfrak{F} definierte lineare Funktional $L(f)$ heiße ein Integral, wenn $L(e) = 1$ ist und $L(f) \geq L(g)$ für $f \gtrsim g$ bzw. $L(f) = L(f')$ für $f \simeq f'$ gilt. Das Integral L heiße zerlegungsvariant, wenn aus $f \gtrsim g$ immer $L(f) \geq L(g)$ folgt. Dann und nur dann, wenn $e(x)$ nicht ≈ 0 ist, existieren zerlegungsvariante Integrale. In diesem Falle existieren auch in der ganzen Menge \mathfrak{B} erklärte „universelle“ Integrale, und jedes zerlegungsvariante Integral kann zu einem solchen fortgesetzt werden. Ist L ein zerlegungsvariantes Integral im zerlegungsfreien Felde \mathfrak{F} , so gibt es eine zerlegungsvariante Fortsetzung L^* von L , die in einem zerlegungsfreien Felde $\mathfrak{F}^* \supset \mathfrak{F}$ erklärt ist, mit der Eigenschaft, daß jede zerlegungsvariante Fortsetzung von L in \mathfrak{F}^* mit L^* übereinstimmt, für $f \in \mathfrak{B} - \mathfrak{F}^*$ aber unendlich viele zerlegungsvariante Fortsetzungen von L existieren, die auf f verschiedene Werte annehmen. Ist die Gruppe Γ abelsch, so ist jedes Integral zerlegungsvariant. Im Falle, daß R ein euklidischer Raum und Γ die Translationsgruppe ist, werden die Beziehungen der eingeführten Begriffe zum Riemannschen Integral untersucht. A. Császár.

Hadwiger, H. und A. Kirsch: Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit. Portugaliae Math. **11**, 57—67 (1952).

Die Gedanken der vorsteh. besprochenen Arbeit werden im Falle $R =$ der eindimensionale euklidische Raum, $\Gamma =$ die Translationsgruppe, $W = [0, 1]$ durchgeführt. A. Császár.

Cafiero, Federico: Sull'inversione dell'ordine d'integrazione. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **21**, 58—63 (1952).

Mit Hilfe des Lusinschen Satzes über die Stetigkeit meßbarer Funktionen nach einer — dem Maße nach — beliebig kleinen Verengerung ihres Definitionsbereiches wird die Vertauschungsregel

$$\int_G dx \int_H f(x, y) dy = \int_H dy \int_G f(x, y) dx,$$

in der G und H meßbare Teilmengen zweier abgeschlossener Intervalle I_1 und I_2 bedeuten, unter den folgenden Voraussetzungen bewiesen: f ist meßbar im Rechteck $I_1 \times I_2$; $f(x, y)$ ist für fast alle x aus I_1 summierbar über I_2 als Funktion von y und für fast alle y aus I_2 summierbar über I_1 als Funktion von x ; eines der beiden iterierten Integrale existiert für alle meßbaren Teilmengen G und H von I_1 bzw. I_2 . Man beachte, daß f in diesem Fall nicht immer summierbar über $G \times H$ ist.

K. Krickeberg.

Allen, A. C.: A generalization of a theorem by Hardy and Littlewood. Proc. Amer. math. Soc. 3, 727—731 (1952).

Ist $\varphi(x)$ nicht negativ und L -integrierbar in $(0,1)$, so bezeichne $y = \bar{\varphi}(x)$ die nicht-steigende Umschichtung („rearrangement“) von φ [d. h. die Umkehrfunktion von $x = m(\{x: \varphi(x) \geq y\})$]. Verf. verallgemeinert das Hardy-Littlewoodsche Ergebnis [Acta math. 54, 81—116 (1930)], wonach für jede nicht-negative und L -integrierbare Funktion $f|(0,1)$ und die zugehörige Funktion

$$\theta(x) = \max_{0 \leq \xi < x} \frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f(t) dt \quad \text{die Ungleichung} \quad \bar{\theta}(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x \bar{f}(t) dt$$

gilt, in folgender Weise: Sind $f|(0,1)$ und $k|(0,1)$ nicht-negativ und L -integrierbar und insbesondere k nicht-steigend, und setzt man

$$\vartheta(x) = \max_{0 < h \leq x} \frac{1}{h} \int_0^h k\left(\frac{t}{h}\right) f(x - h + t) dt,$$

so gilt

$$\bar{\vartheta}(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x k\left(\frac{t}{x}\right) \bar{f}(t) dt.$$

Auf eine für beide Ungleichungen gültige äquivalente Form wird hingewiesen.

G. Aumann.

• Menger, Karl: Calculus. A modern approach. Chicago: The Bookstore Illinois Institute of Technology 1952. 255 p.

Zweifellos ist die landläufige Bezeichnung und Terminologie der Differential- und Integralrechnung in manchen Punkten nicht ideal. Die vorliegende Einführung in die Elemente dieser Disziplin ist von dem Gedanken beherrscht, daß eine modernisierte („streamlined“) Bezeichnungsweise Verständnis und Anwendung wesentlich erleichtern müßte. Von der klassischen Symbolik von Leibniz, deren suggestive Kraft die historische Entwicklung der Analysis einstens so wesentlich beschleunigt hat, wird abgerückt und jener bereits in der Funktionalanalysis gebräuchlichen Bezeichnungsweise der Vorzug gegeben, welche mit Unterdrückung der Argumente eine Funktion durch ein einziges Zeichen darstellt (f bezeichnet die Funktion an sich, $f x$ den Funktionswert an der Stelle x). Dieses Prinzip verbietet, die Funktion, welche der Zahl x die Zahl x zuordnet, mit x zu bezeichnen; sie erhält daher das Funktionszeichen I ; analog ist I^2 das Zeichen für die

Funktion, welche der Zahl x die Zahl x^2 zuordnet, usw. Konsequenter wird $\int_0^{\pi} \sin$ statt $\int_0^{\pi} \sin x dx$,

$\mathfrak{D} \sin = \cos$ statt $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ $\mathfrak{D} I^2 3$ statt $\frac{d}{dx} x^2 \Big|_{x=3}$ geschrieben, usw. Diese

damit vollzogene strenge Trennung in der Bezeichnung von Zahl und Funktion beseitigt in der Tat eine schwache Stelle in der seither gebräuchlichen Symbolik. Auf der Hauptbühne der Analysis, in der Theorie der Funktionen mehrerer Veränderlicher mit ihren partiellen Grenzübergängen, ist allerdings eine gewisse Bezugnahme auf die Argumente unerlässlich; auch hier

hat Verf. Vorschläge zur Hand [an Stelle von $\frac{\partial F}{\partial g} \frac{dg}{dx} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{dh}{dx}$ tritt die neue Schreibweise

$\mathfrak{D}_1 F(g, h) \mathfrak{D} g + \mathfrak{D}_2 F(g, h) \mathfrak{D} h$, usw.]. Neben diesen die Symbolik des Kalküls betreffenden Vorschlägen zeigt der Gesamtaufbau einige neuartige pädagogische Züge, wie die Kapitelüberschriften erkennen lassen: 1. Die zwei Grundprobleme des Kalküls und ihre Lösung für lineare Funktionen; 2. die graphische Lösung; 3. die numerische Lösung der beiden Grundprobleme; 4. die Idee und der Gebrauch von Funktionen; 5. über Grenzwerte; 6. die Grundbegriffe (Ableitung und Integral) des Kalküls; 7. Anwendung auf Physik; 8. das Rechnen mit Ableitungen; 9. das Rechnen mit Stammfunktionen; 10. der Mittelwertsatz und Folgerungen daraus; 11. Funktionen von zwei Veränderlichen. (Die ersten drei vorbereitenden Kapitel nehmen über ein Fünftel des Buches ein und stellen eine Differential- und Integralrechnung der linearen und einiger elementarer Funktionen dar.) Es liegt im einführenden Charakter des Buches und in seinem Ziel, möglichst rasch an die praktischen Anwendungen heranzuführen, wenn auf jede Problematik hinsichtlich des Wesens der reellen Zahlen verzichtet und die Ausführbarkeit der fraglichen Operationen im allgemeinen stillschweigend vorausgesetzt wird. Über 300 Übungsaufgaben sind dem Text beigegeben.

G. Aumann.

Nevanlinna, Rolf: Beweis des Satzes über die Vertauschbarkeit der Differentiationen. Math. Z. 56, 120—121 (1952).

Der bekannte Schwarzsche Satz wird mit Hilfe des Integrals von $f_x dx + f_y dy$ über dem Rand des Rechtecks mit Eckpunkten (a, b) , $(a + h, b)$, $(a + h, b + k)$, $(a, b + k)$ bewiesen. A. Császár.

Ridder, J.: Das bestimmte Integral. Simon Stevin 29, 1—12 (1952) [Holländisch].

Diese Darstellung zweier bekannter Definitionen des Integrals einer in einem abgeschlossenen Intervall beschränkten Funktion dient der Vereinfachung der elementaren Teile der Lehre vom Integral. Die erste, für Mathematiker im Nebenfach bestimmt, operiert mit Folgen von Zerlegungen des Integrationsbereiches in endlich viele Intervalle, deren maximale Länge gegen Null strebt; die Existenz des Integrals stückweise monotoner Funktionen wird bewiesen. Die zweite erklärt das obere, untere und Riemannsche Integral durch Anwendung des Moore-Smithschen Grenzwertbegriffs: die Ober-, Unter- und Riemannschen Summen sind Funktionen der Zerlegungen des Integrationsbereiches in endlich viele Intervalle, und eine Zerlegung gilt als auf eine andere folgend, wenn sie aus dieser durch Hinzufügen weiterer Teilpunkte entsteht. Der Zusammenhang beider Verfahren miteinander und mit anderen gebräuchlichen Definitionen wird besprochen.

K. Krickeberg.

McShane, E. J. and T. A. Botts: A modified Riemann-Stieltjes integral. Duke math. J. 19, 293—302 (1952).

Die übliche Definition des Riemann-Stieltjesschen (RS) Integrals im q -dimensionalen euklidischen Raume R^q wird durch eine engere ersetzt, die für $q = 1$ folgendermaßen lautet: B sei ein abgeschlossenes Intervall und die Menge $D \supseteq B$ sei beschränkt, $f(x)$ sei in D , $g(x)$ in B erklärt und beschränkt. Für

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n, [x_1, x_n] \supseteq D, I_\nu = [x_{\nu-1}, x_\nu], \xi_\nu \in I_\nu \cap D$$

bilde man die Summe $S = \sum_{\nu=1}^n f(\xi_\nu) g(I_\nu \cap B)$, wo $g(I) = g(b) - g(a)$ für $I = [a, b]$ bedeutet. Der eindeutig bestimmte Grenzwert der Summen S für $\max(x_\nu - x_{\nu-1}) \rightarrow 0$ heiße (wenn er existiert) $J(f, D; g, B)$. Existiert $J(f, D; g, B)$, so existiert auch $\int_B f(x) dg(x)$ (im gewöhnlichen Sinne) und beide Werte sind gleich. Es wird gezeigt, daß die Existenz des so definierten Integrals bei nichtabnehmendem $g(x)$ durch die Übereinstimmung den Darbouxschen ähnlicher oberer und unterer Integrale, ferner durch die Nullinhalte [bezüglich $g(x)$] der Mengen $W_\delta \subseteq B$ der Punkte, wo $f(x)$ bezüglich D eine Schwankung $\geq \delta$ besitzt, endlich durch das Nullmaß [bezüglich $g(x)$] der Menge $W \subseteq B$ der Punkte, wo $f(x)$ bezüglich D unstetig ist, charakterisiert werden kann, und daß für beliebiges $g(x)$ bei $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, $D \supseteq B$ aus der Existenz von $J(f, D; g, B_i)$ ($i = 1, \dots, n$) die Existenz von $J(f, D; g, B)$ folgt, während diese Eigenschaften dem gewöhnlichen RS Integral und dem Pollardschen Integral [Quart. J. Math., Oxford, II. Ser. 49, 73—138 (1923)] nicht alle zukommen.

A. Császár.

Stöhr, Alfred: Bemerkungen über Kettenbruchintegrale. Math. Nachr. 8, 157—165 (1952).

L'A. expose de nouvelles généralisations dans l'algorithme des fractions continues à échelons différentiels „Kettenbruchintegrale“ que l'A. et le rapporteur ont étudié sous divers aspect en 1951 (ce Zbl. 44, 56) et que l'on obtient par un passage à la limite au continu sur certaines fractions continues, semblable à celui qui origine la notion d'intégrale en partants de la notion de somme. Le fait que la fonction qui en résulte lorsque l'une des limites de l'intervalle où il est défini devient variable, satisfasse à une certaine équation de Riccati et puisse aussi être obtenue comme quotient des solutions d'un système différentiel linéaire rapproche cet algorithme de la théorie des équations différentielles et ouvre la voie de nouvelles applications aux réseaux électriques et aux systèmes physiques linéaires en général. L'A. étudie maintenant une généralisation des „Kettenbruchintegrale“ dans laquelle les fonctions p_{ij} considérées dans son article précédent (ce Zbl. 44, 56) sont remplacées par certaines matrices fonctionnelles et en fait une application intéressante (moyennant des matrices symplectiques) à la solution de systèmes canoniques de la forme $du_\nu/dx = \partial H/\partial v_\nu$, $dv_\nu/dx = -\partial H/\partial u_\nu$ (H fonction hamiltonienne quadratique). — L'A. suggère aussi l'intérêt à considérer des „Kettenbruchintegrale“ en remplaçant l'accroissement Δx_i de la variable dans chaque double élément par les variations de quatre nouvelles fonctions dans cet intervalle.

De cette sorte on obtiendrait une généralisation semblable à celle de Stieltjes pour l'intégrale et l'algorithme pourrait être appliqué directement aux lignes électriques à constantes distribuées avec discontinuité. Au début de l'article l'A. fait quelques manifestations sur la priorité de l'introduction de l'algorithme en faveur du rapp. que celui-ci accueille avec reconnaissance.

P. Puig Adam.

Fujinaka, Hiroshi: On the solution of the integral inequality $x u(x) \leq$

$$\int_0^x (\nu + \varepsilon(t)) u(t) dt. \text{ Math. Japonicae } 2, 143-145 (1952).$$

In der im Titel genannten Ungleichung bedeutet ν eine positive Zahl und $\varepsilon(x)$

eine nicht-negative stetige Funktion im Intervall $[0, 1]$ mit endlichem $\int_0^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt$.

Es wird bewiesen, daß jede nicht-negative, stetige Lösung $u(x)$ der fraglichen Ungleichung mit $u(x) = o(x^{\nu-1})$ für $x \rightarrow 0$ identisch verschwindet. G. Aumann.

Gagaev, B. M.: Eine Verallgemeinerung des Fourierintegrals durch N. I. Lobačevskij. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 79—86 (1952) [Russisch].

In den Mitteilungen der Kasaner Universität 1851 hat Lobačevskij folgende Formel bewiesen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^h f(x) \varphi(\lambda z - xz) dx = [f(\lambda + 0) + f(\lambda - 0)] \int_0^{\infty} \frac{1}{x} (\psi(x) - \psi(-x)) dx,$$

$0 < \lambda < h$, $\varphi(x) = \varphi'(x)$. Für $h = \infty$, $\varphi(x) = \cos x$ geht diese Formel in die bekannte, von Fourier 1822 angegebene über. In der vorliegenden Note wird der Beweis Lobačevskijs besprochen und sein Satz mit einem ähnlichen von Liouville aus dem Jahre 1836 verglichen, von dem man nicht weiß, ob Lobačevskij ihn gekannt hat.

W. Burau.

Kuipers, L.: Properties of some elementary functions. Indagationes math. 14, 388—393 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 388—393 (1952).

Die Verallgemeinerung der Sätze der Arbeit von Erdős und Grünwald (dies. Zbl. 21, 395), vom Verf. selbst (dies. Zbl. 42, 292) und von Meulenbeld (dies. Zbl. 43, 284) für gewisse reelle differenzierbare Funktionen wird fortgesetzt. Gy. Sz. Nagy.

Sevdić, Milenko: Définition des fonctions hyperboliques au moyen du théorème de binome. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 7, 140—162 und französ. Zusammenfassg. 163—168 (1952) [Kroatisch].

Aus dem Additionssatz

$$X(r+s) + X(r-s) = 2X(r)X(s),$$

den Verf. für ganze rationale r, s dem binomischen Theorem entnimmt und ohne Begründung auf rationale Argumente ausdehnt, wird $X(t)$ für $t \leq \infty$ durch wiederholte Argumentalbierung, Vorzeichenbestimmung, Stetigkeitsbetrachtung konstruiert. Differentialgleichung für $e^t \pm e^{-t}$.

W. Maier.

Hyers, D. H. and S. M. Ulam: Approximately convex functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 821—828 (1952).

In this paper ε -convex functions are defined and a theorem of approximations of such functions by convex functions is proved. A function $f(x)$ defined on a convex subset S of the n -dimensional euclidean space is called ε -convex if

$$f(hx + (1-h)y) \leq hf(x) + (1-h)f(y) + \varepsilon,$$

for all x and y in S and for $0 \leq h \leq 1$; ε stands for a fixed positive number. — It is first shown that if S is a closed, bounded, convex, subset of an open convex set, there exists a convex function $g(x)$ defined in S and such that, in S , $|g(x) - f(x)| \leq k\varepsilon$ where $k = (n^2 + 3n)/(4n + 4)$. — If S is an open, convex, subset of the euclidean space, it may be defined as the union of an ascending sequence of convex, compact subsets. The diagonal process yields easily the approximation theorem, in the same form as above, in S .

C. Racine.

Green, John W.: Approximately convex functions. Duke math. J. 19, 499—504 (1952).

Annähernd konvex und zwar c -konvex werden solche in einer n -dimensionalen konvexen Mannigfaltigkeit S definierten Funktionen genannt [s. D. H. Hyers und S. M. Ulam, Bull. Amer. math. Soc. 27, 300—301 (1951)], die die Ungleichung $f[px + (1-p)y] \leq pf(x) + (1-p)f(y) + c$ für jedes $0 \leq p \leq 1$ und für alle n dimensional Vektoren x, y von S erfüllen. — Einige typische Sätze sind: Die c -konvexen Funktionen sind von unten bzw. von oben beschränkt auf jeder beschränkten bzw. kompakten Teilmenge von S . Die Oszillation von f ist nirgends größer als c . Ist g die größte konvexe Minorante der halbsteigigen c -konvexen Funktion f , so gilt $g \leq f \leq g + p_n c$, wo $p_0 = 0$, $p_{2k} = 1 + \frac{k}{2k+1} p_{k-1} + \frac{k+1}{2k+1} p_k$, $p_{2k+1} = p_k + 1$ ist, d. h. $p_{2j-1} = j$, $p_n \sim 2 \log n$. Es wird durch Beispiele gezeigt, daß diese Ungleichung für $n = 1, 2, 3$ scharf ist. Eine etwas schwächere Ungleichung wird unter Weglassen der Semikontinuitäts-Bedingung bewiesen, es wird aber vermutet, daß die ursprüngliche Ungleichung ihre Gültigkeit auch in diesem Falle behält.

J. Aczél.

Ostrowski, Alexandre: Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de I. Schur. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 253—292 (1952).

In Weiterführung von I. Schurschen Untersuchungen [S.-Ber. Berliner math. Ges. 22, 9—20 (1923)] werden die Ungleichungen, welche in den letzten Jahren von H. Weyl (dies. Zbl. 32, 387), Ky Fan (dies. Zbl. 41, 6), G. Polya (dies. Zbl. 41, 154), A. Horn (dies. Zbl. 38, 72) auf-

gestellt wurden, beträchtlich verallgemeinert. — $y_v = \sum_{\mu=1}^n s_{v\mu} x_\mu$, $v = 1, \dots, n$, heißt eine S -Transformation, wenn $s_{v\mu} \geq 0$ und jede Zeilen- und jede Spaltensumme der Matrix $((s_{v\mu}))$ gleich 1 ist. Eine Funktion $F(x_1, \dots, x_n)$, erklärt für $a < x_v < b$, $v = 1, \dots, n$, heißt S -konvex, wenn für jedes System (x_1, \dots, x_n) aus dem Definitionsbereich und jede S -Transformation $F(y_1, \dots, y_n) \leq F(x_1, \dots, x_n)$. S -Konvexität zieht Symmetrie nach sich. Steht in vorausgehender Ungleichung das Gleichheitszeichen nur für den Fall, daß die y_v eine Permutation der x_v sind, so liegt S -Konvexität im engeren Sinne vor. Es wird bewiesen: Ist $k > 1$, $F(x_1, \dots, x_k)$ wachsend und S -konvex, ferner $x_1 \geq \dots \geq x_k$, $y_1 \geq \dots \geq y_k$ und $y_1 + \dots + y_\lambda \leq x_1 + \dots + x_\lambda$ für $\lambda = 1, \dots, k$, so gilt $F(y_1, \dots, y_k) \leq F(x_1, \dots, x_k)$; ist F S -konvex im engeren Sinne, so steht in der letzten Ungleichung „gleich“ nur für $y_\lambda = x_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, k$. Sind $G(x_1, \dots, x_k)$, $F(x_1, \dots, x_k)$ wachsende Funktionen, die erste S -konkav, die zweite S -konvex, ferner ξ_1, \dots, ξ_n aus $a < \xi < b$, $n > k$, wobei $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$ die aufsteigende Anordnung der ξ_v bezeichnet, und gehen η_1, \dots, η_n aus den ξ_v durch eine S -Transformation hervor, so gilt $G(\eta_1, \dots, \eta_k) \geq G(\omega_1, \dots, \omega_k)$, und $F(\xi_1, \dots, \xi_k) \leq F(\omega_n, \dots, \omega_{n-k+1})$. Es folgen Differentialkriterien für die S -Konvexität; als Beispiele hierzu werden Konvexitäts-eigenschaften gewisser einfacher, aus den symmetrischen Grundfunktionen aufgebauten Funktionen angegeben. Die Anwendungen betreffen hauptsächlich die Eigenwerte hermitescher

Formen: (*) Ist $H(X) = \sum_{\mu, \nu=1}^n h_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu$ eine hermitesche Form mit den Eigenwerten $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_n$ (in aufsteigender Ordnung) in (a, b) , ist ferner $1 \leq k \leq n$, und sind G und F wie oben erklärt, so gilt für jedes System X_1, \dots, X_k von orthonormalen Vektoren

$$G(H(X_1), \dots, H(X_k)) \geq G(\omega_1, \dots, \omega_k), F(H(X_1), \dots, H(X_k)) \leq F(\omega_n, \dots, \omega_{n-k+1}).$$

Für $k = n$ und den Fall, daß das Grundintervall (a, b) gleich $(0, +\infty)$ ist, wird dies ein Satz von I. Schur; wählt man für G und F speziell die Funktion $x_1 + \dots + x_k$, so ergibt sich ein Resultat von Ky Fan. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Ergebnisse von H. Weyl, G. Polya und A. Horn durch Einführung allgemeiner S -konvexer (konvexer) Funktionen verallgemeinern. Schließlich wird für den Schurschen Satz, wonach die Eigenwerte der ver-

kürzten hermiteschen Form $H_1(X) = \sum_{\mu, \nu=1}^{n-1} h_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu$ die Eigenwerte der vollen Form trennen,

ein kurzer Beweis mitgeteilt; der Zusammenhang mit den obigen Sätzen über S -konvexe (konkave) Funktionen führt zu einer Verallgemeinerung des Fischer-Courantschen Prinzips [R. Courant, Math. Z. 7, 1—57 (1920)]: Ist unter den Voraussetzungen des obigen Satzes (*) $m + k \leq n$, so gilt $G(\omega_{m+1}, \dots, \omega_{m+k}) = \max [\min G(H(X_1), \dots, H(X_k))]$, bei der min-Bildung durchlaufen X_1, \dots, X_k die orthonormalen Systeme orthogonal zum Vektorsystem C_1, \dots, C_m , und das letzte variiert beliebig bei der max-Bildung) und eine entsprechende min-max-Gleichung für F .

G. Aumann.

Rado, R.: An inequality. J. London math. Soc. **27**, 1—6 (1952).

Bezeichne ν das variable Element der Menge $N = \{1, \dots, n\}$. Eine Funktion α von ν werde als das geordnete System der Werte $\alpha(\nu) = \alpha_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) aufgefaßt und dieses, falls α reell ist, als der Punkt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ eines n -dimensionalen Euklidischen Raumes gedeutet. Nachher sollen $\alpha, \beta, \varrho, \sigma, x$ reelle Funktionen von ν bezeichnen, insbesondere x eine positive Funktion und ϱ, σ Permutationen von N . Es werde $f_\alpha(x) = \sum_{\varrho} x_{\varrho_1}^{\alpha_1} \cdots x_{\varrho_n}^{\alpha_n}$ gesetzt. Satz von

Muirhead (s. Hardy-Littlewood-Polya, Inequalities, Cambridge 1934, dies. Zbl. **10**, 107; Theorem 45 des Buches) gibt die notwendige und hinreichende Bedingung an, damit $f_\alpha(x) \leq f_\beta(x)$ für alle x gilt. Und zwar, wenn $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n, \beta_1 \geq \dots \geq \beta_n$ gesetzt wird, so lautet diese Bedingung: $\alpha_1 + \dots + \alpha_\nu \leq \beta_1 + \dots + \beta_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n-1$), $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Wird β_ϱ durch $\beta_\varrho(\nu) = \beta_{\varrho_\nu}$ definiert und mit $H(\beta)$ die konvexe Hülle der $n!$ Punkte β_ϱ bezeichnet, so lautet Muirheads Satz in einer neuen Form: Dann und nur dann gilt $f_\alpha(x) \leq f_\beta(x)$ für alle x , wenn $\alpha \in H(\beta)$. Entsprechend dieser eleganten Form ist auch der Beweis sehr elegant. Ferner läßt sich der Satz bedeutend verallgemeinern, so daß man an Stelle der symmetrischen Permutationsgruppe von N eine beliebige Untergruppe G dieser Gruppe treten läßt. Wird nämlich $f_{\alpha, \alpha}(x) = \sum_{\varrho \in G} x_{\varrho_1}^{\alpha_1} \cdots x_{\varrho_n}^{\alpha_n}$ gesetzt, ferner mit $H_G(\beta)$ die konvexe Hülle der Punkte β_ϱ ($\varrho \in G$) bezeichnet, so gilt Theorem 1: Dann und nur dann ist $f_{\alpha, \alpha}(x) \leq f_{\beta, \beta}(x)$ für alle x , wenn

$\alpha \in H_G(\beta)$. Ein Spezialfall ist Theorem 2: Dann und nur dann gilt $\sum_{\lambda=0}^{n-1} x_{1+\lambda}^{\alpha_1} \cdots x_{n+\lambda}^{\alpha_n} \leq x_1 + \dots + x_n$ ($x_{n+\nu} = x_\nu$, $\nu = 1, \dots, n-1$) für alle x , wenn $\alpha_\nu \geq 0$ ($\nu = 1, \dots, n$), $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$. Außerdem wird Theorem 1 mit Untersuchungen über den Grenzfall $f_{\alpha, \alpha}(x) = f_{\beta, \beta}(x)$ ergänzt. Der Beweis von Theorem 1 ist sehr einfach. L. Rédei.

Biernacki, M.: Sur quelques propriétés des fonctions de distances. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **31**, 305—318 (1952).

Durch eine abstandsgeometrische Interpretation einer Ungleichung von G. Aumann (dies. Zbl. **8**, 253) und H. Kneser (dies. Zbl. **10**, 52), betreffend das Maximum des absoluten Betrages des Produktes von zwei Polynomen auf einem Kontinuum, gelangt Verf. zur Untersuchung von Ungleichungen der allgemeineren Art

$$\Phi(S(\Phi_1|E), \dots, S(\Phi_n|E)) \leq C_n S(\Phi(\Phi_1, \dots, \Phi_n)|E),$$

worin $S(\varphi|E) = \sup \{\varphi(x) : x \in E\}$ gesetzt ist. Insbesondere werden die Fälle behandelt, daß E eine beschränkte abgeschlossene Punktmenge im Raum, $\Phi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ oder $x_1 \cdots x_n$, und $\Phi_i(x) = |x, a_i|^p$, die p -te Potenz des Abstandes des Punktes x von einem festen Punkt a_i , sind. Für die von E und a_1, \dots, a_n unabhängigen Konstanten C_n werden zum Teil scharfe Werte angegeben. G. Aumann.

Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder: A note on quasi-analytic functions. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **4**, 57—60 (1952).

The theorem of Denjoy-Carleman can be enounced in the following form: A class $C\{M_n\}$ of infinitely differentiable functions ($\lim M_n^{1/n} = \infty$) is not quasi-analytic if and only if

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^c}{M_{n+1}^c} < \infty,$$

where $\log M_n^c$ is the greatest convex minorant of $\log M_n$ [Mandelbrojt, Rice Institute Pamphlet **29**, No. 1, 1942; Duke math. J. **11**, 341—349 (1944); Bang, On quasi-analytiske Funktioner, Kjöbenhavn 1946]. The authors give a new proof of one half of the theorem by exhibiting the function

$$f(t) = \frac{M_0^c}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{st} ds}{(s-1)^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{a_k}\right)}, \quad a_k = \frac{M_k^c}{M_{k-1}^c}$$

which, if (*) is satisfied, belongs to $C\{M_n\}$, is not identically zero and $f^{(n)}(t) = 0$ for $t > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — The function $f(t)$ occurs in former work of the authors

(this Zbl. 35, 192). It seems to the reviewer that the earlier proof of the sufficiency of condition (*), based on infinitely repeated averages, as presented in Bang's thesis, is simpler. J. Horváth.

Whaples, G.: Carathéodory's temperature equations. J. rat. Mech. Analysis 1, 301—307 (1952).

Zu Mengen X_1, \dots, X_n ($n \geq 2$) seien Mengen $R_{ik} \subseteq X_i \times X_k$ ($i \neq k$) gegeben, bei denen $(x, x') \in R_{ik}$ dasselbe bedeutet wie $(x', x) \in R_{ik}$, und es sei eine der folgenden beiden Bedingungen erfüllt: (1) Aus $i \neq j \neq k \neq i$, $(x_i, x_j) \in R_{ij}$, $(x_j, x'_k) \in R_{jk}$, $(x_i, x'_k) \in R_{ik}$ folgt $(x_i, x'_k) \in R_{ik}$; (2) $n \geq 3$, und aus $i \neq j \neq k \neq i$, $(x_i, x_j) \in R_{ij}$, $(x_j, x_k) \in R_{jk}$ folgt $(x_i, x_k) \in R_{ik}$. In der Menge G der n -tupel (x_1, \dots, x_n) mit $(x_i, x_k) \in R_{ik}$ (für alle $i \neq k$) wird die feinste Klasseneinteilung hergestellt, bei welcher zwei Elemente (x_1, \dots, x_n) , (x'_1, \dots, x'_n) von G mit $x_i = x'_i$ für mindestens einen Index i stets in der gleichen Klasse liegen. K sei die Menge dieser Klassen. Gibt es $(x_1, \dots, x_n) \in G$ mit $x_i = x$, so wird $f_i(x)$ eindeutig durch $(x_1, \dots, x_n) \in f_i(x) \in K$ bestimmt; andernfalls wird $f_i(x)$ nicht definiert. Dann bedeutet $(x_1, \dots, x_n) \in G$ dasselbe wie $f_1(x) = \dots = f_n(x)$. Ist im Falle $n \geq 3$ das System der R_{ik} normalisiert, d. h. gibt es zu $(x, x') \in R_{ik}$ stets ein $(x_1, \dots, x_n) \in G$ mit $x_i = x$, $x_k = x'$, so sind die Voraussetzungen (1) und (2) gleichbedeutend; andernfalls wird durch Gegenbeispiele gezeigt, daß weder (1) aus (2) noch (2) aus (1) folgt. Sind alle X_i gleich der Menge der m -tupel $[y_1, \dots, y_m]$ reeller Zahlen, so läßt sich K eindeutig auf eine Menge reeller Zahlen abbilden, so daß in der gewonnenen Kennzeichnung von G die f_i durch reellwertige Funktionen g_i ersetzt werden können. Diese Kennzeichnung von G wurde von Carathéodory bei seiner axiomatischen Begründung der Thermodynamik ohne Beweis benützt. Nun benötigt man aber vom physikalischen Standpunkt aus noch Stetigkeitsaussagen über die g_i unter entsprechenden Voraussetzungen über die R_{ik} . Stetige g_i sind aber schon unmöglich in dem einfachen Falle: $m = 1$, $n = 2$, $R_{12} =$ Menge der (x, x') mit $\sin(x - x') = 0$. Man kann nun aber wenigstens die lokale Parametrisierung durch stetige Funktionen erreichen, wenn man R_{ik} durch eine stetige Funktion F_{ik} als die Menge der (x, x') mit $F_{ik}(x, x') = 0$ erklärt und für jedes durch Einschränkung auf genügend kleine $X_i^* \subseteq X_i$ entstehende System der $R_{ik}^* = R_{ik} \cap (X_i^* \times X_k^*)$ die folgenden weiteren Voraussetzungen macht: Es ist normalisiert; zu jedem $x \in X_i^*$ gibt es ein $(x_1, \dots, x_n) \in G^*$ mit $x_i = x$; es gibt feste reelle Zahlen y_2, \dots, y_m so, daß zu $x \in X_1^*$ ($i \geq 2$) eine und bei $i = 2$ sogar nur eine reelle Zahl y_1 mit $([y_1, \dots, y_m], x) \in R_{1i}^*$ vorhanden ist. y_1 ist dann auch bei $i > 2$ eindeutig bestimmt und wird $= g_i^*(x)$ gesetzt. $g_i^*(x)$ wird durch $f_1^*(x) = f_i^*([g_1^*(x), y_2, \dots, y_m])$ eindeutig bestimmt. Bei passender Wahl der X_i^* liefern dann die $g_i^*(x)$ die gewünschte stetige lokale Parametrisierung. G. Pickert.

Allgemeine Reihenlehre:

Anaut, Vicente Ayuso: Eine Methode zur Untersuchung des Konvergenzcharakters von Reihen. Gac. mat., Madrid 4, 205—206 (1952) [Spanisch].

Šmul'jan, Ju. L.: Über unbedingt konvergente und absolut konvergente Reihen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 6 (52), 209—210 (1952) [Russisch].

Eine Reihe $\sum x_n$ von Elementen eines Banachschen Raumes E heißt kommutativ konvergent, wenn sie konvergent bleibt, wie auch ihre Glieder umgeordnet werden. Sie heißt absolut konvergent, wenn $\sum \|x_n\|$ konvergiert. Absolute Konvergenz hat die kommutative Konvergenz zur Folge, und in einem endlichdimensionalen Raum ist auch das Umgekehrte richtig. Es wird an einem Gegenbeispiel gezeigt, daß in einem unendlichdimensionalen E das nicht immer der Fall ist. Sei $E = l_p$, $p > 1$. Es sei $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in l_p$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \infty$ (es sei, z. B. $\xi_n = 1/n$).

Dann ist die Reihe $\sum x_n$ mit $x_n = (0, 0, \dots, 0, \xi_n, 0, \dots)$ kommutativ konvergent, aber nicht absolut konvergent. B. Sz.-Nagy.

● Szász, Otto: Introduction to the theory of divergent series. (Written by J. Barlaž.) Rev. ed. New York: Stechert-Hafner, Inc.; Cincinnati: Department of Mathematics, Graduate School of Arts and Sciences, University of Cincinnati 1952. V, 81 p. \$ 2,75.

Dies kleine einführende Buch (Schreibmaschinen-Perlschrift-Steindruck) stellt an die Vorbildung des Lesers nur geringe Anforderungen. Die Beweise sind knapp gefaßt, ohne daß Schwierigkeiten für das Verständnis entstehen. Das Werk ist

überraschend inhaltsreich; erfreulich ist die unschematische Art der Anordnung des Stoffes. — Behandelt werden die Summierungsverfahren von Cesàro, Hölder, Abel, Euler, Borel (Borelsches Polygon), Nörlund, Riesz und — besonders hervorzuheben — Hausdorff. Die Beweise der Umkehrsätze für das $(C, 1)$ - und das A -Verfahren werden über die Höldersche Ungleichung nach Hardy-Littlewood-Landau-Karamata geführt.

R. Schmidt.

● **Chandrasekharan, K. and S. Minakshisundaram: Typical means.** (Tata Institute of Fundamental Research. Monographs on mathematics and physics. 1). Oxford; University Press 1952. X, 139 p. Rs 22/8 net.

A series $\sum_0^\infty c_n$ is said to be (λ, κ) -summable, to the sum s , if $\omega^{-\kappa} \sum_{\lambda_n < \omega} (\omega - \lambda_n)^\kappa c_n \rightarrow s$ as $\omega \rightarrow \infty$. Here the „order“ κ is non-negative and the „type“ λ indicates a sequence $\{\lambda_n\}$ where $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. — These „typical means“ are generalisations of the more familiar Cesàro means ($\lambda_n = n$). They are of natural importance in the theory of general Dirichlet series $\sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$, into which they

were first introduced by M. Riesz in 1909. A systematic account of their theory was given by G. H. Hardy and M. Riesz in their Cambridge Tract: The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915. Since then many new results have been obtained. A new and up-to-date account of this interesting and important subject is, therefore, most welcome. Since one of the authors has played himself an important part in the development of the theory, we may be sure that this new book is fully authoritative. In fact, the subject is clearly arranged, the account is lucid and rigorous, and the book is well printed. There are four chapters: I. First Theorem of consistency and some converse theorems. II. Second Theorem of consistency. III. Application to Dirichlet series. IV. Application to Fourier series. This last chapter contains many of Chandrasekharan's own results on the application of spherical means to multiple Fourier series. There is an extensive survey of the literature after each chapter.

W. W. Rogosinski.

Petersen, G. M.: A note on divergent series. Canadian J. Math. 4, 445—454 (1952).

A series $\sum u_p$ is said to be summable by the method (B^h) to the sum s if $B_n^h = \sum_0^n u_p \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{p}{n+h} \right) \rightarrow s$. It is known that (B^0) is equivalent to the Cesàro method (C_1) [Reviewer, Math. Ann. 95, 110—134 (1925)]. It is now proved that $(B^h) \equiv C_1$ if $h > \frac{1}{2}$. (Compare J. Karamata, this Zbl. 29, 208.) — A special Nörlund method (N) is also considered which transforms a sequence $\{s_n\}$ into $\{t_n\}$ where

$$t_n = \alpha_0 s_{n-p} + \dots + \alpha_p s_n, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_p = 1.$$

The main result is here: A bounded sequence $\{s_n\}$ is summable (N) if and only if the polynomial $\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p$ has no roots on $|z| = 1$. [Compare T. Kubota, Tôhoku Math. J. 12, 222—224 (1917)].

W. W. Rogosinski.

Peyerimhoff, Alexander: Über einen Satz von Herrn Kogbetliantz aus der Theorie der absoluten Cesàroschen Summierbarkeit. Arch. der Math. 3, 262—265 (1952).

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt $|C_\alpha|$ -summierbar [bzw. $|E_\alpha|$ -summierbar], wenn die durch

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n A_n^\alpha} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \quad \left(n \geq 1, \quad A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} \right)$$

[bzw. $\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_n = \frac{1}{n q^n} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} (q-1)^{n-v} v a_v \quad (n \geq 1, \quad q = 2^\alpha)$]

erklärte Reihe $\sum \alpha_n$ absolut konvergiert ($\alpha \geq 0$). Von Kogbetliantz [Bull. Sci. math., II. Sér. 49, 234—256 (1925)] stammt der Satz: Ist $\sum a_n$ eine $|C_\alpha|$ -summier-

bare Reihe, so sind die Reihen $\sum a_n (n+1)^{-\gamma}$ und $\sum a_n \binom{n+\gamma}{n}^{-1}$ stets $|C_\beta|$ -summierbar für $\gamma \geq \alpha - \beta$ ($0 \leq \beta \leq \alpha$). Verf. gibt einen stark vereinfachten Beweis dieses Satzes. Weiter wird der folgende Satz angegeben: Ist $\sum a_n$ eine $|E_\alpha|$ -summierbare Reihe, so ist die Reihe $\sum a_n \left(\frac{2p-1}{2q-1}\right)^n$ stets $|E_\beta|$ -summierbar ($0 \leq \beta \leq \alpha$; $q = 2^\alpha$, $p = 2^\beta$).

D. Gaier.

Wilansky, Albert: Summability: The inset, replaceable matrices, the basis in summability space. *Duke math. J.* **19**, 647—660 (1952).

Als Hilfsmittel für Untersuchungen über die Ausdehnung des (Limitierungs-) Feldes (A) einer Matrix A , deren Spaltenlimites $\lim_n a_{nk} = a_k$ existieren, führt Verf. das inset $[A]$ ein als die Menge der Folgen x aus (A), für die $\sum a_k x_k$ konvergiert. Wenn $[A] = (A)$ ist, besitzt A maximales inset. A hat die Verbreitungseigenschaft (propagation property) für das maximale inset, wenn für jede Matrix B mit $(B) = (A)$ folgt: $[B] = (B)$. — Von den 16 Sätzen der Arbeit seien genannt: 1. Die Cesàroschen Mittel mit $r \geq 1$, die Hölderschen und die Rieszschen Mittel haben die Verbreitungseigenschaft. 2. Wenn A eine co-reguläre Matrix mit maximalem inset ist, so ist A durch eine reguläre Matrix B ersetzbar, d. h. $(B) = (A)$. 3. Wenn A co-regulär und zeilenfinit ist, so existiert eine reguläre Matrix B mit $(B) = [A]$. 4. Es gibt (Beispiel von K. Zeller) eine co-reguläre normale Matrix Z vom Typus M (im Sinne von Banach) derart, daß keine Matrix mit gleichem oder größerem Feld maximales inset besitzt.

R. Schmidt.

Agnew, Ralph Palmer: Inclusion relations among methods of summability compounded from given matrix methods. *Ark. Mat.* **2**, 361—374 (1952).

Klärung und Verschärfung des Satzes 1 aus: H. Rudberg, *Ark. Mat. Astr. Fys.* **30 A**, no. 10, 1—15 (1944). Die Matrizen A werden als trianguläre reguläre Silverman-Toeplitzsche mit nichtnegativen Elementen vorausgesetzt: $a_{nk} \geq 0$, $a_{nn} > 0$, $a_{nk} = 0$ für $k > n$, $a_{nk} \rightarrow 0$ mit $n \rightarrow \infty$, $\sum_k a_{nk} \rightarrow 1$. Aus einer Folge $A(0), A(1), \dots$ solcher Matrizen wird gebildet $B(r) = A(r) \cdots A(1)$, weiter nach Wahl von r_1, r_2, \dots aus $B(r) = (b_{nk}(r))$ schließlich $B\{r_v\} = (b_{nk}(r_n))$. — „Es gibt eine Folge $R_1 \leq R_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ derart, daß $B\{r_v\}$ stärker ist als (includes) jedes $B(0), B(1), \dots$ “ — Die Voraussetzung $a_{nk} \geq 0$ kann nicht fallen gelassen werden. — Anwendungen auf die Verfahren von Cesàro, Abel, Euler, Borel und Hurwitz.

R. Schmidt.

Machler, Michaël: Sur une transformation généralisée de série en série. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 769—771 (1952).

$A = (a_{n_0, n_1, \dots, n_s})$ sei eine unendliche $(s+1)$ -dimensionale Matrix ($s \geq 1$; $n_i = 0, 1, \dots$ für $i = 0, \dots, s$). Unter der A -Summe der Reihe $\sum_0^\infty u_n$ wird die Summe $\sum a_{n_0, \dots, n_s} u_{n_s}$ (zu summieren ist über alle n_i) verstanden, falls dieselbe existiert. Durch Induktion leitet Verf. ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür ab, daß das A -Verfahren konservativ (die A -Summe jeder konvergenten Reihe existiert) ist, ferner dafür, daß es regulär (die A -Summe jeder konvergenten Reihe ist gleich der Reihensumme) ist.

W. Meyer-König.

Balagangadharan, K.: A quasi-tauberian theorem on Fourier series. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **16**, 183—190 (1952).

Verf. beschäftigt sich mit der Bessel-Summierbarkeit von Reihen (Definition und Bezeichnung vgl. dies. Zbl. **35**, 162) und leitet, gestützt auf die Methoden von K. Chandrasekharan [z. B. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **17**, 219—229 (1943)],

folgendes her: (1) $\sum a_n$ sei formal gegeben, $S^0(x) = \sum_{v=0}^n a_v$, $n \leq x < n+1$,

$S^p(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} S(t) dt$ ($p > 0$). Setzt man (2) $a_n = O(n^{-\delta})$, $0 < \delta < 1$,

voraus und (3) $n^{-p}S^p(n) - s = O(n^{-\alpha})$, $p > \alpha$, dann ist (1) (J, μ) -summierbar zur Summe s für $\mu = p - \frac{1}{2}$, wenn $0 < 1 - \alpha < \frac{p + \delta - 1}{p}$ gilt. Da $(J, \frac{1}{2})$ -Summierbarkeit äquivalent mit Lebesgue-Summierbarkeit ist, ist darin für $p = 1$ und Modifikation von (3) zu einer o -Bedingung ein Satz des Ref. (dies. Zbl. 39, 296) enthalten. Weiter: Gilt $0 < \alpha < \delta < 1$, $p > \alpha$, (2) und (3) mit o statt O , dann ist (1) (J, μ) -summierbar für $\mu = p + \frac{1}{2} - \alpha/(1 + \alpha - \delta)$. $p = 0$ bei K. Chandrasekharan und Szász (dies. Zbl. 35, 162). Ein weiteres Ergebnis dehnt einen Satz von Loo [Trans. Amer. math. Soc. 56, 508—518 (1944)] über den Zusammenhang zwischen den Cesaro-mitteln p -ter Ordnung der Partialsumme einer Fourierreihe, den Fourierkoeffizienten und den p -ten Integralmitteln der Funktion auf nicht ganzzahliges p aus.

L. Schmetterer.

Rajagopal, C. T.: Two one-sided Tauberian theorems. Arch. der Math. 3, 108—113 (1952).

Die reelle Reihe $\sum_1^\infty a_n$ wird in die Funktion

$$\Phi(t) = \sum_1^\infty a_n \varphi(\lambda_n t) \quad (t > 0, 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty)$$

übergeführt, wobei der Kern $\varphi(u)$ den folgenden Bedingungen genügt: für $u \geq 0$ sei $\varphi(u)$ positiv, differenzierbar und besitze eine stetige Ableitung, endlich sei

$$\varphi(0) = 1, \quad \int_1^\infty \frac{\varphi(u)}{u} du < \infty, \quad 0 < -\varphi'(u) \leq M.$$

Verf. beweist den einseitigen Umkehrsatz: Aus (1) $\Phi(t) < C$ für $0 < t \leq t_0$ und $a_n = -W(\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n$ (für $n \geq 1$, $W > 0$) folgt

$$(2) \quad \sum_{v=1}^n a_v < W \log \log \lambda_n + W(M - \gamma) + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

mit

$$\gamma = - \lim_{t \rightarrow +0} \left[\int_t^\infty \frac{\varphi(u)}{u} du + \log t \right].$$

Dieser Satz stellt eine Erweiterung eines einseitigen Tauberschen Satzes, den Karamata für die Abelsche Transformation bewiesen hatte (vgl. dies. Zbl. 42, 293) auf die Klasse Φ von positiven regulären Transformationen dar, der u. a. auch die Stieltjes- und Lambert-Transformation angehören. Entsprechend wird noch ein Satz über „ ∞ -Summierbarkeit“ von Vijayaraghavan [vgl. J. London math. Soc. 2, 215—232 (1927), Theorem 8] hergeleitet: Ersetzt man in obigem Satz die Voraussetzung (1) durch die Bedingung $\Phi(t) + W \log \log \frac{1}{t} \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow +0$), so ist die obige Behauptung (2) durch $\lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^n a_v = -\infty$ zu ersetzen. Beide Sätze werden schließlich noch mit bekannten Sätzen von Karamata, Ramaswami, Delange und Verf. in Beziehung gebracht.

V. Garten.

Erdős, P.: On a Tauberian theorem for Euler summability. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 51—56 (1952).

Sei E das Euler-Knopp'sche Summierungsverfahren der Ordnung 1:

$$E\text{-}\sum_0^\infty a_n = \sum_{n=0}^\infty 2^{-n-1} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} a_v.$$

Satz 1: Es gibt eine Konstante $A > 0$, so daß (1) $\sum a_n$ konvergiert, wenn (1) eine E -summierbare Reihe, n_i ($i = 0, 1, \dots$) eine Indexfolge mit $n_{i+1} - n_i > A \sqrt[n_i]{n_i}$ und $a_n = 0$ für $n \neq n_i$ ist. Darin sind verschiedene ältere Ergebnisse ganz oder teilweise enthalten (vgl. z. B. Ref., dies. Zbl. 24, 29; 28, 218). Daß die Aussage

ziemlich versteckt liegt, zeigen die erforderlichen längeren Abschätzungen. Unbewiesen bleibt Satz 2: Ist die Reihe (1) E -summierbar, so ist sie konvergent, wenn es eine Zahl $\lambda > 0$ und eine Indexfolge n_i gibt, so daß $n_{i+1} - n_i > \lambda \sqrt{n_i}$ und $a_n = 0$ für $n \neq n_i$ ist. Verf. bemerkt jedoch, daß Satz 2, falls überhaupt gültig, hinsichtlich der Lückenlänge bestmöglich ist. — Inzwischen konnte gezeigt werden, daß Satz 2 richtig ist [Ref., Math. Z. 57, 351—352 (1953)].

W. Meyer-König.

Parameswaran, M. R.: Some converse theorems on summability. Proc. Indian Acad. Sci., Sect A 36, 363—369 (1952).

Es sei $A = (a_{ij})$ eine konvergenzerhaltende Matrix (K -Matrix) und $\|A\| = \overline{\lim}_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$. Verf. behandelt das Problem: Unter welchen Bedingungen für die

Matrix A folgt aus der Konvergenz von $t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j$ für $i \rightarrow \infty$ stets die Konvergenz der Folge s_j ? Dazu wird die Inverse zu A aufgestellt und gezeigt (Theorem 3): Ist A eine K -Matrix, λ komplex und $|\lambda| < \|A\|^{-1}$, so hat die Matrix $I - \lambda A$ eine Inverse, die eine K -Matrix ist (I ist die Einheitsmatrix). Die Anwendung von Theorem 3 gibt eine Anzahl Sätze Mercerscher Art, so z. B. Theorem 5 [Th. 6]: Seien x'_n die C_k -Mittel ($k > 0$) [Borel-Mittel] der Folge x_n und sei $y_n = x_n + \lambda x'_n$ gesetzt mit $|\lambda| < 1$; aus $y_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$) folgt dann $x_n \rightarrow b$ ($n \rightarrow \infty$) [falls die Folge x_n beschränkt ist].

D. Gaier.

Love, E. R.: Mercer's summability theorem. J. London math. Soc. 27, 413—428 (1952).

The main result is as follows: Let (c_{nk}) be a regular summation matrix, and let the sequence (s_n) be bounded. If, as $n \rightarrow \infty$, $t_n = s_n - q \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk} s_k \rightarrow (1 - q)l$, where $|q| < \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_{nk}| \right)^{-1}$, then $s_n \rightarrow l$. The restriction on $|q|$ is the best possible circular restriction. — More generally, if (c_{nk}) preserves the limit zero (but is not necessarily regular), then the same theorem holds with $l = 0$. — The condition that (s_n) should be bounded is in general indispensable. For triangular methods, however, the boundedness of (t_n) , together with the restriction on $|q|$, implies the boundedness of (s_n) .

W. W. Rogosinski.

Emersleben, Otto: Einige Potenzreihen mit Werten der Riemannschen Zetafunktion in den Koeffizienten. Z. angew. Math. Mech. 32, 237—238 (1952).

Nach bekannter Methode ergeben sich aus den Partialbruchentwicklungen von $\operatorname{ctg} \pi z$ und $(\sin \pi z)^{-1}$ geschlossene Ausdrücke für Summen, die bei Spezialisierung z. B. $\sum_{k=\infty}^{\infty} \binom{2k-1}{2\pi-1} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k}} = \frac{1}{2}$ liefern.

G. Hoheisel.

Miller, J. C. P.: The sum of the integral parts in an arithmetical progression. Math. Gaz. 36, 234—243 (1952).

Formeln zur Auswertung für die im Titel genannten Summen, gestützt auf die Kettenbruchnenner der Differenzen. Anwendung auf die Kontrolle von Tabellen abgerundeter Multipla von Konstanten.

R. Schmidt.

Sandham, H. F.: The approximation of radicals by rational means. Amer. math. Monthly 59, 622—624 (1952).

Verf. beweist, daß falls a_0, b_0, c_0, d_0 beliebige positive Zahlen sind und die Folgen a_n, b_n, c_n, d_n rekursiv folgenderweise definiert werden:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n + c_n + d_n}{4}, & b_{n+1} &= \frac{2}{3} \frac{a_n b_n + a_n c_n + a_n d_n + b_n c_n + b_n d_n + c_n d_n}{a_n + b_n + c_n + d_n} \\ c_{n+1} &= \frac{3}{2} \frac{a_n b_n c_n + a_n b_n d_n + a_n c_n d_n + b_n c_n d_n}{a_n b_n + a_n c_n + a_n d_n + b_n c_n + b_n d_n + c_n d_n}, \\ d_{n+1} &= \frac{4 a_n b_n c_n d_n}{a_n b_n c_n + a_n b_n d_n + a_n c_n d_n + b_n c_n d_n}, \end{aligned}$$

dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \sqrt[4]{a_0 b_0 c_0 d_0}.$$

— Der Satz ist ein Spezialfall eines von St. Feñyö (dies. Zbl. 34, 327) bewiesenen Satzes (den Verf. nicht zu kennen scheint), der Beweis ist aber hier elementar. Er beruht auf den Lemmata: $a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq c_{n+1} \geq d_{n+1} \geq d_n$ (siehe G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge 1934, S. 52, 104; dies. Zbl. 10, 107), $a_{n+1} - d_{n+1} < \frac{3}{4}(a_n - d_n)$, $\lim(a_n - d_n) = 0$ und $a_{n+1} b_{n+1} c_{n+1} d_{n+1} = a_n b_n c_n d_n = \dots = a_0 b_0 c_0 d_0$.
J. Aczél.

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Tagamlickij, Ja. A.: Über die Newtonsche Interpolationsreihe mit nicht-negativen Koeffizienten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 183–186 (1952) [Russisch].

Verf. beweist durch einfache Abschätzungen folgenden Satz: Es sei zur Abkürzung $[f(t), \alpha_1, \dots, \alpha_n] = f(\alpha_1)/F'(\alpha_1) + \dots + f(\alpha_n)/F'(\alpha_n)$ mit $F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$; ferner sei $\{x_i\}$ eine monoton nicht abnehmende Folge von positiven Interpolationspunkten mit divergenter Reziprokenreihe $\sum x_i^{-1}$. Eine in dem von den x_i bedeckten Abschnitt der positiven Achse unendlich oft differenzierbare Funktion $f(x)$ läßt sich dann und nur dann in eine Newtonsche Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)(x_2 - x) + \dots$$

mit nichtnegativen Koeffizienten a_i entwickeln, wenn die Ungleichungen $(-1)^n [f(t), x, x_1, \dots, x_n] \geq 0$, $(-1)^{n+1} [f(t), x, \xi, x_1, \dots, x_n] \geq 0$ für $0 < x < x_{n+1}$, $0 < \xi < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, erfüllt sind. W. Hahn.

Berman, D. L.: Lösung eines Extremalproblems der Interpolationstheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 167–170 (1952) [Russisch].

Verf. zeigt auf elementarem Wege folgendes: Es sei eine Dreiecksfolge $-1 \leq x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \dots < x_0^{(n)} \leq +1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) gegeben und $L_j^{(n)}(x) = \omega_n(x)/(x - x_j^{(n)}) \omega_n'(x_j^{(n)})$ mit $\omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j^{(n)})$; ferner sei $M_n^{(k)}(m) =$

$\max_{-1 \leq x \leq +1} \left| \frac{d^k}{dx^k} L_j^{(n)}(x) \right|$. Das Argument m bezieht sich auf die Abhängigkeit von der Dreiecksfolge. Dann ist das Minimum von $M_1^{(k)}(m)$ bezüglich m gleich $T_n^{(k)}(1)$, wobei $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ist, und die entsprechenden Interpolationspunkte $x_j^{(n)}$ sind die Werte $\cos j\pi/n$, also die Extremalstellen des Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x)$. — Benutzt wird ein Satz von Duffin und Schaeffer (dies. Zbl. 25, 314), aus dem sich übrigens — wie Verf. bemerkt — auch eins seiner früheren Ergebnisse (dies. Zbl. 46, 15) folgern läßt. W. Hahn.

Agnew, Ralph Palmer: Approximation by use of kernels originating from Abel transforms of series. Commentarii math. Helvet. 26, 171–179 (1952).

$z(t)$ sei eine komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen t ($-\infty < t < \infty$)

und für konstantes M sei $\int_a^b |dz(t)| \leq M(b - a)$ ($-\infty < a < b < \infty$). Unter q und h positive Parameter verstanden, wird

$$w(q, h, t) = \frac{q}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-(q e^{x/h} - x/h)\} z(t + x) dx$$

gesetzt. Dann gilt

$$(1) \quad |w(q, h, t) - z(t)| \leq A(q) h M \quad (-\infty < t < \infty)$$

mit

$$A(q) = \gamma - \log q - 2 \int_a^{\infty} x^{-1} e^{-x} dx \quad (\gamma = \text{Eulersche Konstante}),$$

und $A(q)$ ist für jedes q die bestmögliche Konstante in dem Sinne, daß eine Funktion $z(t)$ und ein Wert von t existieren, für welche in (1) Gleichheit eintritt. $A(q)$ wird für $q = \log 2$ ein Minimum, $A(\log 2) = 0,9680448$, wie Verf. früher gezeigt hat (dies. Zbl. 32, 152 und 46, 292, 2. Arbeit). Übrigens kann in (1) das Gleichheitszeichen nicht eintreten, wenn $z(t)$ periodisch ist. Verf. zeigt aber, daß die Annahme, $z(t)$ sei periodisch, nicht zu einer kleineren Konstante an Stelle von $A(q)$ führt. Die Untersuchungen erweisen sich als recht nützlich bei der Frage nach der Genauigkeit, mit der die Teilsummen einer Reihe, deren Glieder die Tauber-Bedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} |n a_n| = h > 0$ erfüllen, durch ihre Abelschen Mittel approximiert werden. *V. Garten.*

Visvanathan, S.: On the use of auxiliary differential equations in orthogonal expansions. *Math. Student* 20, 58—62 (1952).

L'A. considera un procedimento formale per la determinazione dei coefficienti degli sviluppi in serie di una funzione $f(x)$ per le soluzioni dell'equazione non omogenea $(-k^2 + d^2/dx^2)G_k(x) = f(x)$ o dell'altra $(k + d/dx)\Phi_k(x) = f(x)$, ($k = 0, 1, \dots$). *G. Sansone.*

Berkovitz, Leonard D.: Double Sturm-Liouville expansions. *Duke math. J.* 19, 567—574 (1952).

For a function $f(x, y)$ integrable on the square $\Omega: 0 \leq x, y \leq \pi$, the expansion in a double Fourier series $\mathfrak{S}_{SL}[f]$ of Sturm-Liouville functions $\varphi_n(x)$ is considered, where φ_n are eigenfunctions of the differential equation $u''(x) - q(x)u(x) + \lambda u(x) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $\lambda \geq 0$, with the boundary conditions $u'(0) - hu(0) = 0$ and $u'(\pi) + Hu(\pi) = 0$. The purpose of the paper is to compare the above series with the double Fourier cosine series $\mathfrak{S}[f]$ for f extended to the entire plane by the requirement that f be even-even and of period 2π in each variable. The following definitions are introduced: 1. a double sequence S_{MN} is said to converge restrictedly to a limit l if for any constants A and B and for every $\varepsilon > 0$ there exist integers M_0, N_0 such that $M > M_0, N > N_0$ and $A \leq M/N \leq B$ imply $|S_{MN} - l| < \varepsilon$, 2. a double sequence

S_{MN} is said to be restrictedly summable to a limit l if the sequence $\sigma_{MN} = \sum_{m,n=0}^{M,N} \frac{S_{mn}}{(M+1)(N+1)}$

converges restrictedly to l , 3. two double series are restrictedly equiconvergent resp. restrictedly equisummable if the difference of their partial sums is restrictedly convergent resp. restrictedly summable to zero. These definitions being adopted the following theorems are proved. Theorem 1: If f is integrable on Ω , then $\mathfrak{S}_{SL}[f]$ and $\mathfrak{S}[f]$ are uniformly restrictedly equiconvergent on every closed square interior to Ω . Theorem 2: If f is in L_p , $p > 1$ on Ω , then $\mathfrak{S}_{SL}[f]$ and $\mathfrak{S}[f]$ are uniformly restrictedly equisummable on every closed square interior to Ω . *J. Szarski.*

Tandori, Károly: Über die Cesàro'sche Summierbarkeit der orthogonalen Polynomreihen. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 3, 73—81 und russische Zusammenfassg. 82 (1952).

Siano $\{p_n(x)\}$, $a \leq x \leq b$, $n = 0, 1, \dots$, i polinomî ortonormali relativi alla funzione peso $w(x)$. Per una $f(x) \in L_w^2$ poniamo: $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$, $s_\nu(f; x) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k p_k(x)$. L'A. dimostra, tra l'altro, i seguenti teoremi: I. Se $|p_n(x)| \leq K$, $a \leq c \leq x \leq d \leq b$, $n = 0, 1, \dots$, allora, quasi ovunque in (c, d) :

$$(1) \quad \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n [s_\nu(f; x) - f(x)]^2 \rightarrow 0,$$

cioè la $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$ è „fortemente“ sommabile $(C, 1)$ con somma $f(x)$. II. Se, come nel teor. I, $|p_n(x)| \leq K$, e se la $w(x)$ è limitata in (c, d) , allora la (1) vale per ogni punto x di (c, d) che sia di continuità per la $f(x)$; e se la $f(x)$ è continua in tutto (c, d) , la (1) vale uniformemente in ogni intervallo interno a (c, d) .

A. Zitarosa.

Freud, Géza: Über die starke $(C, 1)$ -Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* 3, 83—88 und russische Zusammenfassg. 88 (1952).

L'A. generalizza il teorema I di cui alla recensione precedente (alla quale rimandiamo per le notazioni) sostituendo alla condizione $|p_n(x)| \leq K$ quest'altra: $\sum_{\nu=0}^n [p_\nu(x)]^2 = O(n)$, che — come prova l'A. — è valida uniformemente per gli x di ogni intervallo interno a (c, d) , $a \leq c < d \leq b$, quando sia $w(x) > m > 0$ per $c \leq x \leq d$. — Viene inoltre dimostrato che: Se $M > w(x) > m > 0$ per $c \leq x \leq d$, e se la $f(x)$ è continua in (c, d) , la $\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$ è sommabile $(C, 1)$ con somma $f(x)$, uniformemente per gli x di ogni intervallo interno a (c, d) .

A. Zitarosa.

Freud, Géza: Über die Konvergenz orthogonaler Polynomreihen. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 89—97 und russische Zusammenfassg. 98 (1952).

Siano $\{p_n(x)\}$, $-1 \leq x \leq +1$, $n = 0, 1, \dots$ i polinomi ortonormali relativi alla funzione peso $\varrho(x)$. Esistano delle costanti positive c_1, \dots, c_4 tali da aversi, per qualsiasi x di $(-1, +1)$ e per qualsiasi n : $\varrho(x) \leq c_1(1-x^2)^{-c_2}$, $|p_n(x)| < c_3(1-x^2)^{-c_4}$. Sia poi $f(x) \in L_\varrho(-1, +1)$, ed esista un $\delta > 0$ tale che: $f(x) \in L_\varrho^2(-1, -1+\delta)$, $f(x) \in L_\varrho^2(1-\delta, 1)$; poniamo: $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(x)$. L'A. estende al caso considerato (nel quale rientrano i polinomi di Jacobi) il noto criterio di Dirichlet-Jordan per le serie di Eulero-Fourier, e dimostra il seguente teorema analogo al criterio di Hardy-Littlewood per le serie di Eulero-Fourier: Se $a_n = o(n^{-\gamma})$, $\gamma > 0$, e se, per $h \rightarrow 0$, $f(\xi+h) - f(\xi) = o\left(\frac{1}{\log |h|^{-1}}\right)$, $-1 < \xi < +1$, allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(\xi) = f(\xi).$$

A. Zitarosa.

Plessis, N. du: The Cesàro summability of Laplace series. J. London math. Soc. 27, 337—352 (1952).

Die Fourierreihe $S(f)$ der in $0 \leq x \leq 2\pi$ integrierbaren Funktion $f(x)$ ist für $k > 0$ fast überall C_k -summierbar. Analog gilt: Die Laplacesche Reihe der über die Einheitskugel integrierbaren Funktion $F(P)$ ist (unter zusätzlichen Voraussetzungen) für $k > 1/2$ fast überall C_k -summierbar (E. W. Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931, S. 358; dies. Zbl. 4, 210). Gehört $f(x)$ für ein k mit $0 < k < 1$ zu einer gewissen Klasse $\text{Lip}^* k$, so ist $S(f)$ C_{-k} -summierbar zum Wert $f(x)$ [Hardy und Littlewood, Math. Z. 28, 612—634 (1928), S. 630]. Verf. stellt einen wieder analogen, in gewissem Sinn bestmöglichen Satz über die Laplacesche Reihe auf, wobei ebenfalls der Sprung von $1/2$ bei k auftritt. Sei P der Pol der Kugel und $-1/2 < k < 1/2$. Dann ist die Laplacesche Reihe

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\theta, \Phi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\Phi,$$

von F bei P (P_n das n -te Legendresche Polynom), wenn $\int_0^{2\pi} F(\theta, \Phi) d\Phi$ zu $\text{Lip}^*(1/2 - k)$ gehört, C_k -summierbar zum Wert $F(P)$. Der Beweis erfordert längere Rechnungen.

W. Meyer-König.

Sunouchi, Gen-ichiro: Convergence criteria for Fourier series. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 187—193 (1952).

Verf. gibt Konvergenzkriterien vom Lebesgueschen Typus für die Konvergenz der Fourierreihe einer geraden, mit 2π periodischen Funktion $\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$ am Ursprung. Zur Abkürzung sei

$$A(t, x) = \left| \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{\varphi(t+x)}{t+x} \right|, \quad B(t, x) = \left| \frac{\varphi(t+x) - \varphi(t)}{t} \right|, \quad p = (kx)^{1/4}$$

gesetzt. Die Konvergenz der Reihe ist dann sichergestellt, wenn $\varphi(t)$ die beiden Bedingungen

$$(1) \quad \int_0^t \varphi(u) du = o(t^\Delta) \quad \text{und} \quad (2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \int_p^\eta A(t, x) dt = 0$$

für $\Delta \geq 1$ und irgendein festes $\eta > 0$ erfüllt, oder, wenn $\varphi(t)$ den beiden Bedingungen $(1') \int_0^1 |\varphi(u)| du = o(t/\log t^{-1})$ und (2) mit einem $\Delta > 0$ genügt. In beiden Fällen kann auch $A(t, x)$ durch $B(t, x)$ ersetzt werden. V. Garten.

Žak, I. E.: Über konjugierte trigonometrische Doppelreihen. Mat. Sbornik, n. Ser. **31** (73), 469—484 (1952) [Russisch].

Cesari (dies. Zbl. **19**, 217) definierte zur Fourierreihe der 2π -periodischen Funktion $f(x, y)$ drei verschiedene konjugierte Reihen $\bar{\Sigma}^1, \bar{\Sigma}^2, \bar{\Sigma}$ und drei konjugierte Funktionen $\bar{f}^{(1)}, \bar{f}^{(2)}, \bar{f}$ (bezüglich der Veränderlichen x , der Veränderlichen y , beider Veränderlichen). Für $f \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$) machte er Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz der Reihen. (Jedoch hat Landis gezeigt, daß Cesaris Behauptung „ $\bar{f}^{(1)} \in \text{Lip } \alpha$ “ nicht stimmt.) Verf. gibt schärfere Konvergenzkriterien. Sei

$$\chi(u, v) = \sup_{|x_2 - x_1| \leq u, |y_2 - y_1| \leq v} |f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1) + f(x_1, y_1)|.$$

Unter der Voraussetzung $\int_0^\pi \int_0^\pi \chi(u, v) u^{-1} v^{-1} du dv < \infty$ konvergiert dann $\bar{\Sigma}$ gleichmäßig gegen \bar{f} . Variante für gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich des Fundamentalquadrats. Gilt sogar $\chi(u, v) < K u^\alpha v^\beta$ ($0 < \alpha, \beta < 1$), so genügt \bar{f} einer entsprechenden Bedingung. Ähnliche Aussagen für $\bar{f}^{(1)}$ und $\bar{f}^{(2)}$. K. Zeller.

Rao, S. K. Lakshmana and B. S. Ramakrishna: Certain trigonometric summations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **36**, 208—210 (1952).

$$\text{Es sei } A(\theta, \varphi; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\theta)x}{n+\theta} \cdot \frac{\sin(n+\varphi)x}{n+\varphi}, \quad s(\theta; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\theta)x}{n+\theta}$$

gesetzt mit $\theta, \varphi > 0$ und $0 < x < \pi$. Ersetzt man \sin durch \cos , so werden die entstehenden Funktionen mit $B(\theta, \varphi; x)$ und $c(\theta; x)$ bezeichnet. Die Funktionen $s(\theta; x)$ und $c(\theta; x)$ sind mit Hilfe der ψ -Funktion darstellbar [$\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$; vgl. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, London 1926, S. 392]. Verf. gelingt eine darauf aufbauende Darstellung von $A(\theta, \varphi; x)$ und $B(\theta, \varphi; x)$.

Sonderfälle werden diskutiert, man erhält z. B. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx+a)}{(nx+a)^2} = \frac{\pi}{x}$; vgl. dazu

Krishnan (dies. Zbl. **32**, 212).

D. Gaier.

Spiegel, M. R.: The Dirac delta-function and the summation of Fourier series. J. appl. Phys. **23**, 906—909 (1952).

Tomić, M.: Sur les sommes trigonométriques à coefficients monotones. Srpska Akad. Nauka, Zbornik Radova, mat. Inst. **18**, Nr. 2, 13—51 und französ. Zusammenfassg. 51—52 (1952) [Serbisch].

Verf. gibt eine zusammenfassende Darstellung seiner früher [dies. Zbl. **33**, 244; **34**, 334; **40**, 163; **41**, 200; Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **4**, 145—156 (1952)] veröffentlichten und einiger weiterer in demselben Ideenkreis liegenden Resultate, die sich auf das Verhalten von trigonometrischen und Taylorschen Reihen und Polynomen mit einfach oder mehrfach monotonen Koeffizienten beziehen und welche hauptsächlich vereinfachte Beweise und Ergänzungen einiger Sätze von Fejér, Rogosinski, Szegő usw. enthalten. Die Ausführung beruht auf einer gemeinsamen, äußerst übersichtlichen und eleganten geometrischen Methode [welche ebenfalls von C. Hyltén-Cavallius, dies. Zbl. **44**, 72, wiedergefunden war]. Es werden Verfahren angegeben, um jeder Seite eines Streckenzuges einen Kreis zuzuordnen, derart, daß unter gewissen Monotonievoraussetzungen der nachstehende Kreis im vorangehenden enthalten ist, welche

Methode eben das Prinzip der Monotonie auf die komplexe Ebene zu übertragen erlaubt. — Als neue Resultate gibt Verf. einen äußerst einfachen und aus der Figur unmittelbar ablesbaren Beweis des Fejér-Szegö'schen Satzes (dies. Zbl. 15, 254): „Ist c_n eine zweifach monotone Nullfolge, so bilden die absoluten Beträge der Reste $r_n(z) = z^{-n} \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu z^\nu$ eine abnehmende Folge für $|z| \leq 1, z \neq 1$ “ und dessen Ergänzung. „Ist c_n dreifach monoton, so ist sogar die Folge $|r_n(z) - r_{n+1}(z)|$ monoton“. Außerdem seien noch folgende Sätze erwähnt: „Ist b_ν eine abnehmende Nullfolge und $b_n > b_{n+1}$, so kann man getrennte Intervalle angeben, welche die Nullstellen von $s(\theta) = b_n \sin n\theta + b_{n+1} \sin (n+1)\theta + \dots$ enthalten; ist außerdem $b_\nu = O(1/\nu)$, so bleibt die Sinusreihe gleichmäßig beschränkt für $0 \leq \theta \leq \varepsilon$ “. „Sei $c_\nu = \varrho_\nu e^{i\lambda_\nu}$, $\varrho_\nu \geq \varrho_{\nu+1}$, die Folge λ_ν dreifach monoton und $\lambda = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (\lambda_\nu - \lambda_{\nu+1}) < \pi$, so ist $\sum c_\nu e^{i\nu\theta}$ gleichmäßig konvergent für $0 < \theta < \pi - \lambda$ und daselbst nullstellenfrei.“

J. Karamata.

Spezielle Orthogonalfunktionen :

Deverall, L. I. and C. J. Thorne: Some relations involving special functions. Math. Mag. 25, 183—188 (1952).

In this paper the authors have successfully applied the theory of Laplace transforms to a large class of identities or equalities, and deduced therefrom certain interesting results, which involve some of the more important functions, e. g. $J_n(z)$, $I_n(z)$, $L_n(z)$, $H_n(z)$, ... so commonly used in modern analysis. A remarkable feature of this paper is the special stress laid upon the elementary character of its mode of analysis, and the consequent avoidance of the use of contour integration.

H. D. Bagchi.

Orts, J. M.: Über die Integralformel der Legendreschen Polynome. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 12, 201—205 (1952) [Spanisch].

Der Verf. führt aus, wie man mit Hilfe eines bekannten Satzes von Hadamard über Potenzreihen die Formel

$$\sum a_n P_n(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\sum a_n z^n}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} dz, \quad \alpha_{1,2} = x \mp \sqrt{x^2 - 1},$$

beweisen kann, und wendet diese auf einige Spezialfälle an.

K. Prachar.

Villari, Gaetano: Sugli estremi relativi dei polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 421—432 (1952).

Verf. zeigt mit elementaren Methoden, daß das r -te Extremum des n -ten Legendreschen Polynoms, vom rechten Ende des Oszillationsintervalls, also von $+1$ aus nach links gezählt, einen positiven Grenzwert h_r hat, und gibt für h_1 und h_2 untere Schranken an.

W. Hahn.

Gatteschi, Luigi: Limitazione dell'errore nella formula di Hilb e una nuova formula per la valutazione asintotica degli zeri dei polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 272—281 (1952).

Nach einer bekannten asymptotischen Formel von Hilb ist

$$P_n(\cos \vartheta) = \left(\frac{\vartheta}{\sin \vartheta} \right)^{1/2} J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta \right\} + \sigma,$$

$$\sigma = \vartheta^{1/2} O(n^{-3/2}) \text{ in } cn^{-1} \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon, \quad \sigma = \vartheta^2 O(1) \text{ in } 0 < \vartheta \leq cn^{-1},$$

($c > 0$ const., P_n Legendre-Polynom, J_0 Besselfunktion). Verf. schätzt die Konstanten in den O -Symbolen numerisch ab und wendet seine Resultate auf die Eingrenzung der Nullstellen von $P_n(\cos \vartheta)$ an. Er erhält

$$\left| \left(\frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right)^{1/2} P_n(\cos \vartheta) - J_0 \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta \right\} \right| < 0,09 \vartheta^2 \text{ in } 0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2n},$$

und $< 0,358 \vartheta^{-1/2} n^{-5/2} + 0,394 \vartheta^{1/2} n^{-3/2}$ in $\pi/2n < \vartheta \leq \pi/2$. Für die r -te Nullstelle $\vartheta_{n,r}$ von $P_n(\cos \vartheta)$ gilt

$$0 < \frac{j_{0r}}{n + \frac{1}{2}} - \vartheta_{n,r} < \frac{16 + 37r}{16n^4}, \quad r = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right],$$

j_{0r} r -te Nullstelle von $J_0(x)$.

K. Prachar.

Ossicini, Alessandro: Funzione generatrice dei prodotti di due polinomi ultrasferici. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 315—320 (1952).

Se $P_n^{(\lambda)}(x)$ è il polinomio ultrasferico di ordine n e di parametro λ e $Q_{\lambda-1/2}$ indica la funzione di Legendre di seconda specie soluzione dell'equazione

$$(1-x^2) \frac{d^2 Q_{\lambda-1/2}}{dx^2} - 2x \frac{dQ_{\lambda-1/2}}{dx} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) Q_{\lambda-1/2}(x) = 0,$$

l'A. dimostra che per $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ vale lo sviluppo in serie

$$\frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda) \Gamma(2\lambda) \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{1}{(z \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^\lambda} Q_{\lambda-1} \left(\frac{1+z^2-2y x z}{2z \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(2\lambda+n)} z^n P_n^{(\lambda)}(x) P_n^{(\lambda)}(y),$$

e il primo membro può perciò considerarsi come la funzione generatrice dei prodotti di due polinomi ultrasferici di ugual ordine e di uguale parametro. *G. Sansone.*

Palamà, Giuseppe: Su di un limite inferiore della distanza di due zeri consecutivi di $H_n(x)$ e su di una limitazione di $H_n^2(x) - H_{n-1}(x) H_{n+1}(x)$. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 311—315 (1952).

Die bekannte Darstellung der aus Hermite'schen Polynomen $H_n(x)$ gebildeten Determinanten $\Delta_n(x) = H_n^2(x) - H_{n-1}(x) H_{n+1}(x)$ als Quadratsummen führt, verbunden mit H. Cramér's Schranke (1) $|H_n(x)| < k \sqrt{n_n!} \exp(\frac{1}{4} x^2)$ ($k = 1,086435$, C. V. L. Charlier), den Verf. zu der bei allen x gültigen Abschätzung (2) $\Delta_n(x) < h n_n! \exp(\frac{1}{2} x^2)$, $h = 1,18034101$. Mit der Ableitung $H'_n(x) = n H_{n-1}(x)$ ergibt sich auch für die Wronskische Determinante (W. D.) $W(x)$ von $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$ eine Quadratsumme, (3) $W(x) = n \Delta_n(x) + H_n^2(x)$, so daß auch $W(x) > 0$ für alle x . Nach einem von A. Mambriani (dies. Zbl. 40, 178) geprägten Begriffe sind also $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$ in jedem Gebiete (a, b) konjugierte Wronskische Funktionen. Wie sein Urheber zeigt, besteht bei zwei solchen Funktionen f und φ für den Unterschied zweier in (a, b) enthaltenen, aufeinander folgenden Nullstellen α , α_1 ($\alpha < \alpha_1$) von f die untere Schranke (4) $\alpha_1 - \alpha \geq 2 m_{|w|} (M_{|f'|} M_{|\varphi'|})^{-1}$, wo $M_{|f'|}$, $M_{|\varphi'|}$ die Größtwerte (obere Schranken) von $|f'|$ und $|\varphi'|$ in (a, b) und $m_{|w|}$ dort der Kleinstwert (untere Schranke) der W. D. w von f und φ ist. Für $f = H_n$, $\varphi = H_{n+1}$ ergibt sich mit Hilfe von (1) $\alpha_1 - \alpha > \sigma m_{|w|} \exp(-\frac{1}{2} l^2) [(n+1)! \sqrt{n}]^{-1}$, $l = \max(|a|, |b|)$, $\sigma = 1,694$. Wählt man $l = \sqrt{\frac{1}{2} n(n-1)}$, so liegen die n Nullstellen $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ von $H_n(x)$ bekanntlich alle in $(-l, l)$; indem man die von L. Toscano (dies. Zbl. 47, 72) angegebene Ungleichung $\Delta_n(x) > \Delta_n(0)$ benutzt und $W(x)$ mittels (3) nach unten abschätzt, findet man als die in der Überschrift genannte Schranke, z. B. bei geraden n , $\alpha_{r+1} - \alpha_r > \sigma \sqrt{n} n! \exp[-\frac{1}{4} n(n-1)] [2^n (n+1) (\frac{1}{2} n!)^2]^{-1}$, $r = 1, \dots, n-1$. *L. Koschmieder.*

Bagehi, Hari das and Phatik chand Chatterji: Note on certain functional equations, connected with Hermite and Weber functions. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 75—83 (1952).

Die fraglichen Funktionalgleichungen sind die Rekursionsformel, die Differentialgleichung sowie die Beziehung zwischen $f_n(z)$, $f_{n-1}(z)$ und $f'_n(z)$. Es wird zunächst bewiesen, daß aus je zwei dieser Beziehungen die dritte folgt, sodann, daß die gemeinsame allgemeine Lösung der drei Beziehungen sich linear aus zwei Partikularlösungen mit von x und von n unabhängigen Koeffizienten darstellt, und schließlich wird diese Lösung für zwei Spezialisierungen der Parameter angegeben, übrigens alles nur für ganzzahlige n . Dazu ist zu bemerken, daß die beiden ersten Ergebnisse triviale Folgerungen aus der Linearität der betrachteten Funktionalgleichungen sind und daß man die Lösung auch bei nicht spezialisierten Parametern sofort mit Hilfe von konfluenten hypergeometrischen Reihen hinschreiben kann. Die Einzelrechnungen und die eingeführten Benennungen der Speziallösungen erscheinen daher überflüssig. *W. Hahn.*

Vacca, Maria Teresa: Sulle derivate delle funzioni di Bessel rispetto all'ordine, nel caso in cui questo à la metà di un intero dispari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 227—233 (1952).

Unter Hinweis auf eine Arbeit von F. Tricomi (dies. Zbl. 46, 72) über die Ab-

leitungen der konfluenten, hypergeometrischen Funktion nach den Parametern werden in der obigen Arbeit Formeln für die Ableitungen der beiden Hankelschen Funktionen $H_{\nu}^{(1,2)}(z)$ nach dem Parameter ν aufgestellt, falls nach der Ableitung ν gleich der Hälfte einer ungeraden, ganzen Zahl gesetzt wird. Die Übertragung der Resultate der Arbeit Tricomi auf den Fall der Hankelschen Funktionen wird dadurch möglich, daß bekanntlich die Zylinderfunktionen ein spezieller Fall der allgemeineren konfluenten hypergeometrischen Funktion sind.

H. Buchholz.

Carpani, Ada: *Sopra un nuovo sviluppo asintotico per la funzione ipergeometrica confluyente di Tricomi.* Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **11**, 261–269 (1952).

Nach einem zuerst von Hadamard angegebenen Verfahren ist es bekanntlich möglich, z. B. für die modifizierte Besselsche Zylinderfunktion $I_{\nu}(x)$ Reihenentwicklungen herzustellen, die für beliebig große Werte von x konvergieren, sich aber von der Nullpunktentwicklung der Besselfunktion dadurch unterscheiden, daß die einzelnen Reihenglieder mit $m = 0, 1, 2, \dots$ die unvollständige Gammafunktion $\gamma(\nu + m + \frac{1}{2}, 2x)$ in der Verbindung mit der Potenz x^{-m} als variablen Bestandteil enthalten. Das Restglied verschwindet in diesen Reihen nach der Ordnung $O(x^{\nu} \cdot e^{-2x})$, so daß sich diese Reihen auch für die numerische Berechnung bei großen Werten von x gut eignen. — Verf. zeigt, daß man auf die nämliche Weise zu gleichartigen Reihenentwicklungen für die Whittaker-Funktion $W_{\kappa, \mu}(x)$ gelangen kann. Die entsprechende Formel wird allerdings in der vorliegenden Arbeit nicht für die Funktion W selbst angegeben, sondern für die ihrem Wesen nach gleichartige Funktion $\Psi(a, c, z)$, die von F. Tricomi in die Theorie der konfluenten, hypergeometrischen Funktion eingeführt worden ist. Von der allgemeinen Formel werden in der Arbeit weiterhin mehrere Anwendungen auf spezielle Fälle diskutiert, und außerdem wird das Restglied der Entwicklung genauer abgeschätzt.

H. Buchholz.

Košljakov, N. S.: *Untersuchung einer Klasse von Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Koeffizienten.* Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **16**, 537–562 (1952) [Russisch].

Für die verallgemeinerte Lamésche Differentialgleichung

$$u'' + \left(h - k^2 n(n+1) \operatorname{sn}^2 x - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{\mu(\mu-1) \operatorname{dn}^2 x}{\operatorname{cn}^2 x} - \frac{\nu(\nu-1) k^2 \operatorname{cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x} \right) u = 0$$

sucht Verf. Lösungen der Gestalt $u = \operatorname{sn}^p x \operatorname{cn}^q x \operatorname{dn}^r x P(\operatorname{sn}^2 x)$, wo p, q, r rational sind und P ein Polynom ist. Kann man die Zahlen $n, \lambda, \mu, \nu, \kappa$ so wählen, daß die hypergeometrische Reihe

$$F\left(\frac{\lambda + \mu + \nu - n}{2}, \frac{\lambda + \mu + \nu + n + 1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}, t^2\right)$$

abbricht, wobei κ eine der drei Zahlen λ, μ, ν ist, so erfüllt eine Lösung der gesuchten Gestalt auch eine Fredholmsche Integralgleichung

$$u(x) = \lambda_0 \int_{-2K}^{2K} \varphi(x) \varphi(s) F\left(\frac{\lambda + \mu + \nu - n}{2}, \frac{\lambda + \mu + \nu + 1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}, t^2\right) u(s) ds$$

mit den Abkürzungen $\varphi(\tau) = \operatorname{sn}^{\lambda} \tau \operatorname{cn}^{\mu} \tau \operatorname{dn}^{\nu} \tau$ und $t = k \operatorname{sn} x \operatorname{sn} s$ bzw. $\frac{ik}{k'} \operatorname{cn} x \operatorname{sn} s$

bzw. $\frac{1}{k'} \operatorname{dn} x \operatorname{dn} s$, je nachdem κ gleich λ, μ oder ν gesetzt wurde. k und k' sind die Moduln, $4K$ die reelle Periode von $\operatorname{sn} x$. Die Untersuchungen enthalten den Fall der gewöhnlichen Laméschen Differentialgleichung und vervollständigen ein älteres Ergebnis von Whittaker. Spezielle Lösungen der Integralgleichung werden als Lösung der Differentialgleichung nachgewiesen. Anwendung auf das Problem kleiner Schwingungen eines auf einer Kugel liegenden Seiles (vgl. Verf., dies. Zbl. **9**, 356).

Adam Schmidt.

Funktionentheorie:

Heffter, Lothar: Gleichmäßige Differenzierbarkeit einer Funktion und Stetigkeit ihrer Ableitung in einem Bereich. Arch. der Math. 3, 257—261 (1952).

Der Satz, daß eine in einem Intervall der reellen Variablen x gleichmäßig differenzierbare reelle Funktion $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$ hat und umgekehrt, wird ins Komplexe übertragen, und zwar mit Hilfe einer Reihe von Sätzen über reelle Funktionen [der Nachweis der Stetigkeit von $f'(x)$ auf S. 257 erfordert noch einen kleinen Umweg]. H. Hornich.

Eggleston, H. G. and H. D. Ursell: On the lightness and strong interiority of analytic functions. J. London math. Soc. 27, 260—271 (1952).

Les propriétés topologiques fondamentales des fonctions analytiques d'une variable complexe étant l'invariance de la notion de domaine, jointe à la totale discontinuité de l'inverse de tout point-image, les AA. se proposent de déduire ces propriétés directement de l'existence de la dérivée complexe. Le résultat obtenu est applicable à des classes plus générales de fonctions complexes que les fonctions analytiques, admettant des transformations linéaires de la variable complexe, ainsi que des opérations algébriques effectuées sur les fonctions elles-mêmes et où le principe „faible“ du maximum du module joue un rôle important. S. Stoilow.

Valiron, Georges: Fonctions analytiques et équations différentielles. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 293—303 (1952).

Für eine in $|z| < 1$ eindeutige regulär analytische Funktion von positiver Ordnung wird die Gültigkeit der Beziehungen $f^{(j)}(z) = (n/z)^j f(z) (1 + \varepsilon_j(r))$ nachgewiesen, gültig für passende Umgebungen der Stellen z , wo $|f(z)| = M(r, f)$ gilt. Damit läßt sich dann sehr einfach der folgende Satz beweisen: Eine in $|z| < 1$ eindeutige, regulär analytische Funktion von unendlicher Ordnung kann nicht Lösung einer algebraischen Differentialgleichung $P(z, y, y') = 0$ sein. Dieses Resultat gilt auch noch für gewisse Klassen algebraischer Differentialgleichungen, deren Ordnung > 1 ist. H. Wittich.

Valiron, Georges: Fonctions entières et équations différentielles. Bull. Sci. math., II. Sér. 76, 144—148 (1952).

Der Satz, daß die Differentialgleichung $P(z, y, y', \dots, y^{(n)}) = f(y)$, P ein Polynom und $f(y)$ ganz transzendent in y , keine ganzen transzendenten Lösungen zuläßt, wurde vom Ref. mit Hilfsmitteln der Wertverteilungslehre bewiesen. Verf. zeigt, wie dasselbe Resultat mit Wiman-Valirons Theorie des Maximalgliedes gewonnen werden kann. H. Wittich.

Sheffer, I. M.: The derivatives of certain functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 83—97 (1952).

A result of V. G. Iyer [J. Indian math. Soc., n. Ser. 8, 94—108 (1944)], later sharpened by R. P. Boas and the reviewer [this Zbl. 31, 209 and Bull. Amer. math. Soc. 54, 1191 (1948)], states that if $f(x)$ is analytic on the closed interval $[a, b]$, and if for some point $x_0 \in [a, b]$ the sequence of derivatives $f^{(n)}(x_0)$ has a limit: $f^{(n)}(x_0) \rightarrow l$, then $f^{(n)}(x) \rightarrow l e^{x-x_0}$ uniformly for x in $[a, b]$. From this it follows that on $[a, b]$, and on any bounded region R of the complex plane, $f(x) = A e^x + \varphi(x)$, where $A = l e^{-x_0}$ and $\varphi(x)$ is an entire function such that $\varphi^{(n)}(x) \rightarrow 0$ uniformly on R . This conclusion need not hold if the sequence $\{f^{(n)}(x_0)\}$ has more than one finite limit point. The author proves, however, that if $f(z)$ is an entire function such that at two points z_1, z_2 , the sequences $\{f^{(n)}(z_1)\}$, $\{f^{(n)}(z_2)\}$ have only a finite number of finite limit points, then $f(z) = E(z) + \varphi(z)$, where $E(z) = \sum_{r=0}^m A_r \exp\{\omega^r z\}$, m is an integer, A_k 's are constants, $\omega = \exp\{2\pi i/m\}$,

and $\varphi(z)$ is an entire function such that $\varphi^{(n)}(z) \rightarrow 0$ uniformly on every bounded set; and if $|z_1 - z_2|$ is suitably restricted, then the value of m could be determined. He further proves that if $f(x) \in C^\infty$ on an interval I of the x -axis, if there exists an infinite sequence $\{n_j\}$ such that $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{(n_j)}(x) = g(x)$ uniformly on I , and a positive integer k such that $\{n_j\}$, $\{n_j - k\}$ have infinitely many integers in common, then $g(x) = \sum_{r=0}^{k-1} A_r \exp\{\omega^r z\}$.

K. Chandrasekharan.

Pidduck, F. B.: Some integral representations of an analytic function. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **3**, 222—226 (1952).

Let $f(z)$ be a single-valued function analytic for $b \leq |z| \leq a$. Suppose that $\varphi(u)$ is a function of a real or complex variable u and $\Phi(z)$ an integral function of z such that $\int_p^q \varphi(u) \Phi(uz) du = (1-z)^{-1}$ when $|z| < 1$. It is proved that for all points within the annulus

$$2\pi i f(z) = \int_p^q \varphi(u) du \int_C t^{-1} f(t) [\Phi(uz/t) + \Phi(ut/z)] dt - \int_C t^{-1} f(t) dt,$$

where C denotes any closed circuit circulating positively in the annulus. Taking special functions as $\varphi(u)$ and $\Phi(z)$, and using conformal mappings, the author obtains some other integral representations. Furthermore, properties and applications of an operator H defined by the equation

$$Hf(z) = \frac{1}{\pi i} P \int_C f(t) (t-z)^{-1} dt$$

are stated, where C is a closed curve passing through the point z and through no singularity, and P denotes the principal value of the integral. *K. Noshiro.*

Scott, W. T.: The reciprocal of a continued fraction. *Proc. Amer. math. Soc.* **3**, 722—726 (1952).

Conditions on the coefficients a_p are found such that the correspondence

$$F(z) \sim 1 + \frac{a_1}{z^{\beta_1}} + \frac{a_2}{1} + \dots + \frac{a_{2n-1}}{z^{\beta_{2n-1}}} + \frac{a_{2n}}{1} + \dots$$

implies the correspondence of the reciprocal

$$\frac{1}{F(z)} \sim 1 + \frac{a_1^*}{z^{\beta_1}} + \frac{a_2^*}{1} + \dots + \frac{a_{2n-1}^*}{z^{\beta_{2n-1}}} + \frac{a_{2n}^*}{1} + \dots,$$

where $F(z) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p}{z^p}$. [Formulas (10) derived here for the establishment of

this correspondence are a special case of those found in Theorem 6.5, pp. 106—107, of reviewer [Amer. J. Math. **68**, 89—108 (1946)] with $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$, $\alpha_{2p-3} = \alpha_{2p-2} = \beta_{2p-3} = \beta_{2p-2} = 0$, $p = 3, \dots, n$, $\alpha_{2p-1} = \alpha_{2p} = \beta_{2p-1} = \beta_{2p}, \dots$. *E. Frank.*

González, Mario O.: Über eine durch eine Differentialgleichung definierte Funktion. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* **15**, 93—97 (1952) [Spanisch].

Power series development of a function, defined by a differential equation in the complex domain, and of its inverse. *M. M. Peixoto.*

Freud, G.: Über einen reihentheoretischen Satz von Fejér. *Acta math. Acad. Sci. Hungar.* **3**, 173—176 (1952).

Eine in $|z| < 1$ reguläre und beschränkte Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ heiße

Fejérsche Funktion, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty$ ist. Verf. zeigt, daß Summe und Produkt zweier Fejérscher Funktionen wieder eine solche Funktion ergibt, so daß die Menge aller Fejérschen Funktionen ein Ring im Sinne der Algebra ist. Es wird bemerkt, daß die Voraussetzung der Beschränktheit von $f(z)$ notwendig ist.

D. Gaier.

Evgrafov, M. A.: Über die Umkehrung des Abelschen Satzes für Reihen mit Lücken. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 521—524 (1952) [Russisch].

Ist $f(z) = \sum a_n z^n$ regulär in $|z| < 1$ und stetig in $|z - x_0| \leq 1 - x_0$, ist ferner $a_n = 0$ für $n_k < n \leq n_k(1 + \lambda)$, so existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n_k} a_n = f(1)$ (dabei gelte $0 < x_0 < 1$, $\lambda > 0$, $n_k \rightarrow \infty$).

K. Zeller.

Agmon, Shmuel: On the singularities of Taylor series with reciprocal coefficients. *Pacific J. Math.* **2**, 431—453 (1952).

Für die komplexe Koeffizientenfolge a_n ($n = 0, 1, \dots$) sei $a_n \neq 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1$, so daß $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ und $f_{-1}(z) = \sum_0^\infty z^n / a_n$ den Konvergenzradius 1 besitzen. Sei θ reell, $\varrho(\theta) > 0$ und $\varrho(\theta) e^{i\theta}$ die erste Singularität, auf die man bei Fortsetzung von $f(z)$ längs des Strahles $z = t e^{i\theta}$ ($0 \leq t$) stößt; entsprechend $\varrho_{-1}(\theta)$ zu $f_{-1}(z)$. Was folgt aus den Singularitäten von $f(z)$ über die Singularitäten von $f_{-1}(z)$? Der Hauptteil eines Ergebnisses von J. Soula [*Bull. Soc. math. France* **56**, 36—49 (1928)] besagt: Sind die a_n reell und ist $z = 1$ die einzige Singularität von $f(z)$ auf $|z| = 1$, so läßt sich entweder $f_{-1}(z)$ nicht über $|z| = 1$ hinaus fortsetzen oder ist $z = 1$ die einzige Singularität von $f_{-1}(z)$ auf $|z| = 1$. Verf. zeigt, daß die Voraussetzung, die a_n seien reell, überflüssig ist, und dehnt die Untersuchung auf den Fall außerhalb $|z| = 1$ gelegener Singularitäten aus. Sei $f(z)$ regulär in der längs der Halbgeraden $1 \leq x < \infty$ aufgeschnittenen Ebene ($z = x + i y$). Die nicht einfache, längere Beweisführung zeitigt ein überraschend einfaches Resultat: Es gibt dann zwei Zahlen α, β ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 \leq \beta \leq \pi/2$), so daß $\varrho_{-1}(\theta) = \min \{ \exp [\theta \operatorname{tg} \alpha], \exp [(2\pi - \theta) \operatorname{tg} \beta] \}$ für $0 < \theta < 2\pi$, $\varrho_{-1}(0) = 1$; der zu $f_{-1}(z)$ gehörige Hauptstern wird also von zwei logarithmischen Spiralen begrenzt. Die Grenzfälle für α und β sind in natürlicher Weise auszudeuten. Nähere Angaben über α und β . Anwendung auf den Fall, daß von $f(z)$ nur die Regularität im Kreis $|z| < \varrho$ ($\varrho > 1$), aufgeschnitten längs der Strecke $1 \leq x < \varrho$, bekannt ist. W. Meyer-König.

Tolba, S. E.: On the summability of Taylor series at isolated points outside the circle of convergence. *Indagationes math.* **14**, 380—387 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 380—387 (1952).

Anschließend an Arbeiten von Cooke und Dienes (dies. Zbl. **19**, 339) und Vermes [*Proc. Edinburgh math. Soc., III. Ser.* **8**, 1—13 (1947)] wird die Frage untersucht, ob es eine permanente Matrix gibt, die eine Potenzreihe in endlich vielen außerhalb des Konvergenzkreises liegenden Punkten summiert. Für eine Koeffizientenfolge $\{d_n\}$ mit $d_n \neq 0$ und $\lim (d_n/d_{n+1}) = \mu$ ($|\mu| = 1$) sei das (in $|z| < 1$ reguläre) Funktionselement

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z^p)^n \quad (p = 0, 1, \dots, \text{fest})$$

betrachtet. Werden dann irgend m Punkte z_k in $|z| > 1$ vorgegeben, in denen $f(z)$ regulär ist und so, daß die z_k^p alle verschieden sind, dann gibt es eine (von $\{d_n\}$ abhängige) permanente Matrix, die (1) in jedem der $m p$ Punkte $\sqrt[p]{z_k^p}$ und in keinem andern in $|z| > 1$ liegenden Punkt summiert. D. Gaier.

Gaier, Dieter: Über die Summierbarkeit beschränkter und stetiger Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. *Math. Z.* **56**, 326—334 (1952).

Sei $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt. Aus einem Satz von A. C. Offord (dies. Zbl. **4**, 60) ergibt sich, daß das Abelsche Summierungsverfahren A und das Cesàrosche Verfahren C_k ($k > 0$) bei Anwendung auf $\sum a_n$ äquivalent sind. Die analoge Äquivalenzaussage gilt nun für je zwei Verfahren der Gesamtheit der Verfahren E_p (von Euler-Knopp, $p > 0$), B (von Borel), T_α und S_α (vgl. z. B. Ref., dies. Zbl. **41**, 184; $0 < \alpha < 1$). Beweis mit Hilfe des Umkehrsatzes des T_α -Verfahrens mit der TB (= Tauber-Bedingung) $a_n = O(1/\sqrt{n})$ und des Hilfssatzes: Ist $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ für ein $a > 0$ regulär und beschränkt in $|z + a| < 1 + a$, so ist $b_n = O(1/\sqrt{n})$. — Sei $F(z)$ regulär in $|z| < 1$, stetig in $|z| \leq 1$, und $F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ für $|z| < 1$. Nach L. Fejér [Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze, *S.-Ber. math.-phys. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München* **40**, Nr. 3, 17 S. (1910)] braucht dann $\sum c_n$ nicht konvergent zu sein. An Hand des Fejérschen Beispiels zeigt Verf., daß $\sum c_n$ auch nicht B -summierbar zu sein braucht. Anwendung zur Beurteilung der Schärfe zweier Sätze von J. Karamata (dies.

Zbl. 19, 113) und M. Riesz [vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl., Berlin 1929, S. 64]. — Beim A -Verfahren, angewandt auf die beliebige Reihe $\sum a_n$, ist sowohl $n a_n \rightarrow 0$ als auch $n^{-1} \sum_{v=0}^n v a_v \rightarrow 0$ eine TB. Läßt sich in Analogie dazu beim B -Verfahren der TB

$\sqrt{n} a_n \rightarrow 0$ die TB $n^{-1} \sum_{v=0}^n \sqrt{v} a_v \rightarrow 0$ zur Seite stellen? Nein: Auch die schärfere

Bedingung $\sum_{v=0}^{\infty} |a_v|^2 < \infty$ ist keine TB für das B -Verfahren. W. Meyer-König.

Macintyre, Sheila Scott: Some generalizations of two-point expansions. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 583—586 (1952).

Verf. untersucht Reihenentwicklungen, die zu von J. M. Whittaker (dies. Zbl. 8, 169) behandelten Reihen in demselben Verhältnis stehen wie die Abelschen Reihen (vgl. A. J. und S. S. Macintyre, dies. Zbl. 46, 79) zu den Taylor-Reihen. Sei $a \neq b$ (a, b reell) und die Polynomfolge $P_n(z, a, b)$ rekursiv so definiert: $P_n(a, a, b) = P_n(b, a, b) = 0$ und $P'_n(z, a, b) = P_{n-1}(z - 2, a, b)$ für $n > 0$; $P_0(z, a, b) = (z - b)/(a - b)$. Dann handelt es sich um die zunächst formal zu $F(z)$ gehörige Entwicklung

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{P_n(z, a, b) F^{(2n)}(a + 2n) + P_n(z, b, a) F^{(2n)}(b + 2n)\}.$$

Satz: Ist $|b - a| < \pi/\alpha$ und $\gamma > 1$, so konvergiert die Reihe (1) zum Wert $F(z)$, wenn $F(z)$ eine ganze Funktion ist und eine Konstante K existiert, so daß $|F(re^{i\theta})| \leq K r^{-\gamma} e^{rb(\theta)}$. Dabei ist α eine Konstante ($\alpha = 0,31 \dots$), $z = re^{i\theta}$, $b(\theta)$ eine gewisse näher bekannte Stützfunktion. Zum Beweis dienen Konvergenzaussagen bei einer Abelschen Reihe. Ein ähnlicher Satz für $|b - a| \geq \pi/\alpha$. Analogon zu dem im Referat über die oben genannte Arbeit von A. J. und S. S. Macintyre mit II bezeichneten Satz. Untersuchung der formal zu $F(z)$ gehörigen Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{A_n(z, a, b) F^{(2n)}(a + 2n) + B_n(z, a, b) F^{(2n+1)}(b + 2n)\}$$

(a, b reell, aber nicht notwendig verschieden; A_n, B_n gewisse wieder rekursiv definierte Polynome).

W. Meyer-König.

Robertson, M. S.: A coefficient problem for functions regular in an annulus. Canadian J. Math. 4, 407—423 (1952).

The function $w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is regular in $\varrho \leq |z| < 1$ where $\varrho \geq 0$.

The following two theorems are proved: I. On each circle $|z| = r$, $\varrho < r < 1$, let $\mathfrak{S} f(z)$ change sign $2p$ -times where p is independent of r . Then, for $n > p$,

$$|a_n - \bar{a}_{-n}| \leq \sum_{k=0}^p \Delta(p, k, n) |a_k - \bar{a}_{-k}|$$

$$\text{where} \quad \Delta(p, 0, n) = \prod_{v=1}^p \frac{(n^2 - v^2)}{(p!)^2}, \quad \Delta(p, k, n) = 2 \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq k}}^p \frac{(n^2 - v^2)}{(p+k)!(p-k)!}$$

when $k > 0$. — II. If $f(z)$ is regular in $|z| < 1$ and $\frac{\partial}{\partial \theta} \Re(f(re^{i\theta}))$ changes sign $2p$ -times on each $|z| = r$, $\varrho < r < 1$, then, for $n > p$,

$$|a_n| \leq \sum_{k=1}^p \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!(p-k)!(n-p-1)!(n^2-k^2)} |a_k|.$$

All these estimates are best possible and generalise previous results of the author (M. S. Robertson, this Zbl. 14, 120; 17, 406).

W. W. Rogosinski.

Tricomi, Francesco G.: A new entire function related to a well-known non-continuable power series. Commun. pure appl. Math. 5, 213—222 (1952).

Ein statistisches Problem führte Verf. auf die Untersuchung des asymptoti-

schen Verhaltens der Teilsummen der Reihe (1) $\sum_0^{\infty} z^{2^n}$, die bekanntlich eine nicht über $|z| = 1$ hinaus fortsetzbare Funktion darstellt. Zweckmäßiges Hilfsmittel ist die ganze Funktion $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a^n - 1)^{-1} z^n / n!$ ($a > 1$), deren Studium die vorliegende Note gilt. $G(z)$ genügt der Funktionalgleichung $G(az) = G(z) + e^z - 1$, aus der $\sum_{n=0}^{m-1} \exp(a^n z) = m + G(a^m z) - G(z)$ folgt ($m = 1, 2, \dots$). Damit ist für $a = 2$ die Beziehung zur Reihe (1) hergestellt, wenn man dort noch z durch e^z ersetzt. Einige der weiteren Ergebnisse seien mitgeteilt. Alle Ableitungen von $G(z)$ sind positiv auf der ganzen reellen Achse. $G(z), G'(z), \dots$ sind von der Ordnung 1. Zur Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $G(z)$ dient die Funktion $P(u)$.

Sei $z = -a^u$, $K(u) = -z G'(z)$, $F(z) = \sum_0^{\infty} \exp(a^n z)$, $\Phi(u) = -z F'(z)$, $P(u) = K(u) + \Phi(u)$. $P(u)$ ist doppelt-periodisch, aber nur in gewissen Streifen der u -Ebene definiert. Auf der reellen Achse ist $P(u)$ für mäßige Werte von a praktisch konstant. Verschiedene Konsequenzen ergeben sich aus der Tatsache, daß $K(u)$ der Funktionalgleichung $K(u+1) - K(u) = a^u \exp(-a^u)$ genügt, ferner aus einer modifizierten Fourier-Transformation von $K(u)$.

W. Meyer-König.

Tanaka, Chuji: Note on Dirichlet series. IX. Remarks on J. J. Gergen-S. Mandelbrojt's theorems. Proc. Japan Acad. 28, 73—76 (1952).

Teil VIII siehe Kōdai math. Sem. Reports 1952, 9—12 (1952). In Verallgemeinerung J. Mandelbrojtscher Ergebnisse beweist Verf. z. B.: Ist $F(s) = \sum a_n \exp(-\lambda_n s)$ ($0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$) in der ganzen Ebene einfach konvergent und nicht konstant, so gibt es für einen gegebenen Punkt $s_0 = \sigma_0 + i t_0$ zwei Julia-richtungen, vorausgesetzt, daß $F(s)$ gleichmäßig beschränkt ist im Streifen $\sigma_0 - a \leq \sigma$, wo $a > 0$ beliebig klein sein kann. Der Beweis geht übliche Wege.

G. Hoheisel.

Wintner, Aurel: On the non-vanishing of certain Dirichlet series. Amer. J. Math. 74, 723—725 (1952).

Aus Zerlegungs- und Regularitätsforderungen für Dirichletsche Reihen schließt Verf. in geschickter Weise auf nicht verschwindende Funktionswerte. Bewirken nämlich für $1 < \sigma$ die beschränkten und vollständig multiplikativen Beiwerte b_n eine Darstellung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} = F(s)$ und bleibt $F(s)$ längs $\sigma = 1$ regulär, so trägt diese Vertikale höchstens eine Nullstelle von $F(s)$. Methodisch wird ein von Ingham [J. London math. Soc. 5, 107—112 (1930)] benutzter Gedanke durch Normenbildung verfeinert.

W. Maier.

Delange, Hubert: Encore une nouvelle démonstration du théorème taubérien de Littlewood. Bull. Sci. math., II. Sér. 76_I, 179—189 (1952).

Auf methodisch neue Weise liefert Verf. den Beweis für den folgenden, einen Sonderfall seines Satzes 2 in seiner früheren Abhandlung (dies. Zbl. 32, 60, inbes. S. 99 der Arbeit) darstellenden Satzes B, der zur Herleitung des bekannten Littlewoodschen Satzes A ausreicht: A. Die Dirichletsche Reihe $\sum_0^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ konvergiere für $\Re(s) > 0$, ihre Summe sei $f(s)$. Aus $f(s) \rightarrow S$ für $s \rightarrow +0$ und $|a_n| \leq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}$ (für $n \geq 1$) folgt die Konvergenz der Reihe für $s = 0$ zum Wert S . B. Das Integral $\int_0^{\infty} s e^{-st} \alpha(t) dt$ konvergiere für $\Re(s) > 0$ zum Wert $f(s)$. Es sei $W_{\alpha}(t, \lambda) =$

$\sup_{t \leq t' \leq \lambda t} |\alpha(t') - \alpha(t)|$. Aus $f(s) \rightarrow S$ für $s \rightarrow +0$ und $w_{\alpha}(\lambda) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \overline{\lim} W_{\alpha}(t, \lambda) < +\infty$

folgt, unter E irgendeine nach oben unbeschränkte Menge reeller positiver Zahlen verstanden,

$$\overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} |\alpha(t) - S| \leq w_x(E, 1 + 0) \equiv \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} W_x(t, 1 + 0).$$

Für reelles $\alpha(t)$ gilt überdies:

$$S - \bar{\omega}'_\alpha(E, 1 + 0) \leq \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} \alpha(t) \leq \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} \alpha(t) \leq S + \bar{\omega}'_\alpha(E, 1 + 0),$$

mit

$$\bar{\omega}'_\alpha(E, \lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(-\inf_{t \leq t' \leq \lambda t} [\alpha(t') - \alpha(t)] \right), \quad \bar{\omega}''_\alpha(E, \lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t/\lambda \leq t' \leq t} [\alpha(t') - \alpha(t)] \right).$$

Beim Beweis wird davon ausgegangen, daß aus den Voraussetzungen des Satzes B sowohl die Beschränktheit von $\alpha(t)$ folgt als auch, daß bei beliebigem $\mu > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/\mu^2} \left[\alpha\left(\frac{1+u}{x}\right) - S \right] du \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow +0)$$

strebt.

V. Garten.

Koksma, J. F. and C. G. Lekkerkerker: A mean-value theorem for $\zeta(s, w)$. *Indagationes math.* **14**, 446—452 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 446—452 (1952).

Es werden Abschätzungen angegeben für den Mittelwert $\int_0^1 |\zeta^*(s, w)|^2 dw$. Dabei besteht zwischen $\zeta^*(s, w)$ und der für $0 < w \leq 1$ definierten verallgemeinerten Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s, w)$ [$\zeta(s, 1) = \zeta(s)$] der Zusammenhang: $\zeta^*(s, w) = \zeta(s, w) - 1/w^s$. Die Ergebnisse kommen in zwei Aussagen zum Ausdruck, zu deren Beweis fünf Sätze mitgeteilt werden, die sich z. T. als Verallgemeinerungen aus Sätzen der speziellen Riemannschen Zetafunktion ergeben. — Für $A \geq A_0$ (A pos. Konstante, A_0 z. B. 32), $s = \sigma + it$ (σ, t reell), $|t| \geq 3$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2A \log |t|} \leq \sigma \leq 1$ gilt:

$$\int_0^1 |\zeta^*(s, w)|^2 dw = \frac{1}{2\sigma - 1} + O\left(\frac{2A \cdot \log |t|}{|t|^{2\sigma - 1}}\right) \quad \text{mit} \quad |\vartheta| \leq 1;$$

$$\text{für } \sigma = \frac{1}{2}: \int_0^1 \left| \zeta^*\left(\frac{1}{2} + it, w\right) \right|^2 dw < B \cdot \log |t| \quad (B = 34).$$

H. Unger.

Varga, Richard S.: Semi-infinite and infinite strips free of zeros. *Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat.* **11**, 289—296 (1952).

Let $f(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k$ be an entire function not identically zero, where

$\beta_k = \alpha_k e^{i\psi_k}$, ($|\beta_k| = \alpha_k$), and let $s_n(z) = \sum_{k=0}^n \beta_k z^k$ be the partial sums of $f(z)$.

Under three conditions (i) if $\alpha_k = 0$, $k \geq 1$, then $\alpha_{k+2j} = 0$, $j \geq 0$, (ii) $A_1 \equiv$ greatest lower bound $[\alpha_m/\alpha_{m+2}(m+1)(m+2)] > 0$ for $\alpha_m > 0$, $\alpha_{m+2} > 0$, (iii) $\psi_k = k\theta_0$ for all $k \geq 0$ where θ_0 is some fixed angle; the following results are proved: 1. a semi-infinite strip V_1 , of nonzero width, symmetric about $\theta = \theta_0$ exists such that $f(z) \neq 0$, $s_n(z) \neq 0$ in V_1 ; 2. an infinite strip V_2 , of nonzero width, symmetric about $\theta = \theta_0 \pm \pi/2$ exists such that $g(z) \equiv \frac{1}{2}[f(z) + f(-z)] \neq 0$, $g_n(z) \neq 0$ in V_2 ; 3. an infinite strip V_3 , of nonzero width, symmetric about $\theta = \theta_0 \pm \pi/2$ exists such that $h(z) \equiv \frac{1}{2i}[f(z) - f(-z)] \neq 0$, $h_n(z) \neq 0$ in V_3 , except at $z = 0$.

N. A. Bowen.

Buck, R. Creighton: On the distribution of the zeros of an entire function. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **16**, 147—149 (1952).

Let $f(z)$ be an entire function of order ρ , type T , and let $n(x)$ denote the number of zeros of $f(z)$ in $|z| \leq x$. Let $\overline{\lim} x^{-\rho} n(x) = \frac{L}{l}$. Boas has proved that $l \leq \rho T$,

and $L \leq e \varrho T$, [Ann. of Math. 47, 21—32 (1946)], and has shown by examples that these inequalities are best possible. Buck here gives a further example for the second inequality, and also proves that simultaneous equality in both formulae is impossible, by establishing the following theorem, and then setting $\Phi(x) = \varrho/x$, $f(x) = n(x)$ therein: — Let $\Phi(x)$ be positive, continuous, and let $\Phi(x) \sim c/x$, $c > 0$.

Let $g(x) = \int_{0+}^x f(t) \Phi(t) dt$, $\psi(x) = \exp \int_0^x \Phi(t) dt$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{a}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\psi(x)} \leq 1$.

Then, if $f(x)$ is increasing, we have $a + e A \leq e^2$.

N. A. Bowen.

Rosenbloom, P. C.: The fixpoints of entire functions. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 186—192 (1952).

Zunächst bringt Verf. einen ausführlichen Beweis für seine früher ausgesprochenen Sätze (siehe dies. Zbl. 30, 251): Wenn die analytischen Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ ganz sind und $f(z)$, $g(z)$ und $f[g(z)]$ keine Fixpunkte besitzen, so handelt es sich um Translationen; haben $f(z)$ und $f[g(z)]$ endlich viele Fixpunkte, so ist $f(z)$ ein Polynom oder aber $g(z) \equiv \text{const}$ oder $g(z) \equiv z$. Diese Sätze werden unter anderem wichtig in der Theorie der Iterationen ganzer Funktionen (siehe z. B. Hinweis des Ref. bezüglich des Existenzbeweises der Menge \mathfrak{F} am o. a. O.). Bemerkenswert ist, daß hier — der letztere Satz wird unter Benutzung des zweiten Hauptsatzes bewiesen — erstmalig die Nevanlinnasche Theorie in der Iterationstheorie angewandt wird. — Ferner wird nach ähnlicher Methode bewiesen: Wenn $f(z)$ eine nichtlineare ganze Funktion ist und sowohl $f(z)$ als auch $f[g(z)]$ nur endlich viele Fixpunkte besitzen, so ist $g(z)$ ein Polynom. Und: Wenn $f(z)$ ein Polynom vom Grad größer als 1 und $g(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist, so gilt:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{N[r, (f[g(z)] - z)^{-1}]}{T[r, g(z)]} \geq 1.$$

H. Töpfer.

Sunyer i Balaguer, F.: Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire. Acta math. 87, 17—31 (1952).

In this sequel to the author's papers [Mem. R. Acad. Ci. Artes Barcelona, Tercera época 29, 475—516 (1948) and this Zbl. 41, 404], he obtains results, more precise than those announced (this Zbl. 29, 34), typified by the following theorem.

If $F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ is holomorphic in $|z| < 1$, and if $n(r) < q r(1-r)^{-\lambda}$, then, for $r > r_0$, $r_0 < 1$, the inequality $\log M(r, F) < K_1(1-r)^{-e} + K_2$ holds, where q, r_0, K_1, K_2 depend on q, λ , and the gap conditions. — This theorem shows that the hypothesis, postulating the existence of two exceptional values, in well-known theorems of Schottky and Landau, may be replaced: one exceptional value is sufficient, if the power series has suitable gaps. The other two chapters deal in a similar manner with integral functions of finite and infinite order.

N. A. Bowen.

Shah, S. M. and M. Ishaq: On the maximum modulus and the coefficients of an entire series. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 177—182 (1952).

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une fonction entière d'ordre fini ou infini, $\mu(r)$ le terme maximum de la série pour $|z| = r$ et $\nu(r)$ le rang de ce terme. — Les AA. donnent de nombreuses relations entre les limites supérieures et inférieures pour $r \rightarrow \infty$ de $l_k M(r)/l_k r$, de $l_{k-1} \nu(r)/l_k r$, de $l_k \mu(r)/l_k(r)$ et les limites pour $n \rightarrow \infty$ de $l_{k-1} n/l_{k-1} \left(\frac{1}{n} \log \frac{1}{|a_n|} \right)$. Ils donnent aussi des relations entre des quantités qui se définissent comme les précédents, en abaissant d'une unité les indices des logarithmes itérés figurant aux dénominateurs.

J. Dufresnoy.

Littlewood, J. E.: On some conjectural inequalities with applications to the theory of integral functions. J. London math. Soc. 27, 387—393 (1952).

Let $f(z)$ be an arbitrary polynomial of degree not greater than N , and $g(z)$ be

an arbitrary rational function of degree not greater than N . Put

$$J(r, f) = \frac{1}{r} \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} |f'| (1 + |f|^2)^{-1} r \, dr \, d\theta$$

and similarly for $g(z)$. Considering the spherical area of the covering surface defined by $w = f(z)$ and using Schwarz's inequality, the author proves that for varying g and r , $J(r, g)$ has an upper bound $\psi(N)$ depending only on N and not greater than $2\pi N^{1/2}$. Similarly $J(r, f)$ has an upper bound $\varphi(N)$, where $\varphi(N) \leq \psi(N)$. The conjectural inequality is

$$(1) \quad \varphi(N) \leq \psi(N) < A N^{1/2-\alpha}$$

where α is a positive constant. Assuming the truth of the inequality (1), the author proposes a theorem on the value-distribution of an integral function of finite non-zero order (as prospective applications to integral functions). *K. Noshiro.*

Shah, S. M.: Exceptional values of entire and meromorphic functions. *Duke math. J.* **19**, 585—593 (1952).

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion der endlichen Ordnung ρ . Ein Wert α heißt Ausnahmewert (e. v.) B , (exceptional values), wenn

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ n(r, \alpha)}{\log r} = \rho(\alpha) < \rho$$

und Ausnahmewert (e. v.) E , wenn

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r)}{n(r, \alpha) \cdot \Phi(r)},$$

wobei $\Phi(x)$ eine positive, nicht fallende Funktion bedeutet. Ist α ein (e. v.) E , so existieren für $f(z)$ ρ Sektoren mit dem Zentrum in $z = 0$, in denen $f(z) \rightarrow \alpha$ für $z \rightarrow \infty$. D. h. die Zahl der endlichen asymptotischen Werte von $f(z)$ ist ρ . Dieser Satz gilt nicht mehr für meromorphe Funktionen $F(z)$ der Ordnung ρ . Hat die meromorphe Funktion $F(z)$ endlicher Ordnung zwei (e. v.) B , nämlich α_1 und α_2 , so gilt $\alpha_1 \{\text{oder } \alpha_2\}$ (e. v.) $B \Rightarrow \alpha_1 \{\text{oder } \alpha_2\}$ (e. v.) E . Für eine ganze Funktion $f(z)$ mit einem (e. v.) E beweist Verf. die Beziehung $T(r, f) \sim T(r, f')$. Hat die meromorphe Funktion $F(z)$ mit $\rho < \infty$ zwei (e. v.) E , nämlich α_1 und α_2 , so existiert der endliche Grenzwert $n(r, F - x)/r^\rho$, und weiter folgt $n(r, F - x)/T(r) \rightarrow \rho$ für jedes $x \neq \alpha_1$ und α_2 . *H. P. Künzi.*

Milloux, H.: Sur une propriété des fonctions méromorphes et de leurs dérivées. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **31**, 1—18 (1952).

Using Jensen's formula and Schwarz' lemma, the author gave [*J. Analyse math.* **1**, 244—330 (1951)] a proof that a function holomorphic and of modulus greater than unity in a circle, and such that its derivative vanishes sufficiently often in an interior circle, does not vary much in modulus in the latter circle. In the present article, by a method based on the fundamental theorems of R. Nevanlinna (given for example in *Le théorème de Picard-Borel*, Paris 1929), Milloux obtains, for meromorphic functions, analogous results having a wider field of application. The principal result may be stated as follows. Let $f(z)$ be meromorphic in the unit circle where it does not take, more than n times in total, three values a, b, c whose spherical distances from one another are less than e^{-n} . Then, if $f'(z)$ vanishes more than n' times in an interior circle and if the ratio n'/n is sufficiently large, it follows that the variation, as z ranges over nearly the whole of the latter circle, of the point representing $f(z)$ on the Riemann sphere, is small. The author proposes later (i) to use this theorem in the comparative study of the Borel-Valiron directions of a meromorphic function of finite order and of its derivative, (ii) to extend this theorem by replacing the hypothesis on $f'(z)$ by an analogous hypothesis on $f'(z) - \alpha$, α being any given constant, thus obtaining a conclusion on the variation of $f(z) - \alpha z$. *N. A. Bowen.*

Kobu, Tadao: Bounded analytic functions in a doubly connected domain. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto*, Ser. A **27**, 41—45 (1952).

Von allen Funktionen der Klasse B , regulär und einwertig im n -fach zusammenhängenden Gebiet D mit den Normierungen: $|f(z)| \leq 1$; $f(\infty) = 0$ und der Entwicklung $f(z) = a_1/z + a_2/z^2 + \dots$ in der Umgebung von $z = \infty$ existiert nach Ahlfors (1947) für die Funktion $f_0(z)$, welche D auf das Innere des Kreises $|w| < 1$

genau n mal abbildet, das Maximum für $|a_1|$. — Verf. berechnet $\text{Max. } |a_1|$ explizit für den Fall eines zweifach zusammenhängenden Gebietes D . Die Konstanten, die $\text{Max } |a_1|$ bestimmen, sind eindeutig durch die geometrische Form von D gegeben.

H. P. Künzi.

Umezawa, Toshio: Analytic functions convex in one direction. J. math. Soc. Japan 4, 194—202 (1952).

Applying M. S. Robertson's result on analytic functions star-like in one direction (this Zbl. 14, 120) the author obtains some theorems on analytic functions convex in one direction. The following is typical: Let $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ meromorphic in $|z| < 1$. If there holds $\alpha > 1 + \Re(z f''(z)/f'(z)) > -\alpha/(2\alpha - 3)$ for $|z| < 1$, where α is an arbitrary number $\geq 3/2$, then $f(z)$ is a regular univalent function (in $|z| < 1$) which maps every circle $|z| = r$ ($r < 1$) onto a curve convex in one direction and $|a_n| \leq n$ for all n . Furthermore the author gives some analogous results in the case of multivalency, by extending the concept of star-likeness and convexity in one direction.

K. Noshiro.

● Lenz, Hanfried: Über Verallgemeinerungen der Schwarzschen Polygonalabbildung. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1952, 13—29 (1952).

The author generalizes the Schwarz' result on conformal mapping of simply-connected polygons, rectilinear or circular, to more general domains, especially to multiply-connected polygons. Based on Schottky's mapping theorem, any schlicht domain of finite connectivity with no degenerate boundary-component can be mapped onto a Riemann half-surface, i. e., a domain of which the whole boundary lies on a fixed circumference. A subdomain of a closed Riemann surface is called a polygon if it is bounded by a finite number of circular arcs. A polygon is said to belong to a group \mathfrak{G} , if the group generated by linear transformations arising from two successive inversions with respect to the sides is a subgroup of \mathfrak{G} . A differential expression $J(w, w', w'', w''')$ with $w = w(z)$ is called an invariant function of \mathfrak{G} , if it maps any polygon \mathfrak{P} , laid on the w -plane and belonging to \mathfrak{G} , onto a Riemann half-surface, provided $z = z(w)$ maps \mathfrak{P} onto a Riemann half-surface with boundary merely on the real axis. It is then proved that if $z = z(w)$ maps a polygon \mathfrak{P} belonging to \mathfrak{G} onto a Riemann half-surface \mathfrak{H} , then any invariant function of \mathfrak{G} is a function one-valued and algebraic on the Riemann surface \mathfrak{H} obtained by duplication of \mathfrak{H} ; namely, a differential equation of the form $J(w, w', w'', w''') = R(s, z)$ is valid, where $R(s, z)$ denotes a rational function of both variables s and z which are connected by an irreducible algebraic equation, generating \mathfrak{H} , with real coefficients. A slight generalization is made. — The widest group consisting of all the linear transformations has the Schwarzian derivative $\{w, z\} \equiv (w''/w')' - \frac{1}{2} (w''/w')^2$ as its invariant function. According to special subgroups together with special configurations of corresponding polygons, their invariant functions may be of lower order. Various cases are enumerated in view of this classification.

Y. Komatu.

Epheser, Helmut und Friedemann Stallmann: Konforme Abbildung eines Parallelstreifens mit Halbkreiskerbe. Arch. der Math. 3, 276—281 (1952).

Verf. beschäftigt sich mit einer Näherungslösung für das Problem der konformen Abbildung eines Parallelstreifens mit einer Halbkreiskerbe. Es wird eine einfache und praktisch brauchbare Formel gegeben, die einen Halbkreis $\Im z > 0$, $|z| > r$ auf einen Parallelstreifen mit einer Kerbe abbildet. In diese Formel gehen gewisse Parameter ein, die die Form der Kerbe festlegen und so gewählt werden können, daß die Kerbe in guter Annäherung halbkreisförmig wird. Das Verfahren kann auf andere technisch wichtige Abbildungsaufgaben ausgedehnt werden (das Rechteck bzw. das Kreisbogenzweieck mit Halbkreiskerbe u. a.).

J. Górski.

Hällström, Gunnar af: Eine quasikonforme Abbildung mit Anwendungen auf die Wertverteilungslehre. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. 18, Nr. 8, 16 S. (1952).

Zunächst behandelt Verf. die Veränderung der Modulgröße eines Ringgebietes und der Randkapazität eines Gebietes bei quasikonformer Abbildung, wobei in den Schätzungen die Flächenintegrale des Dilatationsquotienten selbst auftreten. Anderes bezieht sich auf die Invarianz des Typus bei gewissen Abänderungen einer Riemannschen Fläche, worauf schon Kakutani und Wittich hingewiesen haben.

Sodann konstruiert er durch Verschiebung der Windungspunkte der von $\cos z$ erzeugten Riemannschen Fläche ganze Funktionen, die zu weitgehend beliebig gewählten Werten $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ vorgeschriebene Verzweigungsindizes $\mu_n = \mu(w_n)$ mit $\mu_n \leq \frac{1}{2}$ und $\sum_1^\infty \mu_n \leq 1$ haben; und bemerkt, daß bei geeigneter Wahl der periodischen Funktion die Bedingung $\mu_n \leq 1/2$ durch $\mu_n < 1$ ersetzt werden darf. Durch Verschiebung logarithmischer Windungspunkte bei der von e^{e^z} erzeugten Fläche konstruiert Verf. eine ganze Funktion, von der er vermutet, daß sie unendlich viele Defekte hat.

A. Pflüger.

Vekua, N. P.: Über ein Problem der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 457–460 (1952) [Russisch].

Es sei D^+ ein endliches, zusammenhängendes Gebiet in der Ebene, begrenzt durch die Vereinigungsmenge L von einfachen geschlossenen, hinreichend glatten, sich nicht überschneidenden Kurven. D^- sei das Komplement zu $D^+ + L$ in der Ebene. Gesucht wird ein stückweise analytischer Vektor $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \Phi_2(z), \dots, \Phi_n(z))$, der im Unendlichen von endlicher Ordnung ist und auf L der Randbedingung: $\Phi^+(t_0) = A(t_0)\Phi^-(t_0) + B(t_0)\overline{\Phi^-(t_0)} + g(t_0)$ genügt. Dabei sei $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ ein gegebener Vektor, der einer Hölderbedingung genügt; $A(t_0), B(t_0)$ seien Matrizen, deren Elemente Hölderbedingungen genügen. Die Determinante von $A(t_0)$ sei auf L überall $\neq 0$. Durch den Ansatz:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{A(t)\varrho(t) + B(t)\overline{\varrho(t)}}{t-z} dt \quad \text{für } z \in D^+,$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varrho(t) dt}{t-z} + \gamma(z) \quad \text{für } z \in D^-$$

[$\gamma(z)$ = Vektor mit Polynomkomponenten, Hauptteil von $\Phi(z)$ im Unendlichen] führt diese Aufgabe auf eine singuläre Integralgleichung für $\varrho(t)$ von einem Typus, den Mandžavidze (dies. Zbl. 41, 226) untersucht hat. Unter Benutzung von Resultaten von Mandžavidze erhält Verf. Sätze, die analog zu seinen Ergebnissen über Systeme von singulären Integralgleichungen sind.

W. Thimm.

Fichera, Gaetano: Sulla „kernel function“. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 4–15 (1952).

L'A. expose de façon très rapide, grâce aux propriétés de l'espace de Hilbert, une théorie des „noyaux reproduisants“ développée longuement dans l'ouvrage de Bergmann (ce Zbl. 40, 190). Généralités en deux pages et applications immédiates à tous les cas de Bergmann. Généralisation de la théorie et critique de certaines affirmations de Bergmann sur l'utilité pratique de ces noyaux pour la résolution numérique des problèmes traités.

M. Brelot.

Nagura, Shohoi: Behavior of kernel functions on boundaries. Kōdai math. Sem. Reports 1952, 54 (1952).

Let D be a simply connected domain whose boundary is a continuum F and z_0 a point on F . We suppose that there exists a triangle $A z_0 B$ which is contained in D , i. e. there exists Stolz's paths in D . Let $K(z, \zeta)$ be a Bergman kernel function. The author proves that $K(z, z)$ tends to positive infinity when z approaches to z_0 along any Stolz's path. The method of the proof can be applied to multiply connected domains.

J. Górski.

Myrberg, Lauri: Über das Verhalten der Greenschen Funktionen in der Nähe des idealen Randes einer Riemannschen Fläche. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I Nr. 139, 8 S. (1952).

Verf. betrachtet eine beliebige offene Riemannsche Fläche F , die Greensche Funktionen besitzt, deren idealer Rand R also positives harmonisches Maß hat. Durch eine endliche Anzahl analytischer Kurven auf F wird eine Teilfläche F' mit einem idealen Randelement $R' \subset R$ abgegrenzt. Verf. zeigt nun, daß die Greensche Funk-

tion in der „Umgebung“ von R' eine positive oder verschwindende untere Grenze hat, je nachdem R' in bezug auf F' verschwindendes oder positives harmonisches Maß besitzt. Wie bei Gebietsrändern in der schlichten Ebene kann man also auch in bezug auf R von einem Kern und auf dem Kern von regulären und irregulären Randelementen sprechen. Verf. zeigt, daß, wie im schlichten Fall, die Regularitätseigenschaft von lokaler Natur und vom Pole unabhängig ist. *G. af Hällström.*

Tsuji, Masatsugu: Maximal continuation of a Riemann surface. *Kōdai math. Sem. Reports* **1952**, 55—56 (1952).

Bemerkungen zu einer Arbeit von M. Heins, die sich mit dem Bochnerschen Satz über maximale Fortsetzung Riemannscher Flächen beschäftigt. *H. Wittich.*

Nevanlinna, Rolf: Über die Polygondarstellung einer Riemannschen Fläche. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. **122**, 9 S. (1952).

Auf zwei Kurven L_z^1, L_z^2 , die als einzigen gemeinsamen Punkt den „Eckpunkt“ P haben, sei eine analytische Zuordnung zwischen den Punkten z_1 und z_2 erklärt; die Kurve L_z^0 verlaufe zwischen den beiden Kurven und verbinde z_1^* mit dem äquivalenten Punkt z_2^* . Durch Identifizierung der äquivalenten Punkte z_1, z_2 entsteht eine zweifach zusammenhängende Riemannsche Fläche F_z , die von der geschlossenen Kurve L_z^0 und von der idealen Randkomponente (P) , die P zugeordnet ist, berandet wird. F_z wird konform in $1 \leq |\omega| < \rho \leq \infty$ abgebildet, wobei L_z^0 dem Kreis $|\omega| = 1$ entsprechen soll. $|\omega| = \rho$ ist dem Randteil (P) zugeordnet. Je nachdem ρ endlich oder unendlich ist, liegt eine Grenzkreisecke oder Grenzpunktecke vor. Mit einer Methode, die bei der Behandlung des Typenproblems mehrfach angewandt wurde, wird ein hinreichendes Kriterium für den Grenzpunktfall hergeleitet. Ist L_z^1 der Halbstrahl $x \geq 0, y = 0$, L_z^2 der Halbstrahl $x \geq 0, y = 1$ und L_z^0 die Strecke $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ ($P = \infty$), so liefert das Kriterium, daß für $x_2 - x_1 = O(\sqrt{x_1})$ F_z zum Grenzpunkttypus gehört. Ist die Äquivalenzrelation $z_2 = (1 + p)z_1 + i, p > 0$ fest, so ist $\rho = \exp(\pi^2/\log(1 + p))$ endlich, so daß für $x_2 - x_1 = O(x_1)$ eine Grenzkreisecke vorliegen kann. *H. Wittich.*

Niini, Risto: Über eine nicht-konstruierbare Riemannsche Fläche vom Geschlecht eins. *Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I* Nr. **132**, 6 S. (1952).

Es werden Flächen vom Geschlecht 1 betrachtet, die 7-, 3- und 2-blättrige Windungspunkte besitzen. Jedes Blatt soll höchstens einen Windungspunkt jeder Art aufweisen. Die kleinste Blattzahl N , für welche dann die Riemannsche Formel gilt, ist 21, die zweitkleinste $N = 28$. Für $N = 21$ müßte die Fläche 3 siebenblättrige, 7 dreiblättrige und 10 zweiblättrige Windungspunkte besitzen. Verf. zeigt, daß eine solche Fläche nicht konstruierbar ist. Für $N = 28$ ist die Konstruktion unter der angegebenen Nebenbedingung möglich. *H. Wittich.*

Parreau, M.: Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann. *Ann. Inst. Fourier* **3**, 103—197 (1952).

Zunächst behandelt Verf. die Lösung des Dirichletschen Problems für kompakte Gebiete einer offenen Riemannschen Fläche S nach dem Perronschen Verfahren und beweist dann für die Greensche Funktion $g(p, q)$ auf einer hyperbolischen (positiv berandeten) Fläche das folgende Randverhalten: 1. Wird eine subharmonische Funktion u auf S durch $k g(p, a)$ ($k > 0, a$ fest) majorisiert, so ist $u \leq 0$. 2. Das Gebiet $g(p, a) > \lambda$ ($\lambda > 0$) ist entweder kompakt oder parabolisch, d. h. jede auf diesem Gebiete beschränkte und auf dem Relativrand verschwindende harmonische Funktion verschwindet identisch. Damit kann auch ein „äußeres Dirichletsches Problem“ formuliert und gelöst werden. Das Greensche Potential $U^\mu = \int g(p, q) d\mu(q)$ einer positiven Massenbelegung μ ist superharmonisch oder $= \infty$ und hat im ersten Fall ein ähnliches Randverhalten wie $g(p, a)$ selbst. Es gilt auch der Rieszsche Satz über die Darstellung einer superharmonischen Funktion als Summe eines Potentials und einer harmonischen Funktion, insbesondere ist eine superharmonische Funktion auf S dann und nur dann ein Greensches Potential, wenn ihre größte harmonische Minorante verschwindet. Schließlich wird die balayage-Theorie nach einer Methode von M. Brelot [*J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **24**, 1—32 (1945)] auf hyperbolische Flächen übertragen und eine Potentialtheorie auf parabolischen Flächen angedeutet. — Im dritten und vierten Kap. kommt Verf. zum eigentlichen Gegenstand seiner Untersuchungen, der Klassifikation Riemannscher Flächen vom Gesichtspunkt der Mittelwerte

harmonischer und analytischer Funktionen (vgl. auch R. Nevanlinna, dies. Zbl. 36, 191; 42, 85). Es sei M die Klasse der auf S positiven subharmonischen Funktionen mit beschränkten Mittelwerten, (HD) die Klasse der harmonischen Funktionen mit endlichem Dirichletintegral, (HB) die Klasse der beschränkten harmonischen Funktionen und HM_α die Klasse der harmonischen Funktionen mit $|u|^\alpha \in M$ ($\alpha \geq 1$). C_{HD} , C_{HB} und C_{HM_α} bezeichnen die Flächenklassen, auf denen die (HD) bzw. (HB) bzw. (HM_α) aus lauter Konstanten bestehen, und C_0 sei die Klasse der parabolischen Flächen (d. h. ohne Greensche Funktion). Dann gilt

$$C_0 \subset C_{HM_1} \subset C_{HB} = C_{HM_\alpha} \subset C_{HD}, \quad (\alpha > 1).$$

M_0 bezeichne die Klasse der auf $S - S_0$ (S_0 kompaktes Teilgebiet auf S) positiven subharmonischen Funktionen mit beschränkten Mittelwerten, die auf dem Rande C_0 von S_0 verschwinden, (H_0D) , (H_0B) und (H_0M_α) die analogen Klassen harmonischer Funktionen, die auf C_0 verschwinden. Diese Klassen reduzieren sich gleichzeitig auf die Konstante 0, und zwar genau für die parabolischen Flächen. Analoge Sachverhalte gelten auch für die Klassen (HM_α) bzw. (H_0M_α) von harmonischen Funktionen u mit $\Phi(|u|) \in M$ bzw. M_0 , wo Φ eine monoton wachsende und konvexe Funktion ist. Ferner werden die Theorie der positiven harmonischen Funktionen in räumlichen Gebieten von R. S. Martin (dies. Zbl. 25, 333) auf hyperbolische Flächen übertragen, die eindeutige Zerlegung einer positiven harmonischen Funktion in die Summe einer quasi-beschränkten und einer singulären harmonischen Funktion bewiesen und gewisse Minimalprobleme in der Klasse (HM_2) bezüglich einer geeigneten Norm mit einer entsprechenden Kernfunktion in Zusammenhang gebracht. — Für analytische Funktionen f auf S werden Mittelwerte der Ordnung $\alpha \geq 0$ eingeführt, nämlich $\int_{x=\lambda} |f|^\alpha dy$ für $\alpha > 0$ und $\int_{x=\lambda} \log |f| dy$ für

$\alpha = 0$ längs den Niveaulinien gewisser harmonischer Funktionen x in Ringgebieten, wo für das zu dx konjugierte Differential dy gilt $\int_{x=\lambda} dy = 1$. (AM_α) bezeichnet die Funktionenklasse, für welche die Mittelwerte der Ordnung α beschränkt sind, (AD) und (AB) die Klassen der analytischen Funktionen mit endlichem Dirichletintegral bzw. beschränktem Betrag, C_{AM_α} , C_{AD} und C_{AB} die entsprechenden Flächenklassen. Dann gilt

$$C_0 \subset C_{AM_\alpha} \subset C_{AB} \subset C_{AD}, \quad 0 \leq \alpha < \infty.$$

Ein Teil der Nevanlinnaschen Theorie der meromorphen Funktionen wird auf offene Riemannsche Flächen übertragen.

A. Pfluger.

Agmon, Shmuel and Lipman Bers: The expansion theorem for pseudo-analytic functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 757—764 (1952).

Eine pseudoanalytische Funktion $w(z) = \Phi(z)F(z) + \psi(z)G(z)$, wo (F, G) das erzeugende Funktionenpaar bedeutet, sei in einem Gebiet D mit Ausnahme punktförmiger Singularitäten regulär. Dann kann sie in der Form $w = S \cdot f$ geschrieben werden, wobei die Funktion S in \bar{D} stetig ist und der Bedingung $1/k \leq |S| \leq k$ genügt. Die Konstante k hängt nur von (F, G) ab. Die Funktion $f(z)$ ist eine in D eindeutige, analytische Funktion, die höchstens singuläre Punkte aufweist. Es gilt auch die Umkehrung. Auf diesem Hilfssatz beruht im wesentlichen der Beweis des Satzes: $w(z)$ sei für $|z - z_0| < R$ pseudoanalytisch, dann existiert eine eindeutige Entwicklung der Form $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{(n)}(\alpha_n, z_0, z)$, die in diesem Kreis konvergiert. Die Funktionen $Z^{(n)}$ sind die symbolischen Potenzfunktionen.

A. Kriszten.

Caccioppoli, Renato: Sur une généralisation des fonctions analytiques et des familles normales. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 116—118 (1952).

Caccioppoli, Renato: Sur une généralisation des fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 228—229 (1952).

Verf. nennt eine Funktion $w = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + i y$, pseudoanalytisch, wenn die partiellen Ableitungen von u und v fast überall existieren und quadratisch integrabel sind, sowie $J = \partial(u, v)/\partial(x, y) > 0$ und $\varphi(x, y) \geq \mu \Phi(x, y)$ ($\mu \leq 1$) ist mit $\Phi = \limsup_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$, $\varphi = \liminf_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$. Für diese

Kategorie von Funktionen gibt er analoge Sätze an, wie dies von verschiedener Seite unter etwas anderen Voraussetzungen getan wurde. — Gilt im Bildgebiet die isoperimetrische Ungleichung $F \leq K L$ und ist $\omega(r)$ die Schwankung von $w(z)$ im

$|z| \leq r$ und $F(r) = \iint_{|z| < r} J \, dx \, dy$, so ist

$$F(r) \ln \frac{R}{r} < 2\pi K^2 \quad \text{und} \quad \omega(r) \ln \frac{R}{r} < \frac{\pi}{2\mu} F(R) \quad (r < R).$$

Bei festem K und μ ist also die Funktionenmenge gleichstetig. — Es gibt eine absolute Konstante κ , so daß in der isoperimetrischen Ungleichung $K = \kappa \varrho$ gesetzt werden kann, wenn ϱ die obere Grenze der Radien der auf G gelegenen Kreisscheiben bezeichnet. Obige Abschätzung für $F(r)$ in Verbindung mit $r_0^{-2\mu} \cdot F(r_0) \leq r^{-2\mu} F(r)$, $r_0 < r$, ergibt daher bei geeigneter Normierung in $z = 0$ eine positive untere Schranke für ϱ , also einen Blochschen Satz für pseudoanalytische Funktionen. — Es ist beachtenswert, daß hier ein direkter Weg zu einem solchen Satz erzielt wurde (also nicht durch Reduktion auf den Fall der analytischen Funktion), er liefert aber für die Blochsche Konstante nur rohe Schätzungen. *A. Pfluger.*

Finn, Robert: Sur quelques généralisations du théorème de Picard. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 596—598 (1952).

Verf. gibt einige Resultate über pseudo-analytische Funktionen im Sinne von Caccioppoli (vgl. vorangeh. Referat) an, insbesondere über solche von der Form $w = \varphi_x - i \varphi_y$ mit $\varphi(x, y)$ als Lösung gewisser partieller Differentialgleichungen. *A. Pfluger.*

Gergen, J. J. and F. G. Dressel: Uniqueness for p -regular mapping. Duke math. J. **19**, 435—444 (1952).

Sei Γ der Kreis mit Radius a um den Ursprung der $(z = x + i y)$ -Ebene, S sei sein Inneres. Die reelle und positive Funktion $p(x, y)$ genüge den Bedingungen $p \in C^0(S)$, $p \in C^1(S)$, p_x und p_y beschränkt in S . Sind F_1 und F_2 zwei in S p -reguläre Funktionen, $F_i \in C^0(S)$, $F_i \in C^1(S)$, und bilden die beiden Funktionen \bar{S} auf den gleichen Bereich eindeutig ab, so gilt $F_1 \equiv F_2$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist. (1) $F_1 = F_2$ in drei verschiedenen Punkten von Γ . (2) $F_1 = F_2$ in zwei verschiedenen Punkten von S , von denen höchstens einer auf Γ liegt. (3) $F_1 = F_2$, $F'_1 = F'_2$ in einem Punkt von S [$F'_i(z)$ p -Ableitung]. Aus (1) folgt speziell die Eindeutigkeit der von den Verff. konstruierten Abbildungsfunktion (dies. Zbl. **42**, 89). *A. Kriszten.*

Fréchet, Maurice: Sur deux familles de fonctions analogues à la famille des fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1585—1587 (1952).

Durch Einführung einer geeigneten Algebra D ($1 \cdot j = j \cdot 1 = j$, $j^2 = 0$) resp. P ($1 \cdot k = k \cdot 1 = k$, $k^2 = k$) werden analog zu den analytischen Funktionen zwei Klassen von hyperkomplexen Funktionen definiert, die zu der einfachsten parabolischen resp. hyperbolischen Differentialgleichung 2. Ordnung gehören. Spezielle Funktionen dieser Art wurden schon von F. Reutter (dies. Zbl. **29**, 395) untersucht. *A. Kriszten.*

Rizza, Giovanni Battista: Contributi al problema della determinazione di una formula integrale per le funzioni monogene nelle algebre dotate di modulo e commutative. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **11**, 134—155 (1952).

Es sei A^* eine reelle kommutative Algebra der Ordnung $2n$ mit Einselement, aufgefaßt als reelles Bild einer (zu A^* isomorphen) Algebra A . Nachdem Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **43**, 86) für reguläre (monogene) Funktionen $F(X)$ in A^* Integralsätze vom Typus des ersten Cauchyschen Satzes aufgestellt hat, gewinnt er hier folgende Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{F(X)}{X - \mathcal{E}} dX = 2\pi i N F(\mathcal{E}).$$

Dabei ist \mathcal{E} ein Punkt des Regularitätsbereiches R_{2n}^* von $F(X)$ und Γ_1 ist ein eindimensionaler, in $R_{2n}^* - \bar{\omega}_{2n-2} + \mathcal{E}$ nullhomologer Zyklus, wo $\bar{\omega}_{2n-2}$ den Parallelraum durch \mathcal{E} zu dem von den Nullteilern von A^* erfüllten linearen Raum bedeutet.

N ist die Verschlingungszahl von Γ_1 und $\bar{\omega}_{2n-2}^*$. — Die Integralformel wird auch für eine als direkte Summe von Algebren A^* darstellbare Algebra aufgestellt, womit eine große Klasse von Algebren erfaßt wird. Die für einige dieser Algebren schon früher gefundenen Integralformeln erweisen sich als Spezialfälle des hier gewonnenen allgemeinen Resultats.

E. Trost.

Gotusso, Guido: *Intorno alla corrispondenza tra due piani e alle condizioni di monogenità.* Periodico Mat., IV. Ser. **30**, 160—163 (1952).

Die reellen Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ seien in einer Umgebung von x_0, y_0 mit stetigen Ableitungen 1. Ordnung u_x, \dots, v_y versehen. Wenn man $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$ (t reell), $z = x + i y$, $w = u + i v$ setzt und α, β den reellen Einheitskreis durchlaufen läßt, so durchläuft $dw/dz = (dw/dt)/(dz/dt)$ in der komplexen Ebene den Kreis mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y)$ und dem Radiusquadrat $\frac{1}{4}\{(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2\}$ [$u_x = u_x(x_0, y_0)$ usw.].

R. Schmidt.

García Pradillo, Julio: *Weiteres über Monogenität.* Gac. mat., Madrid **4**, 207—209 (1952) [Spanisch].

Igusa, Jun-ichi: *On a property of the domain of regularity.* Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **27**, 95—97 (1952).

The object of this investigation is to characterize the analytic structure of the domain of regularity by the algebraic structure of the ring \mathfrak{D} of analytic functions on it. Let D be a domain of regularity in the complex n -space C^n , and $\hat{D} = \{\mathfrak{P}\}$ be the set of all maximal ideals in \mathfrak{D} , such that the residue-class field $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ coincides with C . Then each \mathfrak{P} has an ideal base composed of n elements and \hat{D} will be an analytic manifold with the same analytic structure as D . The proof is quite simple but based upon the recent result of H. Cartan [Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. **61**, 149—197 (1944)] and K. Oka (this Zbl. **36**, 52).

T. Tannaka.

Lelong, Pierre: *Équivalence de certaines propriétés de pseudo-convexité.* C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 594—596 (1952).

Verf. definiert für Gebiete im Raume von n komplexen Veränderlichen den Begriff der Konvexität in bezug auf plurisubharmonische Funktionen (P -Konvexität); er kündigt an, daß die P -Konvexität mit einer Reihe weiterer Eigenschaften schlechter Gebiete, insbesondere mit der Pseudokonvexität im üblichen Sinne, äquivalent ist. Ferner: Ein lokal P -konvexes Gebiet ist stets auch P -konvex. — Die Resultate des Verf. sind von besonderem Interesse im Hinblick auf das Levische Problem, das von K. Oka für $n = 2$ gelöst wurde [Tôhoku math. J., II. Ser. **49**, 15—52 (1942)], dessen allgemeine Lösung aber noch immer aussteht.

K. Stein.

Lelong, Pierre: *La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.* J. Math. pur. appl., IX. Sér. **31**, 191—219 (1952).

Die vom Verf. (dies. Zbl. **28**, 56 u. 226) und K. Oka [Tôhoku math. J. **49**, 15—52 (1942)] unabhängig voneinander eingeführten plurisubharmonischen Funktionen (von Oka als pseudo-konvexe Funktionen bezeichnet) haben sich als wichtiges Hilfsmittel für die Theorie der Regularitätsgebiete im Raume C^n von n komplexen Veränderlichen $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$ erwiesen. In der vorliegenden Arbeit werden sie zum Studium der Fälle benutzt, in denen sich die Levische Pseudokonvexität auf die gewöhnliche euklidische Konvexität reduziert. Verf. gewinnt eine Reihe allgemeiner Sätze, aus denen u. a. folgt: a) Sind G_x und G_y Gebiete im Raume der reellen Veränderlichen x_1, \dots, x_n bzw. y_1, \dots, y_n und ist $G_x \times G_y$ Regularitätsgebiet im C^n , so sind G_x und G_y konvex. b) Ist $f(z_1, \dots, z_n)$ regulär für $\{(x_1, \dots, x_n) \in G_x, y_1^2 + \dots + y_n^2 < R^2\}$, so ist f in jeden Punkt von $\{(x_1, \dots, x_n) \in \text{Rd } G_x, y_1 = \dots = y_n = 0\}$ fortsetzbar, in dem G_x nicht konvex ist. c) Die bekannte Aussage von der Konvexität der Regularitätshülle eines Tubengebietes, sowie Sätze über beschränkte und wachstumsbeschränkte reguläre und plurisubharmonische Funktionen in Tubengebieten. — Die in den Beweisen benötigten (z. T. schon früher vom Verf. nachgewiesenen) Eigenschaften plurisubharmonischer Funktionen sind einleitend zusammengestellt. Von besonderer Bedeutung ist ein Satz, der die plurisubharmonischen Funktionen in Gebieten des C^n mit den konvexen Funktionen im Raume der x_1, \dots, x_n in Verbindung bringt. Verf. weist ferner auf offene Fragen hin, welche die Erzeugung der plurisubharmonischen aus analytischen Funktionen betreffen und mit dem Levischen Problem in Beziehung stehen.

K. Stein.

Stoll, Wilhelm: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Z.* **57**, 116—154 (1952).

L'A. annonce dans l'Introduction une extension des résultats de R. Nevanlinna sur les valeurs déficientes d'une transformation $w = w(z)$; cette extension concerne les représentations dans l'espace projectif P^M d'une variété analytique complexe M^n au moyen d'un système $w(P) = \{w_1(P), \dots, w_m(P)\}$ de fonctions analytiques complexe sur M^n . L'extension semble dans la voie du travail de H. et J. Weyl (*Meromorphic functions and analytic curves*, Princeton 1943). Toutefois le travail actuel de l'A., présenté comme préparatoire, est consacré surtout à l'exposé de notions connues qui se trouvent déjà, sous la forme utile ici, notamment dans le cours de G. de Rham et Kodaira (*Harmonic integrals*, Inst. for Advanced Study, Princeton 1950). Les dernières pages du mémoire comparent l'aire $d\omega$ de la variété $f(z) = 0$ décrite dans l'espace projectif du vecteur $z = (z_1, \dots, z_n)$ et sa valeur dv dans C^n . On a dans une boule $B(0, R)$ de centre 0, de rayon R :

$$\int v(z) g(z) dv(z) = R^{2n-2} [\tau_{2n-2} v(0) g(0) + \int v(z) g(z) d\omega]$$

$v(z)$ multiplicité de z sur la variété; τ_{2n} est le volume euclidien de $B(0, 1)$; $g(z)$ est supposé holomorphe dans $B(0, R)$. Ce résultat généralise un énoncé de H. Kneser (ce Zbl. 18, 410) et un résultat du référent obtenu par des méthodes différentes (ce Zbl. 39, 88). *P. Lelong.*

Hitotumatu, Sin and Osamu Kôta: Ideals of meromorphic functions of several complex variables. *Math. Ann.* **125**, 119—128 (1952).

Verff. erweitern die von H. Cartan (dies. Zbl. 35, 171; 38, 237) und K. Oka (dies. Zbl. 36, 52; 43, 304) entwickelte Theorie der ganzen Ideale analytischer Funktionen auf gebrochene Ideale. Unter einem gebrochenen Ideal \mathfrak{a} in einem Gebiet \mathfrak{G} wird eine nichtleere Menge von in \mathfrak{G} meromorphen Funktionen verstanden mit folgenden Eigenschaften: (a) \mathfrak{a} ist ein Modul über dem Ring der in \mathfrak{G} regulären Funktionen, (b) \mathfrak{a} besitzt einen Integralisator, d. h. es gibt eine in \mathfrak{G} meromorphe Funktion φ , so daß die Menge $\varphi \cdot \mathfrak{a}$ nur aus in \mathfrak{G} regulären Funktionen besteht. Es wird gezeigt, daß die Hauptsätze aus der Theorie der ganzen Ideale im wesentlichen auch für gebrochene Ideale gelten. So gilt z. B., wenn der Begriff der Abgeschlossenheit eines Ideals in naheliegender Weise auf gebrochene Ideale erweitert wird: Ist \mathfrak{a} ein (gebrochenes) abgeschlossenes Ideal in einem schlichten beschränkten Regularitätsbereich \mathfrak{D} und ψ eine in \mathfrak{D} meromorphe Funktion, die in jedem Punkt $P \in \mathfrak{D}$ dem dort von \mathfrak{a} erzeugten Punktideal $(\mathfrak{a})_P$ angehört, so liegt ψ in \mathfrak{a} . Abschließend benutzen Verff. die gewonnenen Sätze zu einer Charakterisierung der „Idealklassengruppe“. *R. Remmert.*

Bureau, Florent: Sur les transformations engendrées par des systèmes de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. **31**, 161—190 (1952).

Verf. überträgt die Sätze von Schottky und Landau auf analytische Abbildungen im Raume von n komplexen Veränderlichen $(z_1, \dots, z_n) = (z)$. Sei $(f) = T(z)$ eine reguläre Abbildung der Hyperkugel $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < R^2$, welche die analytischen Ebenen $z_j = 0$, $z_j = 1$, $z_j = z_k$ ($j, k = 1, \dots, n$; $j \neq k$) von Bildpunkten unbedeckt läßt. Dann gilt: a) In jeder Hyperkugel $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq \vartheta \cdot R$ ($0 < \vartheta < 1$) ist $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 \leq M$, wo M nur von $T(0)$ und ϑ , nicht aber von der speziellen Abbildung $T(z)$ abhängt. b) Verschwindet die Funktionaldeterminante $I_T(z)$ von $T(z)$ für $(z) = (0)$ nicht, so ist $R \leq N$, wo N nur von $T(0)$ und $|I_T(0)|$ abhängt. Zum Beweise wird eine Erweiterung eines Satzes von H. Rutishauser über die Normalität von Abbildungsfamilien mit Ausnahmeebenen (dies. Zbl. 40, 191) wesentlich benutzt. Für $n = 2$ gibt Verf. besondere Beweise, die sich auf Verallgemeinerungen des Schwarzschen Lemmas stützen und die von Picard eingeführten hyperfuchsschen Funktionen heranziehen. — Einen Teil seiner Resultate hatte Verf. schon früher veröffentlicht (dies. Zbl. 8, 76).

K. Stein.

Bellman, Richard: The iteration of power series in two variables. *Duke math. J.* **19**, 339—347 (1952).

Bei einem Fixpunkt a der analytischen Funktion $F(x)$ mit $F(a) = a$, $F'(a) = m$ und

$|m| \neq 0, 1$ existiert nach Koenigs (1884) stets eine Schrödersche Funktion $S(x)$ (1870), die der linearisierenden Schröderschen Funktionalgleichung $S[F(x)] = mS(x)$ genügt. Die Schrödersche Funktion gestattet unmittelbar die analytische Iteration von $F(x)$ mit $F(x, n) = S_{-1}[m^n S(x)]$, nämlich: $F[F(x, t), s] = F(x, s + t)$. In Analogie hierzu wird in dieser Arbeit eine Linearisierung und analytische Iteration von analytischen Funktionenpaaren mit zwei Variablen unternommen. — Für genügend kleine $|x|$ und $|y|$ seien die Funktionen $f(x, y) = \sum a_{kl} x^k y^l$ und $g(x, y) = \sum b_{kl} x^k y^l$ ($k, l \geq 0, k + l \geq 1$) gegeben; dazu werde vorausgesetzt, daß die Eigenwerte der Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{pmatrix}$$

ungleich Null und dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 sind. Die Iterierten des Funktionenpaares $f(x, y), g(x, y)$ werden mit $f_0(x, y) = x, g_0(x, y) = y; f_n(x, y) = f_{n-1}[f(x, y), g(x, y)], g_n(x, y) = g_{n-1}[f(x, y), g(x, y)]$ ($n = 1, 2, \dots$) definiert. Wünscht man hierzu eine analytische Iteration, so sind zwei Funktionen $f(x, y, t), g(x, y, t)$ zu suchen, für die $f(x, y, n) = f_n(x, y), g(x, y, n) = g_n(x, y)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) gilt und die den Funktionalgleichungen

$$f[f(x, y, s), g(x, y, s), t] = f(x, y, s + t) \quad \text{und} \quad g[f(x, y, s), g(x, y, s), t] = g(x, y, s + t)$$

genügen. — Man gewinnt $f(x, y, t)$ und $g(x, y, t)$ durch zwei Funktionen $\Phi(x, y), \Psi(x, y)$, die einer „Schröderschen Funktionaltransformation“ (Verallgemeinerung der Schröderschen Funktionalgleichung!) genügen, in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \Phi[f(x, y), g(x, y)] \\ \Psi[f(x, y), g(x, y)] \end{pmatrix} = \mathfrak{A} \cdot \begin{pmatrix} \Phi(x, y) \\ \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

$\Phi(x, y)$ und $\Psi(x, y)$ stellen eine „Schrödersche Transformation“ (Verallgemeinerung der Schröderschen Funktion!) dar. — Bei der analytischen Iteration der Matrix \mathfrak{A} beschränkt sich Verf. nur auf solche \mathfrak{A} , bei denen die Eigenwerte voneinander verschieden sind. Dabei kann man nämlich (x, y) derart transformieren, daß (unter Verwendung der eben benutzten Buchstaben für die entsprechenden transformierten Werte) gilt: $f(x, y) = \varrho x + \sum a_{kl} x^k y^l$,

$g(x, y) = \sigma y + \sum b_{kl} x^k y^l$ ($k + l \geq 2; \varrho, \sigma \neq 0$); hier ist $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$ und die t -te Iterierte

$\mathfrak{A}_t = \begin{pmatrix} \varrho^t & 0 \\ 0 & \sigma^t \end{pmatrix}$. Es folgt dann: $\begin{pmatrix} \Phi[f(x, y, t), g(x, y, t)] \\ \Psi[f(x, y, t), g(x, y, t)] \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_t \cdot \begin{pmatrix} \Phi(x, y) \\ \Psi(x, y) \end{pmatrix}$, woraus sich $f(x, y, t)$

und $g(x, y, t)$ ermitteln lassen. — Die Existenz der Schröderschen Transformation $\Phi(x, y), \Psi(x, y)$ wird unter den gemachten Voraussetzungen bewiesen; hinzu tritt allerdings noch die iterationsmäßig naheliegende Forderung, daß $\sigma \neq \varrho^k$ und $\varrho \neq \sigma^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) ist. Beim Beweis wird vom Hadamardschen Multiplikationstheorem wesentlich Gebrauch gemacht. Interessant ist, daß die Koenigssche Methode hier nicht zum Ziele führt. H. Töpfer.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● Yates, Robert C.: Differential equations. New York: McGraw-Hill Book Co. 1952. -VII, 215 p. \$ 3,75.

● Leighton, Walter: An introduction to the theory of differential equations. (International Series in Pure and Applied Mathematics). New York: McGraw-Hill Book Company 1952. VIII, 174 p. \$ 3,50.

Il volume, dedicato principalmente agli studenti che abbiano seguito un corso elementare di Calcolo differenziale e integrale, si prefigge di far intravedere, attraverso la tecnica della risoluzione delle equazioni differenziali di primo ordine riducibili alle quadrature e lo studio delle proprietà delle equazioni differenziali lineari, particolarmente a coefficienti costanti, quale sia la natura dei problemi che sono considerati poi compiutamente nei Trattati. — Le regole di integrazione sono illustrate con adeguati esempi e degli esercizi proposti alla fine dei vari paragrafi è indicato in fondo al testo il risultato. — Due capitoletti riguardano alcune applicazioni elementari alla geometria, alla matematica finanziaria e alla meccanica, un altro capitoletto, — nuovo nelle esposizioni elementari — contiene i teoremi di separazione, di confronto e di oscillazione per le equazioni lineari del secondo ordine e due semplici criteri sufficienti atti a garantire l'esistenza di integrali infinite volte oscillanti in $(0, 1), (1, \infty)$. In appendice è data la sola dimostrazione del teorema di esistenza per i sistemi normali ed è schizzata l'esistenza del fattore integrante per l'equazione $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$.

G. Sansone.

Herz, Jean-Claude: Sur les systèmes de polynômes différentiels. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1085—1087 (1952).

Drei Bemerkungen zur Theorie der Differentialpolynome in R. F. Ritt: Differential Algebra, New York 1950, Kap. I, bes. §§ 6, 13, 14 (dies. Zbl. 37, 184—185) über den Reduktionsalgorithmus, das Vergleichen von Systemen und den Rittschen Basissatz. — Das Reduzieren von D. P. (Differentialpolynomen) in § 6 läßt sich ohne den Begriff der Kette definieren. Unter Verwendung eines beliebigen Systems A_1, A_2, \dots, A_n von D. P. von wachsenden positiven Klassen zeigt Verf., wie man ein D. P. im Bezug auf das Ideal $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ reduziert. — In der Menge aller Systeme von D. P. (über einem festen Körper) bilden diejenigen Systeme, deren charakteristische Mengen (§ 5) gleichen Rang haben, eine Äquivalenzklasse. Rangvergleich liefert eine Partialordnung der Systeme und eine Wohlordnung der Äquivalenzklassen. — Der Rittsche Basissatz (§ 12) folgt nun durch transfinite Induktion aus dem Satze des Verf.: Ein System von D. P. hat eine Basis im Sinne von Ritt, wenn alle „kleineren“ Systeme bereits eine solche Basis haben. A. Jaeger.

Stevenson, A. F. and W. A. Bassali: On the possible forms of differential equation which can be factorized by the Schrödinger-Infeld method. Canadian J. Math. 4, 385—395 (1952).

Für eine spezielle Klasse K von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Sturm-Liouvilleschen Typus werden Kriterien dafür aufgestellt, daß sie sich „faktorisieren“ lassen (vgl. Infeld und Hull, dies. Zbl. 43, 386). Die Klasse K umfaßt insbesondere alle Differentialgleichungen, die durch Variablentransformation rationale Koeffizienten erhalten. Es ergeben sich elf Typen, welche zum Teil über die von Infeld und Hull betrachteten hinausgehen, diese aber alle umfassen. Zwei Typen sind nicht auf rationale Koeffizienten transformierbar und in gewissem Sinne ausgeartet. Die übrigen lassen sich alle auf rationale Form bringen und sind dann vom hypergeometrischen oder konfluent-hypergeometrischen Typ.

M. R. Schafroth.

Viswanatham, B.: On the asymptotic behaviour of solutions of non-linear differential equations. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 36, 335—342 (1952).

Verf. führt Untersuchungen von N. Levinson, H. Weyl und A. Wintner [Amer. J. Math. 68, 1—12, 125—132, 451—454 (1946)] weiter, so daß sie auf nicht-lineare Differentialgleichungssysteme angewendet werden können. Dazu geht Verf. von folgendem Lemma aus: $f(x, u)$ sei stetig in $G_a(\xi \leq x \leq a, -\infty < u < \infty)$ und bez. u nicht fallend. $y(x)$ sei stetig in $\xi \leq x \leq a$, es gelte $y(\xi) = \eta$ und $y(x) \leq \eta + \int_{\xi}^x f(x, y) dx$. $\Phi(x)$ sei die maximale Lösung von $z' = f(x, z)$ durch (ξ, η) . Dann gilt $y(x) \leq \Phi(x)$. Daraus ergibt sich zunächst eine Abschätzung für die Differenz zweier Lösungen von $y' = f(x, y)$ durch (ξ, η) . Weiter wird folgender Satz hergeleitet: Für die beiden Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$ und $z' = g(x, z)$ gelte in $G_{\infty}: |f(x, y) - g(x, z)| \leq \omega(x, |y - z|)$. Dabei sei $\omega(x, u) \geq 0$, stetig und nicht fallend bez. u bei festem x . $\Phi(x)$ sei die maximale Lösung von $v' = \omega(x, v)$ durch $(\xi, 0)$, wobei $\Phi(x)$ für $x \rightarrow \infty$ beschränkt bleibe. Dann ist mit jeder Lösung y auch jede Lösung z durch (ξ, η) beschränkt. — Es sei $\|y\| = \sum |y_i|$. Gilt dann für das System $y' = \mathfrak{F}(x, y): \|\mathfrak{F}(x, y)\| \leq \omega(x, \|y\|)$, geht die oben definierte Lösung $\Phi(x)$ durch den Punkt $(\xi, \|y_0\|)$, so gilt für jede Lösung η durch (ξ, η_0) : $\lim \|y(x)\| < \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Gilt zusätzlich noch $\int^{\infty} \omega(x, M) dx < \infty$ für ein festes M , so strebt η gegen eine endliche Grenze.

W. Haacke.

Yoshizawa, Taro: Note on the non-increasing solutions of $y'' = f(x, y, y')$. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 153—162 (1952).

The problem of determining sufficient conditions for the existence of a non-increasing solution of the equation (1) $y'' = f(x, y, y')$ is dealt with. The following

theorem is proved: Let $f(x, y, z)$ be a continuous function in the domain R : $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < z \leq 0$, such that $f(x, 0, 0) \equiv 0$ and $f(x, y, 0) \geq 0$. Suppose that for every $C > 0$ there exist two functions $\Phi(x, y, z)$ and $\Psi(x, y, z)$ which are positive, continuous, converge uniformly to zero for $z \rightarrow -\infty$ in R_C : $0 \leq x \leq C$, $0 \leq y \leq C$, $z \leq -K$ (where $K > 0$ may be arbitrarily great) and have continuous first derivatives in the interior of R_C satisfying the inequalities

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} z + \frac{\partial \Phi}{\partial z} f(x, y, z) \geq 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} z + \frac{\partial \Psi}{\partial z} f(x, y, z) \leq 0$$

respectively. Then for every $y_0 > 0$ there exists a solution of (1) for $0 \leq x < \infty$ satisfying the initial condition $y(0) = y_0$ and the inequalities (2) $y(x) \geq 0$, $y'(x) \leq 0$. It is also proved that under some additional assumptions every solution of (1) satisfying (2) tends to zero as $x \rightarrow \infty$. Both theorems constitute a generalization of the theorems proved by P. Hartman and A. Wintner (this Zbl. 42, 326).

J. Szarski.

McCarthy, John: A method for the calculation of limit cycles by successive approximation. Contrib. Theory of nonlinear Oscillations, II, Ann. Math. Studies 29, 75—79 (1952).

L'A. applique, pour obtenir un cycle limite stable, la méthode de Newton étendue par Kantorovič à l'équation fonctionnelle. Les approximations s'obtiennent par intégration successive des équations différentielles linéaires et sont toutes périodiques.

M. Hukuhara.

Uno, Toshio and Rieko Yokomi: On some mode of appearance of limit cycles. Math. Japonicae 2, 117—118 (1952).

Data l'equazione differenziale

$$dy/dx = f(x, y, \lambda)/g(x, y, \lambda)$$

dove f e g sono polinomi in (x, y) a coefficienti reali funzioni analitiche di un parametro reale λ , gli Autori studiano dal punto di vista topologico l'andamento delle curve integrali quando al variare del parametro un colle si sovrappone ad un nodo, dando luogo al cosiddetto colle-nodo, e successivamente, con la scomparsa del colle-nodo si ha l'apparizione di un ciclo limite. — È in particolare considerata l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{y^2 - (x+1)[(x-1)^2 + \lambda]}$$

che per $\lambda = 0$ ammette il colle-nodo $(1, 0)$; se $\lambda < 0$ questo colle-nodo si scinde nel punto $(1 - \sqrt{-\lambda}, 0)$ che è un colle e nel punto $(1 + \sqrt{-\lambda}, 0)$ che è un nodo.

G. Sansone.

Uno, Toshio: On the curves defined by some differential equations. Math. Japonicae 2, 119—126 (1952).

L'A. studia le curve integrali dell'equazione

$$(1) \quad dy/dx = (AY + BX)/(CY + DX)$$

dove A, B, C, D sono parametri reali, $AD - BC > 0$, con X e Y polinomi di secondo grado in x ed y a coefficienti reali, nella ipotesi che le due coniche $X = 0$, $Y = 0$ abbiano un punto P in comune, reale e a distanza finita e tre punti all'infinito coincidenti, oppure abbiano in comune un punto P a distanza finita, reale, un punto Q reale all'infinito e due punti, R ed S , a distanza finita, complessi coniugati. Nel primo caso all'equazione (1) può darsi la forma canonica

$$dy/dx = [a(y - x^2) + bx]/[c(y - x^2) + fx]$$

e, in coordinate omogenee si ha $P \equiv (0, 0, 1)$, $Q \equiv (0, 1, 0)$; nel secondo caso X ed Y possono ridursi alla forma

$$X = -xy \cos \varphi + x^2 + y - x \cos \varphi, \quad Y = -xy \sin \varphi + x \sin \varphi$$

dove φ è un parametro e si ha ora $P \equiv (0, 0, 1)$, $Q \equiv (0, 1, 0)$, $R \equiv (e^{i\varphi}, 1, 1)$,

$S \equiv (e^{-i\varphi}, 1, 1)$. Facendo variare i parametri l'A. illustra topologicamente l'apparizione e la scomparsa di cicli limite e il comportamento delle curve integrali all'infinito. *G. Sansone.*

Castro Brzezicki, A. de: Bemerkung zu dem Artikel „Untersuchung und Lösung der Differentialgleichung $x y'' + n y' + a x y = 0$ “. *Gac. mat., Madrid* 4, 236—237 (1952) [Spanisch].

Barbuti, Ugo: Sopra un caso di „risonanza“ per la equazione $x'' + B(t) x = 0$. *Boll. Un. mat. Ital., III. Ser.* 7, 154—159 (1952).

G. Ascoli (this Zbl. 39, 317) has observed that all the solutions of the equation $x'' + (b^2 + (\sin a t)/t) x = 0$ are bounded provided $a \neq 2b$, while the solutions of the equation $x'' + (b^2 + (\sin 2bt)/t) x = 0$ are not all bounded. Thus a phenomenon of resonance is present as $a = 2b$. The author has given in another paper [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 170—175 (1952)] criteria of boundedness for equations of the type $x'' + (b^2 + C(t)) x = 0$. In the present paper the author proves that an analogous phenomenon of resonance happens for all the equations of the form $x'' + [v^2(t) + 2\omega(t) \sin v(t) \cdot \cos v(t)] x = 0$ under convenient conditions for $v(t)$ and $\omega(t)$. The author considers the following conditions: 1. $v(t) = bt + q(t)$, $b > 0$ a constant, $q(t)$ a function continuous with q', q'', q''' , such that $q'(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$, and $|q''|, |q'''|$ are integrable in $(t_0, +\infty)$; 2. $\omega(t)$ a function of constant sign in $(t_0, +\infty)$, continuous with $\omega'(t)$, such that both $\omega^2(t)$ and $|\omega'(t)|$ are integrable in $(t_0, +\infty)$, while the integrals $\omega(t) \sin^2 v(t)$, $\omega(t) \cos^2 v(t)$ in $(t_0, +\infty)$ are infinite of determined sign. Particular cases are considered. *L. Cesari.*

Olejník, O. A. und A. I. Žižina: Über eine Randwertaufgabe für die Gleichung $\varepsilon y'' = F(x, y, y')$ bei kleinem ε . *Mat. Sbornik, n. Ser.* 31 (73), 709—720 (1952) [Russisch].

On considère l'équation

$$(1) \quad \varepsilon y'' + A(x, y) y' = f(x, y, y'),$$

où ε est un nombre constant positif et $A(x, y) - f_y' \geq K > 0$ (K constant). — En admettant certaines hypothèses supplémentaires, les AA. démontrent, qu'une solution $y_\varepsilon(x)$ de (1), s'annulant pour $x = x_0$ et $x = x_1$, tend uniformément dans tout intervalle $\langle x_0 + \alpha, x_1 \rangle$ ($\alpha > 0$) vers une solution $y(x)$ de l'équation $A(x, y) y' = f(x, y, y')$, satisfaisant aux mêmes conditions aux limites; de même la dérivée dy_ε/dx tend uniformément dans $\langle x_0 + \alpha, x_1 \rangle$ vers la dérivée dy/dx . *M. Krzyżański.*

Seifert, George: A third order irregular boundary value problem and the associated series. *Pacific J. Math.* 2, 395—406 (1952).

Verf. betrachtet das Eigenwertproblem (vgl. dies. Zbl. 43, 91)

$$(1) \quad u'''(x) + p(x) u'(x) + (q(x) + \lambda) u(x) = 0, \quad u(0) = u'(0) = u''(1) = 0.$$

Dabei ist $p(x) = x \psi_1(x^3)$, $q(x) = \psi_2(x^3)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ sind reell für reelle z und regulär in $|z| \leq 1$. Es wird gezeigt, daß eine Funktion $f(x)$ der Gestalt $f(x) = x^2 \Phi(x^3)$ [$\Phi(z)$ regulär für $|z| \leq 1$] nach den Eigenfunktionen des Problems (1) entwickelbar ist. *K. Maruhn.*

Erugin, N. P.: Konstruktion der ganzen Menge von Differentialgleichungssystemen, die eine vorgegebene Integralkurve haben. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 659—670 (1952) [Russisch].

L'A. détermine tout d'abord le système différentiel le plus général de la forme

$$dx/dt = Q(x, y), \quad dy/dt = P(x, y)$$

admettant une intégrale donnée $w(x, y) = 0$. Il discute ensuite des problèmes connexes. *Ch. Blanc.*

Burton, L. P. and William M. Whyburn: Minimax solutions of ordinary differential systems. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 794—803 (1952).

Es handelt sich um das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (1) $\eta'(x) = \tilde{f}(x, \eta)$ mit $\eta = (y_1, \dots, y_n)$, $\tilde{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Die Funktion \tilde{f} soll in einem Gebiet G des x, η -Raumes

stetig sein. Für eine natürliche, fest gegebene Zahl k ($1 \leq k \leq n$) bedeutet p eine beliebige natürliche Zahl $\leq k$ und q eine beliebige natürliche Zahl $> k$ und $\leq n$. Die Funktionen f_p sollen monoton wachsende Funktionen von y_p ($p = 1, \dots, p; p \neq q$) und monoton abnehmende Funktionen von y_q sein; die Funktionen f_q sollen monoton abnehmende Funktionen von y_p und monoton wachsende Funktionen von y_q ($p = k+1, \dots, n; p \neq q$) sein. — Dann lassen sich die bisher nur für $k = n$ bewiesenen Tatsachen durch Schlüsse der gleichen Art folgendermaßen erweitern: I. Ist $g(x, \eta)$ ebenfalls stetig in G und

$$f_p(x, \eta) < g_p(x, \eta), \quad f_q(x, \eta) > g_q(x, \eta)$$

und sind $\eta(x), \xi(x)$ für $x_0 \leq x < x_0 + a$ Integralkurven des Systems (1) bzw. $(1a)\xi'(x) = g(x, \xi)$, die durch denselben Punkt $(x_0, \eta_0) = (x_0, \xi_0)$ gehen, so ist

$$y_p(x) < z_p(x), \quad y_q(x) > z_q(x) \quad \text{für } x_0 < x < x_0 + a.$$

II. Für jeden Punkt x_0, η_0 von G gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathfrak{Y}(x)$, so daß $\mathfrak{Y}(x_0) = \eta_0$ und $y_p(x) \leq Y_p(x), y_q(x) \geq Y_q(x)$ in einem Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ für jede Lösung $\eta(x)$ von (1) mit $\eta(x_0) = \eta_0$ gilt (Minimax-Lösung); die Minimax-Lösung kann nach rechts bis zum Rande von G fortgesetzt werden. Es folgen noch Aussagen über die Approximation von Minimax-Lösungen durch Unter- und Oberfunktionen und über die Lage dieser Lösungen zu der Mannigfaltigkeit aller Lösungen von (1), die durch denselben Punkt gehen.

E. Kamke.

Siegel, Carl Ludwig: Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1952, 21—30 (1952).

L'A. considère le système

$$\dot{x}_k = P_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

dont les seconds membres sont des séries entières convergentes de x_1, \dots, x_n avec des coefficients réels et sans terme constant. Désignons par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs caractéristiques de la matrice formée des coefficients des termes du premier degré dans P_k . La proposition suivante est démontrée à l'aide des séries majorantes: Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ n'appartient pas à un ensemble de mesure nulle dans l'espace à n dimensions, il existe n séries entières convergentes $F_k(x_1, \dots, x_n)$ telles que la transformation $y_k = F_k$ amène le système proposé à un système de la forme normale $\dot{y}_k = \lambda_k y_k$.

M. Hukuhara.

Lefschetz, Solomon: Notes on differential equations. Contrib. Theory of nonlinear Oscillations, II, Ann. Math. Studies 29, 61—73 (1952).

The paper consists of two notes, one which deals with critical (singular) points and the other with the equation of van der Pol. In the first note a topological analysis of the critical points of a real system $dx/dt = P(x, y), dy/dt = Q(x, y)$ is presented, where P and Q are analytical. The discussion is based on two simple lemmas and the approach is exceptionally direct. A new type of singular point, called by the author nested ovals, is discovered. In the second note the equation of van der Pol is transformed by means of Liénard's substitution into a system of two differential equations on the phase plane and the full picture of the paths (trajectories) of this system is examined. In particular the behavior of the paths at infinity is discussed by means of Poincaré's procedure. The main result is that every path tends toward the unique limit-cycle.

J. Szarski.

Kunin, I. A.: Bestimmung eines endlichen Gebietes von anfänglichen Abweichungen, bei denen die Bewegungen asymptotisch stabil bleiben, für ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung. Priklad. Mat. Mech. 16, 539—546 (1952) [Russisch].

Given a system of two non-linear differential equations having a stable equilibrium point, the consideration of a function of Lyapunov (quadratic form) makes it possible to find an ellipse of stability, i. e. an ellipse such that a solution starting at any of its points tends to the equilibrium point as $t \rightarrow +\infty$. The author devises a method to construct the „best“ of such ellipses.

J. L. Massera.

Gavrilov, N. I.: Über eine Methode in der Theorie der Stabilität nach Ljapunov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 657—660 (1952) [Russisch].

A new sufficient condition for the stability of the solutions of a system $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n P_{ik}(t) x_k$ is derived, based on the consideration of the generalized characteristic roots $\lambda_s(t)$ of the equation $|P_{ik}(t) - \lambda \delta_{ik}| = 0$. The proof is based on a general criterion previously found by the author (this Zbl. 46, 96). *J. L. Massera.*

Barbašin, E. A. und N. N. Krasovskij: Über die Stabilität einer Bewegung im Großen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 453—456 (1952) [Russisch].

The solution $x = 0$ of a system $\dot{x} = X(x)$ (x, X : n -vectors), where X is supposed to be continuously differentiable in R_n , is said to be asymptotically stable for arbitrary perturbations if it is stable in the sense of Ljapunov and if, for every solution, $x(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. A scalar $v(x)$ is said to be infinitely large if $v \rightarrow +\infty$ as $\|x\| \rightarrow +\infty$. The following theorems are proved: (1) A sufficient condition for asymptotic stability for arbitrary perturbations is the existence of an infinitely large Ljapunov function (positive definite and having a negative definite total derivative); (2) If all solutions exist in the past ($-\infty < t \leq 0$), the condition is also necessary. Other sufficient conditions are: (3) A Ljapunov function exists such that for any $\varepsilon > 0$ there is a $k > 0$ such that $dv/dt < -k$ when $\|x\| > \varepsilon$; (4) An infinitely large function v exists which is positive definite and such that $dv/dt \leq 0$, but there is no half-trajectory (except $x = 0$) on which $dv/dt \equiv 0$. An application to the equation $\ddot{x} + \varphi(\dot{x}) + g(x)f(x) = 0$ is given.

J. L. Massera.

DeBaggis, H. F.: Dynamical systems with stable structures. Contrib. Theory of nonlinear Oscillations, II, Ann. Math. Studies 29, 37—59 (1952).

Soit une équation différentielle

$$(1) \quad P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

définie dans une région G , du plan, limitée par une courbe fermée L qui soit un cycle sans contact de (1). Le système (1) est dit „stable T “, si pour toute perturbation assez petite du champ de vecteurs $(P(x, y), Q(x, y))$ il existe un ε -homéomorphisme qui applique les trajectoires de (1) sur les trajectoires du champ perturbé. L'A. indique dans la première partie de son travail des propriétés des singularités et des trajectoires fermées de (1). (Les trajectoires fermées sont en nombre fini, leurs exposants caractéristiques sont différents de zéro. Les points singuliers ne sont pas dégénérés, ...). Dans une deuxième partie l'A. démontre que réciproquement les équations (1) possédant la stabilité $-T$, sont celles dont les points singuliers et trajectoires fermées possèdent les propriétés établies précédemment. *G. Reeb.*

Haacke, Wolfhart: Über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen. I. Math. Z. 56, 65—79 (1952).

The author discusses asymptotic representations and stability of the solutions of the system of second order differential equations

$$(*) \quad y''_{\mu} + \lambda^2 r_{\mu}^2(x) y_{\mu} + \lambda \sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu}(x, \lambda) y_{\nu} = 0, \quad \mu = 1, \dots, n,$$

for large values of the real positive parameter λ . The functions $r_{\mu}^2(x)$ are supposed to be real or complex valued, periodic of period 2π , continuous, with derivatives of all orders, and such that $r_{\mu}^2 \neq r_{\nu}^2$, $r_{\mu}^2 \neq 0$ for all x and for all $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 1, \dots, n$. The functions $a_{\mu\nu}(x, \lambda)$ are supposed to be uniformly representable in asymptotic series of the form

$$a_{\mu\nu}(x, \lambda) \sim a_{\mu\nu}^{(0)}(x) + \lambda^{-1} a_{\mu\nu}^{(1)}(x) + \dots,$$

for large values of λ , where the functions $a_{\mu\nu}^{(q)}(x)$ are periodic of period 2π , continuous, with derivatives of all orders. The author determines then the function σ and the recurrent equations for the coefficients p of the asymptotic expansions

$$(**) \quad y_{\mu}(x) \sim \sigma(x) [p_{\mu}^{(0)}(x) + \lambda^{-1} p_{\mu}^{(1)}(x) + \dots]$$

of the solutions of (*). The validity of these asymptotic expansions is reduced to the Perron

theory, Teil I—III (S.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1918, Nr. 13, 15, 1919, Nr. 6). By making use of (**), a fundamental system of solutions is obtained, and by means of the Poincaré equation, explicit expressions for the characteristic exponents of (*) are given, up to terms $O(\lambda^{-2})$. The case where $r_\mu^2(x)$, $a_{\mu\nu}^{(p)}(x)$ are all real and even functions is discussed more explicitly. If for some μ and x we have $r_\mu^2(x) < 0$ then the solutions of (*) are proved to be all unstable for large λ . If $r_\mu^2(x) > 0$ for all μ and x then single stability and instability criteria are given for large λ . *L. Cesari.*

Colombo, Giuseppe: Sopra un sistema non-lineare in due gradi di libertà.

Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 64—98 (1952).

L'A. considera il sistema di equazioni differenziali non lineari:

$$(1) \quad \ddot{x} - \alpha \dot{x} + 3\gamma x^2 \dot{x} + x + m_1 y = 0, \quad \ddot{y} - \beta \dot{y} + 3\delta y^2 \dot{y} + (1 + \varrho) y + m_2 y = 0$$

in cui le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varrho, m_1, m_2$ sono, in valore assoluto, molto piccole e dello stesso ordine di grandezza, il prodotto $m_1 m_2$ positivo, mentre α e β sono positivi se lo sono γ e δ nulle o negative nel caso contrario. Dopo avere indicato un'applicazione alla meccanica del sistema (1), l'A. compie una ampia discussione delle soluzioni periodiche di (1) e ne studia la loro stabilità. *D. Graffi.*

Russo, Salvatore: Sui sistemi di equazioni differenziali lineari, omogenei, a matrice costante e periodica. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 428—430 (1952).

L'A. dimostra che l'integrale dell'equazione

$$\frac{dY(x)}{dx} = A \cdot Y(x), \quad A = \|a_{i,k}\|, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

dove A è una matrice costante e periodica di periodo p , può porsi sotto la forma

$$Y(x) = [I \zeta_0(x) + A \zeta_1(x) + \cdots + A^{p-1} \zeta_{p-1}(x)] \cdot Y_0$$

dove I è la matrice unitaria, $\zeta_0(x), \zeta_1(x), \dots, \zeta_{p-1}(x)$ sono funzioni della x facilmente costruibili, e Y_0 è la matrice dei valori iniziali. *G. Sansone.*

Miller, Kenneth S.: Construction of the Green's function of a linear differential system. Math. Mag. 26, 1—8 (1952).

Se $Lu = p_0(x) u^{(n)} + \cdots + p_n(x) u$ e $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione $Lu = 0$ e $W(x)$ il loro Wronskiano, posto

$$H(x, \xi) = \frac{(-1)^{n-1}}{p_0(\xi) W(\xi)} \begin{vmatrix} \Phi_1(x) & \Phi_2(x) & \cdots & \Phi_n(x) \\ \Phi_1(\xi) & \Phi_2(\xi) & \cdots & \Phi_n(\xi) \\ \Phi'_1(\xi) & \Phi'_2(\xi) & \cdots & \Phi'_n(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_1^{(n-2)}(\xi) & \Phi_2^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \Phi_n^{(n-2)}(\xi) \end{vmatrix}$$

il metodo di Lagrange per la soluzione dell'equazione $Lu = r(x)$ che soddisfa le condizioni di Cauchy $u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(n-1)}(a) = 0$ fornisce, come è

noto, la formula $u(x) = \int_a^x H(x, \xi) r(\xi) d\xi$. L'A. chiama $H(x, \xi)$ funzione di

Green unilaterale e osserva che con essa possa costruirsi la ordinaria funzione di Green per un gruppo di condizioni relative a due punti. *G. Sansone.*

Miller, K. S.: Self-adjoint differential systems. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 175—178 (1952).

Es sei die Randwertaufgabe

$$L(u) = 0, \quad U_\alpha(u) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

gegeben, und diese möge nur die triviale Lösung $u = 0$ haben. Dabei ist

$$L(u) = \sum_{\nu=0}^n p_\nu(x) u^{(\nu)}(x), \quad p_\nu \nu\text{-mal stetig differenzierbar für } a \leq x \leq b, \quad p_n > 0,$$

$$U_\alpha(u) = V_\alpha(u) + Z_\alpha(u), \quad V_\alpha(u) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{\alpha\nu} u^{(\nu)}(\alpha), \quad Z_\alpha(u) = \sum_{\nu=0}^{n-1} B_{\alpha\nu} u^{(\nu)}(\beta).$$

Die Aufgabe ist genau dann selbstadjungiert, wenn $L(u)$ ein selbstadjungierter

Differentialausdruck von gerader (ungerader) Ordnung und die Matrix $\Delta CD'$ symmetrisch (schiefsymmetrisch) ist. Dabei sind C, D, Δ folgendermaßen bestimmt: Es sei $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ eine Integralbasis von $L(u) = 0$, $\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*$ die adjungierte Integralbasis und $C = (c_{\alpha\beta})$ die Matrix, welche die φ_α in die φ_β^* überführt, d. h.

$$\varphi_\alpha^*(x) = \sum_{\beta=1}^n c_{\alpha\beta} \varphi_\beta(x);$$

D, Δ die Matrizen mit den Elementen $U_\alpha(\varphi_\beta)$ bzw. $V_\alpha(\varphi_\beta) - Z_\alpha(\varphi_\beta)$. E. Kamke.

Conti, Roberto: *Determinazione esplicita, in funzione dei dati, del nucleo della equazione integrale traducendo un problema ai limiti. Estensione ai sistemi di equazioni differenziali di un procedimento di G. Cimmino.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 396—403 (1952).

Das Verfahren des Ref. für die Übersetzung in Integralgleichungen der Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen n -ter Ordnung wird auf den Fall der Systeme von k Differentialgleichungen n -ter Ordnung mit k unbekannten Funktionen erweitert. G. Cimmino.

●Gel'fond, A. O.: *Differenzenrechnung.* Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 474 S. R. 10,20 [Russisch].

Kapitelüberschriften: Einleitung Problemstellung der Differenzenrechnung (9—14). I. Das Interpolationsproblem (15—124). II. Die Newtonsche Reihe (125—246). III. Konstruktion ganzer Funktionen aus gegebenen Elementen (247—305). IV. Die Summation der Funktionen. Die Bernoullischen Zahlen und Polynome (306—363). V. Differenzengleichungen (364—479). — Das inhaltsreiche Buch unterscheidet sich in der Stoffauswahl wesentlich von den vorhandenen Lehrbüchern. Es behandelt in ausgezeichneter Form neben den klassischen Grundlagen und Hilfsmitteln vor allem die Anwendung der Interpolationsrechnung in der modernen Theorie der ganzen Funktionen mit zahlreichen neuen Beweisen und Ergebnissen des Verf. Die übersichtliche, pädagogisch geschickte Darstellung und die Beispiele machen das Buch zu einem guten Lehrbuch für den Lernenden, während der Inhalt vielfach auch dem Kenner Neues bieten dürfte. Aus der Fülle des Stoffes sei folgendes hervorgehoben: Kap. I: Der Interpolationsprozeß auf dem Dreiecksschema (in letzter Zeit besonders durch die Forscher der Bernsteinschule gefördert) sowie die Annäherung stetiger Funktionen durch Polynome. Neu ist eine Verallgemeinerung der Bernsteinpolynome für eine beliebige nicht-äquidistante Einteilung der Intervalls $(0,1)$. Kap. II: Neben der Gamma-Funktion und den z. T. schon klassischen Sätzen über die Newtonsche Reihe mit äquidistanten Punkten eine Anzahl von Ergebnissen (hauptsächlich vom Verf.) über die allgemeine Newtonsche Reihe und die Darstellung ganzer Funktionen durch solche Reihen, ferner zwei zahlentheoretische Anwendungen (Ganzzwertigkeit und Transzendenz). Kap. III: Als „Element einer ganzen Funktion $F(z) = \sum a_n z^n$ “ sind lineare Funktionale $f_k = \sum a_n C_{n,k}$ definiert, wobei $(C_{n,k})$ eine gegebene unendliche Matrix ist. Verf. teilt eigne Ergebnisse zur Konstruktion von $F(z)$ bei gegebenen f_k mit, z. B. wenn die Folge $F^{(n)}(n) = A_n$ bekannt ist. In den gleichen Ideenkreis gehört das „Momentproblem im Komplexen“: es soll eine ganze Funktion $F(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n$ erster Ordnung vom Normaltyp aus den Zahlen

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C [u(\zeta)]^n f(\zeta) d\zeta \quad \text{mit} \quad F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\sigma} e^{z\zeta} f(\zeta) d\zeta$$

bestimmt werden. Das Problem wird unter allgemeinen Voraussetzungen über die „Belegungsfunktion“ $u(\zeta)$ gelöst [Darstellung von $F(z)$ durch Polynomreihen] und in einer Reihe von Spezialfällen ausführlicher behandelt; z. B. führen $u = e^\zeta - 1$, $e^\zeta (e^\zeta - 1)$, e^ζ bzw. auf die Folgen $A_n = \Delta^n F(0)$, $\Delta^n F(n)$, $F^{(n)}(n)$. Weitere Sonderfälle hängen mit Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung zusammen. Kap. IV: Neben den Bernoullischen Polynomen vor allem die Eulersche Summenformel mit Restgliedabschätzung. Kap. V: An klassischen Resultaten die Theorie der linearen homogenen und inhomogenen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, der Satz von Poincaré (im engeren Sinn) mit Beweis, der Satz von Hölder über die Gammafunktion mit Beweis nach Ostrowski, sodann Ergebnisse des Verf. über ganze Funktionen, die linearen homogenen Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten genügen. Zur Lösung der entsprechenden inhomogenen Gleichung wird eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Polynome eingeführt. Am Schluß eine kurze Darstellung der Whittakerschen Theorie der asymptotischen Perioden mit z. T. weiterführenden Ergebnissen. W. Hahn.

Gel'fond, A. O.: *Über ein Interpolationsproblem.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 429—432 (1952) [Russisch].

Im engen Anschluß an das 1. Kapitel des vorstehend besprochenen Buches

gibt Verf. Bedingungen für die Darstellung einer ganzen Funktion (von bestimmtem Wachstum) durch eine überall im Endlichen gleichmäßig konvergente Interpolationsreihe von der Gestalt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [x_0, n, \dots, x_n] P_n(z).$$

Darin bilden die $x_{i,n}$ ein Dreiecksschema, die $P_n(z)$ sind gewisse durch das Schema erklärte Polynome, und die Klammer bezeichnet die sog. dividierten Differenzen.

W. Hahn.

Sobolev, S. L.: Über die Eindeutigkeit der Lösungen von Differenzengleichungen vom elliptischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 179—182 (1952) [Russisch].

Es sei $u_{m,n}$ auf den Gitterpunkten mit $m+n=2k+1$ ($k=0, \pm 1, \dots$) definiert und genüge der Differenzengleichung

$$u_{m+1, n+1} + u_{m-1, n-1} + u_{m+1, n-1} + u_{m-1, n+1} - 4u_{m,n} = 0.$$

Verf. zeigt, daß jede Lösung, die schwächer als $(m^2 + n^2)^{1/2}$ wächst, eine Konstante ist. — Der mitgeteilte Beweis, der auf einer expliziten Darstellung der Lösung mit Hilfe elliptischer Funktionen beruht, ist recht kurz. Der Satz selbst findet sich, wie Ref. bemerkt, bereits in einer Arbeit von Stöhr (dies. Zbl. 39, 308, insbesondere S. 333 der Arbeit).

W. Hahn.

Ajzenstat, N. D.: Über die Abschätzung des Fehlers bei der angenäherten Lösung der Poissonschen Differenzengleichung. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 485—490 (1952) [Russisch].

Let Δ_h be Laplace's operator on a connected plane square net D_h of width h and let u be a solution of $\Delta_h u = f$ with given boundary values. Let v be an approximate solution with the same boundary values. A number of estimates for $u - v$ in terms of $g = \max |\Delta_h v - f|$ are given, e.g. $|v - u| \leq g h^2 (2^{N+1} - N - 2)$ where N is the maximal distance from a point in D_h to the boundary, the distance between two points of the net being the minimal number of „steps“ necessary to join them. It is assumed that every point on the boundary has exactly two neighbours on the boundary.

L. Gårding.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Kolchin, E. R.: Picard-Vessiot theory of partial differential fields. Proc. Amer. math. Soc. 3, 596—603 (1952).

Aufbau einer Picard-Vessiot'schen (PV) Theorie homogener linearer partieller Differentialgleichungen durch Zuordnung der auftretenden partiellen Differentialkörper (p. D.-Körper) zu gewissen gewöhnlichen Differentialkörpern (g. D.-Körpern) und Übertragung der dortigen Ergebnisse (dies. Zbl. 37, 187—188). — Es sei F ein p. D.-Körper mit m Ableitungen δ_i und algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper C . Ein p. D.-Oberkörper G von F heiße eine PV-Erweiterung, wenn der Konstantenkörper von G ebenfalls C ist und G endlich viele über C linear unabhängige Elemente η_i ($i=1, \dots, n$) enthält mit den Eigenschaften: $G = F \langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle$ und $\det(\theta_i \eta_k) / \det(\theta_{0i} \eta_k) \in F$ ($i, k=1, \dots, n$) für alle D.-Operatoren $\theta_i = \prod \delta_j^{a_{ij}}$ mit

Ordnungen $< n+1$ und für eine feste Wahl ebensolcher Operatoren $\theta_{01}, \dots, \theta_{0n}$ derart, daß die Nennerdeterminante nicht verschwindet. Für $m=1$ zeigt sich diese Definition mit der der PV-Erweiterung im gewöhnlichen Falle äquivalent. Sind u_i ($i=1, \dots, m$) über G D.-algebraisch unabhängige Elemente einer Erweiterung von G , so induziert der Operator $D = \sum u_i \delta_i$ eine gewöhnliche Ableitung in $G \langle u_1, \dots, u_m \rangle$. G_D sei die Bezeichnung für $G \langle u_1, \dots, u_m \rangle$, als g. D.-Körper mit Ableitung D aufgefaßt; der g. D.-Unterkörper $F \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ von G_D werde mit F_D bezeichnet. Den Übergang vom gewöhnlichen zum partiellen Falle vollzieht der Satz: Ist G eine PV-Erweiterung von F , so ist G_D eine PV-Erweiterung von F_D , und die Gruppe aller Automorphismen von G über F ist (bei natürlicher Zuordnung der Automorphismen) der Gruppe aller Automorphismen von G_D über F_D und somit einer algebraischen Matrizengruppe \mathfrak{G} isomorph. Dann folgt leicht, daß die den p. D.-Zwischenkörpern zugeordneten Untergruppen von \mathfrak{G} genau die algebraischen Untergruppen von \mathfrak{G} sind. Auch die Aussagen über Liouvillesche Erweiterungen lassen sich übertragen.

A. Jaeger.

Heilbronn, Georges: Sur la construction des équations $s + f(x, y, z, p, q, r) = 0$ qui possèdent un invariant du second ordre. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1090—1092 (1952).

L'A., usufruendo ancora della teoria di J. Drach (questo Zbl. **21**, 28), arreca alcuni complementi ai risultati raggiunti in una precedente Nota (questo Zbl. **21**, 28).
S. Cinquini.

Backes, F.: Sur la méthode de la variation des constantes arbitraires dans les systèmes canoniques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 1051—1054 (1952).

Nach einem Satz von Jacobi bilden (1) $\partial V / \partial q_i = p_i$, $\partial V / \partial a_i = b_i$ das allgemeine Integral der kanonischen Gleichungen, wenn V ein vollständiges Integral der Jacobi-Hamiltonschen Gleichung ist. Verf. zeigt ohne Benutzung der Poisson-schen Klammern und ohne Berührungstransformationen, daß das gestörte System $dq_i/dt = \partial(H + \Omega)/\partial p_i$, $dp_i/dt = -\partial(H + \Omega)/\partial q_i$ sich in der kanonischen Form $db_i/dt = \partial\Phi/\partial a_i$ schreiben läßt. Dabei werden die a_i, b_i in (1) als Zeitfunktionen angesehen und es gilt $\Omega(t, q, p) = \Phi(t, a, b)$.
W. Haacke.

Morgan, A. J. A.: The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 250—259 (1952).

Dato un sistema di equazioni a derivate parziali, ognuna di ordine k , in $m (\geq 2)$ variabili indipendenti x^1, \dots, x^m ($m \geq 2$) e $n (\geq 1)$ funzioni incognite y_1, \dots, y_n , della forma:

$$(1) \quad \Phi_r \left(x^1, \dots, x^m, y_1, \dots, y_n, \dots, \frac{\partial^k y_1}{\partial (x^1)^k}, \dots, \frac{\partial^k y_n}{\partial (x^m)^k} \right) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

si introduce un gruppo continuo G_1 di trasformazioni della forma:

$$\bar{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^m; a), \quad (i = 1, \dots, m; \quad m \geq 2); \quad \bar{y}_r = f_r(y_r; a) \quad (r = 1, \dots, n; \quad n \geq 1).$$

Si dimostra che se il sistema (1) è invariante nel gruppo G_1 (nel senso che viene precisato nel lavoro), il numero delle variabili indipendenti si può ridurre di un'unità.

M. Cinquini-Cibrario.

Bajada, Emilio: L'equazione $p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 163—167 (1952).

Una funzione $u(x, y)$, definita ad es. nel quadrato $Q: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, è detta dall'A. assolutamente continua rispetto alla x e superuniformemente rispetto alla y quando, fissato $\varepsilon > 0$, si può corrispondentemente determinare un numero positivo d tale che se $\{(a_i, b_i)\}$ è una successione di intervalli di $(0, 1)$ non ricoprentisi, ed è $\sum_i (b_i - a_i) < d$, risulta

$$\sum_i |u(a_i, y_i) - u(b_i, y_i)| \leq \varepsilon$$

qualunque sia $y_i, 0 \leq y_i \leq 1$. — L'A. dimostra che nel triangolo rettangolo che ha per vertice il punto $(\bar{x} - (y_2 - y_1)/2, (y_1 + y_2)/2)$, $(y_1 < y_2)$, e per ipotenusa il segmento che ha per estremi i punti $A \equiv (\bar{x}, y_1)$, $B \equiv (\bar{x}, y_2)$, l'equazione alle derivate parziali (1) $p = f(x, y, z, q)$ dove f è definita per (x, y) in T e per z, q qualsiasi, ed è lipschitziana rispetto a z ed a q , di costante $1/2$, ammette al più una soluzione in T che sia nulla per $x = \bar{x}$. Per soluzione deve intendersi una funzione $u(x, y)$ continua in T rispetto ad (x, y) , assolutamente continua rispetto ad x , superuniformemente rispetto ad y , avente differenziale totale in tutti i punti di T , salvo al più un insieme di punti la cui proiezione sull'asse x ha misura nulla, soddisfacente la (1), salvo al più un insieme che si proietta sull'asse x in un insieme di misura nulla. La dimostrazione è semplicissima ed il risultato ha la massima generalità consentita dalla questione. G. Sansone.

● Saltikov (Saltykow), N.: Théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Belgrad: Naucna Kniga 1952. 121 S. 93 Dinars serb. [en serbe].

Ce livre reproduisant l'enseignement de l'A. à l'Univ. de Belgrade expose les progrès acquis dans le domaine de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Signalant l'importance du sujet exposé pour l'évolution des mathématiques modernes l'A. constate la distinction qui existe entre les théories des équations aux dérivées partielles de premier et celles de second ordre. — Après avoir donné les notions et les définitions fondamentales des équations étudiées, au premier chapitre, le second traite sur les méthodes immédiates de leur intégration. Le but est de présenter les équations étudiées sous une forme qui se prête à l'intégration immédiate sans utiliser les méthodes spéciales d'intégration exigeant parfois des opérations encombrantes.

De telle manière sont intégrées toutes les équations des cours classiques d'Analyse auxquelles on y applique les méthodes d'intégration qui sont souvent trop compliquées. Les chapitres trois et quatre exposent, à titre d'évolution des méthodes citées les problèmes d'intégration des équations de Laplace et des équations linéaires de la forme générale. Les suites classiques des invariants sont supplées par les suites des ceux qui appartiennent à la même classe d'ordres inférieurs. Cela simplifie la théorie d'intégration en prêtant à elle plus d'élégance et facilite en même temps les applications. — Le cinquième chapitre étudie de différentes intégrales des équations aux dérivées partielles du second ordre. Constatant certaines notions erronées d'intégrales que l'on rencontre même chez des géomètres les plus éminents, comme Bertrand et Forsyth, pour s'en émanciper, l'A. introduit la notion des intégrales générales mixtes. — Le suivant chapitre donne une étude analytique du problème d'intégration des équations de Monge-Ampère. Le chapitre sept traite des transformations de contact et de leurs applications à l'intégration des équations étudiées du second ordre. — Au chapitre huit est exposé la démonstration de l'existence de l'intégrale de Cauchy, en élargissant considérablement le domaine de leur existence. C'est ainsi qu'une équation linéaire, par rapport aux dérivées partielles des deux premiers ordres et à la fonction inconnue, admet l'intégrale de Cauchy dans tout le domaine de holomorphic des coefficients des dites équations. Le dernier chapitre étudie les systèmes d'équations du second ordre. L'A. insiste sur les deux genres de leur involution: d'intégrabilité complète et celle de Darboux-S. Lie, en signalant leur distinction et leurs avantages. La nouvelle méthode d'intégration des équations du second ordre v est exposée, généralisant la première méthode Lagrangienne concernant les équations aux dérivées partielles du premier ordre. — Le travail de l'A. traitant les équations aux dérivées partielles du second ordre est conçu de la manière pour servir d'introduction à la théorie générale des équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs au second.

C. Orloff.

Riekstýňš, Ē. Ja.: Über gewisse Möglichkeiten der Lösung eines verallgemeinerten Systems von Telegraphengleichungen mit Hilfe der Laplacetransformation. Priklad. Mat. Mech. **16**, 375—381 (1952) [Russisch].

The system is $-\partial u/\partial x = R i + L \partial i/\partial t$, $-\partial i/\partial x = G u + C \partial u/\partial t$, where u, i are n -vectors, and R, L, G, C , constant square symmetric positive definite matrices, together with the conditions $u(x, 0) = i(x, 0) = 0$ and other rather general initial and boundary conditions too complicated to reproduce. It is shown how to set up and solve the Laplace transform of this problem. The transition back to the solution of the original problem is, it seems, amenable to the procedures of operational calculus only under conditions of „decomposability“, when $LCR = RCL$, $CRG = GRC$, $RGL = LGR$, and even then offers great difficulties. No solutions are actually given for the original problem. Generalisations are indicated for conductors of various lengths and inhomogeneous lines.

F. V. Atkinson.

Myškis, A. D.: Die stetige Abhängigkeit der Lösung eines gemischten Problems für Systeme linearer Differentialgleichungen von den Anfangsbedingungen und von den rechten Seiten des Systems. Mat. Sbornik, n. Ser. **30** (72), 317—328 (1952) [Russisch].

The systems considered are

$$A_1 \frac{\partial i}{\partial t} + B_1 \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D_1 i + F_1 u = h_1, \quad A_2 \frac{\partial u}{\partial t} + B_2 \frac{\partial u}{\partial x} + C^* \frac{\partial i}{\partial x} + D_2 u + F_2 i = h_2$$

where A_1, \dots, F_2 are continuous matrix functions of order m , h_1, h_2, i, u , column vectors. The boundary conditions are

$$\left[(C - L_1) u + M_1 i + N_1 \frac{\partial i}{\partial t} + P_1 \int_0^t i dt \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad L_1^* i \Big|_{x=0} = 0,$$

$$\left[(C - L_2) u - M_2 i - N_2 \frac{\partial i}{\partial t} - P_2 \int_0^t i dt \right] \Big|_{x=l} = 0, \quad L_2^* i \Big|_{x=l} = 0.$$

The precise statements of the theorems proved in this paper are too lengthy to be reproduced here.

J. Massera.

Kiro, S. N.: Über analytische Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(x_1, \dots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}).$$

Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 529—532 (1952) [Russisch].

In der Arbeit wird die Methode von Günter, die eine Abänderung der klassischen Majorantenmethode von Cauchy und S. Kowalewskaja des Existenzbeweises analytischer Lö-

sungen von Differentialgleichungen darstellt [Günter, Mat. Sbornik, n. Ser. **32**, 26—42 (1924)] in etwas erweitertem Sinn angewendet, um den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis analytischer Lösungen der in der Überschrift genannten Differentialgleichung in der Umgebung des Ausgangspunktes zu führen. Die rechte Seite wird dabei in der Umgebung der Anfangswerte der Argumente analytisch vorausgesetzt und als Anfangsbedingungen werden $u(x_1^0, x_2, x_3, \dots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \dots, x_n)$ und $u(x_1, x_2^0, x_3, \dots, x_n) = \psi(x_1, x_3, \dots, x_n)$ genommen, wo φ und ψ ebenfalls analytische Funktionen in der Umgebung der Anfangswerte ihrer Argumente sind, für die $\varphi(x_2^0, x_3, \dots, x_n) = \psi(x_1^0, x_3, \dots, x_n)$ gilt. Außerdem wird angenommen, daß $4 \frac{\partial f}{\partial u''_{x_1 x_1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial u''_{x_2 x_2}} - 1$

für die Anfangswerte nicht positiv ausfällt. — Die Gleichung wird auf eine ähnliche transformiert, deren rechte Seite zwei abgespaltene Glieder mit $\partial^2 u / \partial x_1^2$ und $\partial^2 u / \partial x_2^2$, deren gleiche Koeffizienten $\frac{1}{2} \lambda(x_3, \dots, x_n)$ nur von x_3, \dots, x_n abhängen, und eine ganz wie f gebaute Funktion F enthält, für die $(\partial F / \partial u''_{x_1 x_1})_{x_1=x_2=0} = 0$, $(\partial F / \partial u''_{x_2 x_2})_{x_1=x_2=0} = 0$, $F_{x_1=x_2=0} = 0$ gilt. Der Kern der Methode besteht darin, daß die Lösung der transformierten Gleichung

nicht in der Form $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n=3}^{\infty} a_{\mu_1, \dots, \mu_n}(x_1, \dots, x_n) x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$, sondern in der Form

$\sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu+1} a_{\mu-\nu+1, \nu}(x_3, \dots, x_n) x_1^{\mu-\nu+1} x_2^{\nu}$ angesetzt wird, so daß zu ihrer Konstruktion es ent-

sprechend dem Bau der Gleichung genügt, diese und die Anfangsbedingungen nach x_1 und x_2 zu differenzieren und sodann $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ zu setzen. Die sich so ergebenden μ Gleichungen für die unbekannten Koeffizienten $a_{\mu-\nu+1, \nu}(x_3, \dots, x_n)$, $\nu = 1, \dots, \mu$, bei festem μ , haben für alle μ eine von Null verschiedene Determinante $P_{\mu}[\lambda(x_3, \dots, x_n)]$, und sie besitzen bezüglich μ einen rekursiven Charakter. Daher kann die Lösung formal konstruiert werden. Es gelingt zu zeigen, daß für alle ν und μ gilt

$$\sum_{\kappa=1}^{\mu} \max_{|x_3 + \dots + x_n| \leq r} \left| \frac{A_{\nu, \kappa}^{(\mu)}[\lambda(x_3, \dots, x_n)]}{P_{\mu}[\lambda(x_3, \dots, x_n)]} \right| < H,$$

wo $A_{\nu, \kappa}^{(\mu)}[\lambda(x_3, \dots, x_n)]$ das algebraische Komplement der Determinante P_{μ} bezüglich des Feldes ν, κ und H eine Konstante bedeutet. Die Majorantengleichung lautet sodann

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{H}{1 - (x_3 + \dots + x_n)/r} \cdot \Phi \left(x_1, \dots, x_n; v; \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}; \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1} \partial x_n} \right),$$

wo $\Phi \geq F$ ist. Sie besitzt nach einem Satz von Lednev eine analytische Lösung bei geeignet gewählten Anfangsbedingungen (dies. Zbl. **30**, 254). Durch Abschätzungen wird für die Lösungen $u(x_1, \dots, x_n) < v(x_1, \dots, x_n)$ bewiesen, woraus die Konvergenz der formal gebildeten Lösung $u(x_1, \dots, x_n)$ folgt.

E. Svenson.

Illiss, Paul P.: Sur certaines équations de Monge-Ampère du calcul des variations. Bull. Soc. math. Belgique **1951**, 38—50 (1952).

L'A. considère quelques équations aux dérivées partielles du second ordre, de degré m en $2m$ variables (de degré 2, pour $m = 1$), susceptibles de pouvoir s'écrire sous la forme $|AU + B| = f(x)$, où A, B sont deux matrices complexes d'ordre $2m$, U la matrice $(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j)$ et telles que $|AU + B| = |\bar{A}U + \bar{B}|$ quelle que soit U , $\begin{vmatrix} A & B \\ \bar{A} & \bar{B} \end{vmatrix} \neq 0$. Pour $m = 1$, ces conditions impliquent que l'équation est elliptique et du type de Monge-Ampère. Pour $m > 1$, les équations ne sont elliptiques que si $f(x) \neq 0$ et si $u(x)$ appartient à certaines familles convexes, au nombre de deux. Dans le cas particulier où les matrices A, B sont constantes, ces équations sont issues d'un problème du Calcul des Variations. S'appuyant sur ce fait, l'A. établit qu'il existe tout au plus, dans chaque famille, une solution $u(x)$ nulle à la frontière d'une domaine Δ .

Th. Lepage.

Davis, R. B.: A boundary value problem for third-order linear partial differential equations of composite type. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 751—756 (1952).

Jede Differentialgleichung der Form $b_1 u_{xxx} + b_2 u_{xyy} + b_3 u_{xyy} + b_4 u_{yyy} + \dots = 0$ (b_i Funktionen von x und y , die Punkte bedeuten lineare Glieder mit höchstens zweiten Ableitungen), wo $b_1 p^3 + b_2 p^2 q + b_3 p q^2 + b_4 q^3 = 0$ genau eine reelle Lösung $p:q$ besitzt, kann in einem gewissen Bereich R auf die Form $(\Delta u)_z + \dots = 0$ transformiert werden (z, t neue Variable). Für den Beweis des folgenden Satzes ist vorausgesetzt, daß u_{tt} nicht auftritt. Es sei weiter T ein abgeschlossener Teilbereich von R , in dem die Koeffizienten zu C^1 gehören, und für den die Greensche

Funktion der Laplaceschen Gleichung existiert und den Bedingungen $|K_t|^2, |K_z(r, s; z, t)|^2 < \text{constans}/[(z-r)^2 + (t-s)^2]$ genügt. W sei die rektifizierbare Berandung von T . $h(z, t)$ gehöre auf W zu C^3 , ebenso $g(z, t)$ auf W' , wo W' eine Kurve in T bedeutet, die zwei Randpunkte verbindet und jede Charakteristik $z = \text{constans}$ in T genau einmal schneidet. Dann besteht folgende Alternative: Es existiert entweder genau eine Lösung $u \in C^3$ mit $u_z = 0$ auf W und $u = 0$ auf W' $u \not\equiv 0$ in T , oder es existiert genau eine Lösung $u \in C^3$ in T mit $u_z = h$ auf W und $u = g$ auf W' . A. Kriszten.

Ficken, F. A.: Uniqueness theorems for certain parabolic problems. J. rat. Mech. Analysis 1, 573—578 (1952).

Le problème que l'A. appelle P consiste en la recherche d'une solution de l'équation $u_{xx} - u_t = N(x, t, u, u_x)$, $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$, satisfaisant aux conditions aux limites $u_{x0} - a_0(t) u_{t0} = n_0(t, u_0)$, pour $x = 0$, $t > 0$, $u_{x1} + a_1(t) u_{t1} = n_1(t, u_1)$ pour $x = 1$, $t > 0$, et à la condition initiale $u(x, 0+) = g(x)$, où $u_j = u(j, t)$, $j = 0, 1$. Les coefficients $a_0(t)$ et $a_1(t)$ sont supposés non négatifs. En admettant certaines hypothèses, l'A. démontre que dans la classe de fonctions u qui sont continues, ainsi que leurs dérivées u_t, u_x, u_{xx} , pour $t > 0$, et bornées, ainsi que leurs dérivées u_x , le problème P admet une solution au plus. Dans le théorème cité la fonction $g(x)$ est supposée continue. L'A. considère encore le problème P^* , analogue à P , relatif à l'équation $u_{xx} - u_t = \frac{d}{dx} J(x, t, u)$, $0 \leq x \leq 1$, $t > 0$, et en admettant certaines hypothèses, démontre l'unicité de la solution du problème P^* dans la classe de fonctions u , continues avec les dérivées u_x, u_t, u_{xx} pour $t > 0$ et bornées elles-mêmes. Cette fois $g(x)$ n'est pas nécessairement continue, elle est supposée de 1-re classe de Baire. M. Krzyżański.

Blackman, Jerome: The inversion of solutions of the heat equation for the infinite rod. Duke math. J. 19, 671—682 (1952).

Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation $u_{xx} = u_t$, satisfaisant à la condition initiale $u(x, 0) = \Phi(x)$, $-\infty < x < +\infty$. S'il existe une constante c , telle que la fonction $\Phi(x) e^{-cx^2}$ soit sommable dans l'intervalle $-\infty < x < +\infty$, on peut représenter la solution $u(x, t)$ de ce problème sous la forme de l'intégrale de Poisson

$$(1) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-r)^2/4t} \Phi(r) dr,$$

cette intégrale étant convergente pour $0 < t < 1/4c$. L'A. montre que la limite $\lim_{t \rightarrow T-} u(x, t) = g(x)$ peut exister alors même, quand l'intégrale (1) est divergente

pour $t = T$, la fonction $u(x, t)$ se prêtant au prolongement pour $t \geq T$ d'une manière continue. En admettant certaines hypothèses, l'A. démontre que si la limite $g(x)$ existe, elle est une fonction entière de x . La connaissance de la fonction $g(x)$ permet de déterminer la fonction $u(x, t)$ elle même pour $0 \leq t < T$, lorsque certaines conditions sont satisfaites. M. Krzyżański.

John, Fritz: On integration of parabolic equations by difference methods. I. Linear and quasilinear equations for the infinite interval. Commun. pure appl. Math. 5, 155—211 (1952).

Verf. untersucht die Differenzengleichung

$$(1a) \quad u(x, t + h, h) = \sum_{r=-N}^N c^r(x, t, h) u(x + rh, t, h) + k \cdot d(x, t)$$

$$(1b) \quad u(x, 0, h) = f(x)$$

auf einem Rechteckgitter der Maschenweite (h, k) (im Bereich $R: -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq T$) und ihre Beziehungen zu der Differentialgleichung

$$(2a) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a_0(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_1(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, t) u + d(x, t) \quad [a_0(x, t) \geq \alpha > 0]$$

$$(2b) \quad u(x, 0) = f(x),$$

insbesondere den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ bei konstantem k/h^2 . Existenz und Einzigkeit der Lösung von (2) werden nicht vorausgesetzt, sondern gefolgert. Es werden nur Gleichungen (1a) betrachtet, die mit (2a) „verträglich“ sind, d. h. die für $h \rightarrow 0$ in (2a) übergehen, wofür einfache hinreichende Bedingungen (für die c^r) angegeben werden. Mit $\Phi = \sum_r c^r(x, t, 0) e^{ir\theta}$

ist $|\Phi| \leq 1$ (in R , $-\pi \leq \theta \leq \pi$) eine notwendige, unt. Gr. $\{-\theta - 2 \ln |\Phi|\} > 0$ eine hinreichende Bedingung für die „Stabilität“ von (1a); die letztere wird für gewisse, praktisch bedeutsame Fälle als erfüllt nachgewiesen. Sie hat zur Folge, daß die Funktion $u(x, t, h)$ und ihr erster Differenzenquotient mittels oberer Schranken für $|f|$ und $|d|$ dem Betrage nach abgeschätzt werden können und daß $u(x, t, h)$ nur „wenig“ abhängt von den Werten $f(y)$ bei großem $|y - x|$. Es wird gezeigt, daß die Lösung $u(x, t, h)$ der verträglichen, stabilen Gleichung (1) — unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen über die auftretenden Koeffizienten — für $h \rightarrow 0$ gegen eine Lösung von (2) und — unter schwächeren Voraussetzungen — gegen eine Funktion $u(x, t)$ konvergiert, die nur vom Problem (2) abhängt und als eine Lösung im verallgemeinerten Sinn angesehen werden kann. Dabei ist $f(x)$ nur als Riemannsch integrabel (in jedem endlichen Intervall) und beschränkt vorausgesetzt. Eine konsequente Verallgemeinerung wäre es, $f(x)$ als Distribution anzunehmen; durchgeführt wird der Gedanke für $f(x) = h^{-1} \delta_\xi^x$ („Kronecker-Delta“), was zu einer „Fundamentallösung“ für den Differenzenoperator führt, die für $h \rightarrow 0$ in die Fundamentallösung K des Differentialoperators übergeht. Die verallgemeinerte Lösung von (2) gestattet eine Integraldarstellung in f und d mit K als Kern. Hängt $d = d(x, t, u)$ von u ab, so liefert diese Darstellung eine mit (2a) äquivalente Integralgleichung für u , die durch Iteration gelöst werden kann, falls d in u gleichmäßig einer Lipschitz-Bedingung genügt. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten und präziser Formulierungen muß auf die inhaltsreiche Arbeit selbst verwiesen werden.

J. Weissinger.

Magenes, Enrico: Sull'equazione del calore: Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone. I. II. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 99—123, 136—170 (1952).

Sia D un dominio del piano cartesiano x_1, x_2 la cui frontiera sia di classe 2. Sia τ il cilindro dello spazio cartesiano x_1, x_2, y determinato dalle limitazioni $0 \leq y \leq y_0$; $(x_1, x_2) \subset D$, s la frontiera laterale di τ e $p(y)$ la sezione retta di τ operata col piano di quota y . Si ponga $E(u) = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 - \partial u / \partial y$; $E^*(u) = \partial^2 u / \partial x_1^2 + \partial^2 u / \partial x_2^2 + \partial u / \partial y$. Si consideri la ben nota formula di Green

$$(1) \quad \int_{\tau} [u E^*(w) - w E(u)] d\tau + \int_s \left(u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int_{p(0)} u w dp(0) - \int_{p(y_0)} u w dp(y_0) = 0.$$

Il metodo generale di Picone (questo Zbl. 29, 295—297) per il calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni differenziali lineari, nel caso dei problemi relativi all'equazione del calore si basa sulla (1). Ad esempio si ricerchi una soluzione dell'equazione per la quale è assegnata $u = u_0$ su $p(0)$, $u = g$ su una parte s' di s e $\partial u / \partial \nu = b$ su $s - s'$. Sia $\{w_k\}$ un assegnato sistema di funzioni. Dalla (1) si trae

$$\begin{aligned} \int_{\tau} u E^*(w_k) d\tau + \int_{s-s'} u \frac{\partial w_k}{\partial \nu} ds - \int_{s'} \frac{\partial u}{\partial \nu} w_k ds - \int_{p(y_0)} u w_k dp(y_0) \\ = \int_{\tau} w_k f d\tau - \int_{s'} g \frac{\partial w_k}{\partial \nu} ds + \int_{s-s'} b w_k ds - \int_{p(y_0)} u_0 w_k dp(y_0) = c_k. \end{aligned}$$

Si supponga — ciò che è lecito — che il sistema $\{w_k\}$ verifichi le condizioni

$$\int_{\tau} E^*(w_n) E^*(w_k) d\tau + \int_{s-s'} \frac{\partial w_n}{\partial \nu} \frac{\partial w_k}{\partial \nu} ds + \int_{s'} w_n w_k ds + \int_{p(y_0)} w_n w_k dp(y_0) = \delta_n^k.$$

Se il sistema dei vettori aventi per componenti $E^*(w_k)$ su τ , $\partial w_k / \partial \nu$ su $s - s'$, w_k su s' , w_k su $p(y_0)$ è completo nel senso di Hilbert, i seguenti sviluppi convergenti in media forniscono la funzione incognita e la sua derivata normale:

$$\begin{aligned} u &= \sum_k c_k E^*(w_k) \text{ su } \tau; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = - \sum_k c_k w_k \text{ su } s'; \quad u = \sum_k c_k \frac{\partial w_k}{\partial \nu} \text{ su } s - s'; \\ u &= - \sum_k c_k w_k \text{ su } p(y_0). \end{aligned}$$

Picone pone il problema di determinare la completezza del sistema di vettori associati ad un dato sistema di funzioni $\{w_k\}$, quando, ad esempio, $\{w_k\}$ sia quello costituito da tutti i monomi. Oppure — in relazione ai problemi per l'equazione $E(u) = 0$ — quando $\{w_k\}$ sia il sistema delle soluzioni polinomiali dell'equazione del calore. Un notevole tentativo per risolvere il problema

posto da Picone compie Amerio [Rend. Mat. e Appl. 5, 5 (1946)] il cui risultato più importante consiste però solo nel far vedere che se le funzioni u e f definite in τ , A e B definite su $s + p(0) + p(y_0)$ e su s rispettivamente, verificano le infinite equazioni

$$\int_{\tau} (u E^*(w_k) - w_k f) d\tau + \int_s \left(A \frac{\partial w_k}{\partial v} - w_k B \right) ds + \int_{p(0)} A w_k dp(0) - \int_{p(y_0)} A w_k dp(y_0) = 0$$

($\{w_k\}$ sistema dei monomi) allora u appartiene alla classe I' delle funzioni per le quali è applicabile la (1), essendo w una qualsiasi funzione di classe 2, e verifica, in un senso ben precisato, le seguenti condizioni

$$E(u) = f \text{ in } \tau, \quad u = A \text{ su } s + p(0) + p(y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial v} = s \text{ su } B.$$

La dimostrazione della completezza dei sistemi di vettori sopra indicati è così ricondotta a quella della unicità della soluzione per i problemi al contorno relativi all'equazione del calore nella classe I' . L'A. nei presenti lavori perviene alla completa soluzione dei problemi posti da Picone. Egli caratterizza le soluzioni della equazione $E(u) = 0$ appartenenti a I' come quelle funzioni che possono mettersi sotto la forma seguente

$$u(P) = \int_s \varphi(M) F(M, P) d_M s + \int_{p(0)} \varphi(M) F(M, P) d_M p(0)$$

essendo φ un'arbitraria funzione integrabile secondo Lebesgue su $s + p(0)$ e $F(M, P)$ la ben nota soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Fondandosi su questo teorema e su una generalizzazione, da lui conseguita, della teoria dei potenziali di semplice e doppio strato relativi alla $F(M, P)$, egli perviene, per ogni tipo di problema al contorno, relativo all'equazione del calore, a conseguire il teorema di unicità nella classe I' e quindi il corrispondente teorema di completezza. In taluni casi egli generalizza i suoi risultati pervenendo a teoremi di completezza nello spazio dei vettori continui oltre che in quello dei vettori hilbertiani. *G. Fichera.*

Pini, Bruno: Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine. *Rivista Mat. Univ. Parma* 3, 153—187 (1952).

Im Raume x_1, x_2, y sei S eine Fläche, die von jeder Ebene $y = \beta$, mit $y_1 \leq \beta \leq y_2$, längs einer einfachen, geschlossenen Kurve $x_1 = \bar{x}_1(\alpha, \beta)$, $x_2 = \bar{x}_2(\alpha, \beta)$, $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ geschnitten wird. Die Ebenen $y = y_1$, $y = y_2$ und die Fläche S begrenzen ein Gebiet D . In einem derartigen Gebiet wird die Gleichung

$$L[u] = a_{11} u_{x_1 x_1} + 2a_{12} u_{x_1 x_2} + a_{22} u_{x_2 x_2} - u_y + a u = f$$

untersucht, wobei die a_{ij} , a , f gegebene Funktionen der x_1, x_2, y sind und die quadratische Form $a_{11} \lambda_1^2 + 2a_{12} \lambda_1 \lambda_2 + a_{22} \lambda_2^2$ positiv definit ist. Die charakteristische Randwertaufgabe ist dabei die der Bestimmung einer Lösung $u(x_1, x_2, y)$ in D , welche vorgegebene Werte auf S und für $y = y_1$ annimmt. Das Problem wird nach den Methoden des Ref. behandelt. Das Hauptziel ist der Beweis eines Existenzsatzes für die Lösung $u(x_1, x_2, y)$, wobei die Randbedingung in solcher Weise verallgemeinert wird, daß die Randwerte durch eine mit einer gewissen Potenz summierbare Funktion ausgedrückt werden können und im Sinne der mittleren Konvergenz von der Lösung u angenommen werden sollen. Der Existenzbeweis gründet sich auf einem Konvergenzsatz über Funktionenfolgen $\{u_n\}$, für welche die Folge $\{L[u_n]\}$ gegen eine f in D und die der verallgemeinerten Randwerte der u_n gegen eine φ auf S im Sinne mittlerer Konvergenz konvergieren [$u_n(y_1) = 0$ vorausgesetzt]; der Satz behauptet die Existenz einer Limesfunktion u , welche die Randbedingung $u = \varphi$ auf S und die Gleichung $L[u] = f$ in D in verallgemeinertem Sinne befriedigt. Dieser Konvergenzsatz folgt ohne Bezugnahme auf die Grundlösung aus einer charakteristischen Mittelwerteigenschaft der Lösungen von $L[u] = f$ und aus einer Identität, welche außerdem zum Eindeutigkeitssatz für die Lösung der verallgemeinerten Randwertaufgabe führt. *G. Ciminino.*

Stampacchia, Guido: Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. Ser. 33, 211—238 (1952).

Sei T ein von endlich vielen glatten Flächen F berandeter n -dimensionaler Bereich, dessen Randnormale Lipschitz-stetig sei. Zur Klasse B^α ($\alpha \geq 1$) für T werden alle zweimal differenzierbaren Funktionen gezählt, deren zweite Ableitungen von α -ter Potenz summierbar sind, falls nach gewisse, hier nicht genau formulierte Bedingungen erfüllt sind. Zunächst wird das Haupt Hilfsmittel, ein Auswahlssatz (Teor. I) bewiesen [allerdings im wesentlichen unter Hinweis auf eine Arbeit des Verf. in *Ricerche Mat.* 1, 27—54 (1952)]. Danach kann man aus einer Folge u_m unter der Bedingung

$$\int_T \left\{ |u_m|^\alpha + \sum_i \left| \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right|^\alpha + \sum_{i,k} \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_k} \right|^\alpha \right\} dx \leq A \quad (\alpha > 0)$$

eine in einem verallgemeinerten Sinne gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen. Mittels dieses Satzes und Cacciopolis (dies. Zbl. 43, 314) Abschätzung von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen und ihrer Ableitungen durch ihre Randwerte, deren Ableitungen und die Funktion auf der rechten Seite werden dann folgende Existenzsätze bewiesen: Teor. III. Die elliptische Differentialgleichung

$$E(u) = \sum_{i,k} A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u = f$$

mit zweimal in T stetig differenzierbaren A_{ik} , einmal stetig differenzierbaren B_i , stetigem C ($C \leq 0$) und quadratisch summierbarem f , hat in $B^{(2)}$ fast überall genau eine Lösung, welche auf Γ vorgeschriebene Werte φ annimmt, welche lokal bezüglich der Flächenparameter von Γ von der Klasse $B^{(2)}$ sind. — Teor. IV. Die Funktion $F(x_i, u, p_i, p_{ik})$ genüge der Ungleichung

$$F(x_i, u, p_i, p_{ik}) \geq \left(\sum_{i,k} A_{ik} p_{ik} + \sum_i B_i p_i + C u \right)^2 + \text{const},$$

ihre Weierstraßsche E -Funktion sei nicht negativ. Die Klasse K der konkurrierenden Funktionen u ist eine Teilmenge von $B^{(2)}$, abgeschlossen bez. gleichmäßiger Konvergenz (im vorigen Sinne) sowohl der Funktion als auch der ersten Ableitungen. Auf Γ nehmen sie die Werte einer vorgeschriebenen Funktion aus $B^{(2)}$ auf Γ an. Außerdem sei $F(x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_k})$ summierbar.

Dann existiert in K eine Minimalfunktion für das Integral $\int_T F(x_i, u, u_{x_i}, u_{x_i x_k}) dx$. Ist speziell $F = F(x_i, u, A_2 u)$, wo $F(x_i, u, w)$ geeigneten Bedingungen unterliegen muß, so wird weiterhin gezeigt Teor. V und VI: Das Integral $\int_T F(x_i, u, A_2 u) dx$ besitzt eine Minimalfunktion, deren

Randwerte und Normalableitung vorgeschrieben sind. Sie genügt der Eulerschen Gleichung $A_2 F_{A_2}(x_i, u, A_2 u) = F_u(x_i, u, A_2 u)$. Für diese Gleichung ist das Randwertproblem mit Vorgabe der Randwerte α und der Normalableitung β lösbar (α, β quadratisch summierbar, α in $B^{(2)}$ bezüglich Γ).

G. L. Tautz.

Hellwig, Günter: Das Randwertproblem eines linearen elliptischen Systems.

Math. Z. 56, 388—408 (1952).

This paper continues and generalizes the investigations of another by the same author (this Zbl. 46, 102). It studies elliptic systems of partial differential equations in two independent variables (x, y) of the form: $du/dn_1 + \lambda dv/dn_4 = \bar{M}$, $du/dn_2 + \mu dv/dn_3 = \bar{M}$; $\vec{n}_i(\alpha_i, \beta_i)$; $(\vec{n}_1, \vec{n}_2), (\vec{n}_3, \vec{n}_4)$ denote two pairs of linearly independent unit vectors such that the integrals of the equations $dx/\alpha_i = dy/\beta_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, have no singular points in the closure \bar{F} of the domain in which u and v have to be determined; M and \bar{M} are linear in u and v ; certain conditions of differentiability are imposed on the coefficients of the system — which could certainly be relaxed; u and v must be determined by the condition that $u = f(s)$ on $F - \bar{F}$. — Two different cases arise obviously according as M and \bar{M} are homogeneous, or not, in u and v . The author who had disproved a conjecture of Hilbert in his previous paper, shows that the boundary problem just defined is in general, indeterminate unless a condition on v is assumed, namely that v be „normed“. This means that, γ being a real number and $k(x, y)$ a function defined in F and such that $\iint_F k dx dy \neq 0$, then: $\iint_F v \cdot k \cdot dx dy = \gamma$. — The methods of investigations applied

by the author are those of the classical theory of Fredholm's integral equations. When F is „sufficiently small“ the given system is shown to be equivalent to a Fredholm equation, whose parameter is not an eigenvalue. If $\gamma = 0$ the homogeneous system has the only solution $u = v = 0$ in F . But this is no longer the case when $\gamma \neq 0$. — The case of a domain F which is not „sufficiently small“ is considered in section 4 of the paper and some interesting examples studied, which show the difficulties which one comes across then. Apart from these examples, only few results are obtained and this most important case calls certainly for further investigations. C. Racine.

Haack, Wolfgang: Randwertprobleme höherer Charakteristik für ein System von zwei elliptischen Differentialgleichungen. Math. Nachr. 8, 123—132 (1952).

This paper continues the study of the differential system of the elliptic type: $u_x - v_y = a \cdot u + b \cdot v + c$, $u_y + v_x = \bar{a} \cdot u + \bar{b} \cdot v + \bar{c}$ with boundary condition $\alpha(s) \cdot u + \beta(s) \cdot v = f(s)$ begun in the same Journal [Math. Nachr. 7, 1—30 (1952)]. Of fundamental importance is the characteristic of the vector of coordinates α and β . The cases of characteristic 0 and 1 were studied in the article just mentioned. In this paper the author studies the case of a negative characteristic and, considering the adjoint system, of any positive characteristic. — If the characteristic is negative and suitable restrictions assumed about the domain in which the system is to be

solved, it is proved that there is an unlimited number of solutions. They depend on at least $1 - 2n$ arbitrary constants, n being the characteristic. Further conditions, one concerning the common zeros of u and v , another expressed by the vanishing of an integral, entails the uniqueness of the solution. — The proofs are elementary and straightforward.

C. Racine.

Višik, M. I.: Über Randwertprobleme für Systeme elliptischer Differentialgleichungen und über die Stabilität ihrer Lösungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 645—648 (1952) [Russisch].

On considère un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, qu'on écrit sous la forme

$$(1) \quad Lu \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^n B_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x) u(x) = h(x),$$

$u(x)$ et $h(x)$ étant des vecteurs de l'espace à n dim., dont les coordonnées sont des fonctions complexes des coordonnées du point $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$. $A_{ij}(x)$, $B_i(x)$ et $C(x)$ sont des matrices aux éléments complexes; A_{ij} et B_i sont supposées continues dans la fermeture $D + \Gamma$ d'un domaine borné D , les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i} (A_{ij}(x))$, $\frac{\partial}{\partial x_i} (B_i(x))$ et la matrice $C(x)$ — continues et bornées dans D lui-même. La frontière Γ du domaine D se compose, par hypothèse, de deux parties, Γ_1 et Γ_2 . On cherche une solution du système (1), satisfaisant aux conditions aux limites

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi_1(s_1), \quad s_1 \in \Gamma_1, \quad \sum_{i,j=1}^n E_{ij}(s_2) \cos(n, x_i) \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big|_{\Gamma_2} + Qu|_{\Gamma_2} = \varphi_2(s_2), \quad s_2 \in \Gamma_2,$$

s_1 et s_2 étant des points de Γ_1 et de Γ_2 respectivement, $E_{ij} + E_{ji} = 2A_{ij}$. Ce problème est appelé par l'A. le problème I; un problème analogue, relatif au système adjoint à (1), est appelé le problème I*. Certaines hypothèses étant admises, l'A. démontre que les problèmes I et I* constituent une couple de problèmes fredholmiens, c'est-à-dire, les théorèmes analogues à ceux de Fredholm s'appliquent aux problèmes I et I*. Il en résulte que l'unicité de la solution du problème I entraîne son existence pour $h(x)$, $\varphi_1(s_1)$, $\varphi_2(s_2)$ arbitraires. Cette solution dépend d'une manière continue des fonctions φ_1 et φ_2 intervenant aux conditions aux limites, des coefficients des équations (1) et de leurs seconds membres. Lorsque le problème I est résoluble d'une manière univoque, on peut appliquer la méthode de Galerkin pour obtenir la solution approximative.

M. Krzyżański.

Kamenomostskaja, S. L.: Über Gleichungen vom elliptischen und parabolischen Typus mit einem kleinen Parameter bei den höchsten Ableitungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 703—708 (1952) [Russisch].

L'A. étudie la forme d'une solution $u_\varepsilon(x, y)$ du problème de Dirichlet, relatif à l'équation

$$(1) \quad L_\varepsilon(u) = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = D(x, y),$$

ε étant un paramètre positif, et à un domaine R , dont la frontière S se compose d'un nombre fini de courbes intégrales fermées de l'équation différentielle

(2) $dx/A(x, y) = dy/B(x, y)$. Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, cette solution tend vers une solution de l'équation (3) $A(x, y) u'_x + B(x, y) u'_y + C(x, y) u = D(x, y)$, si une telle solution existe (th. I). L'A. en déduit que dans le cas général, la frontière S étant constituée par un nombre fini de courbes fermées, tangentes aux caractéristiques de (3), ou non, $u_\varepsilon(x, y)$ tend vers une limite $u(x, y)$ aux points de R , à l'exception de certains points, définis par l'A. (th. II). Un théorème analogue au th. I subsiste pour l'équation du type parabolique $L(u) = \varepsilon u''_{xx} + A(x, y) u'_x + B(x, y) u'_y + C(x, y) u = D(x, y)$.

M. Krzyżański.

Olejnuk, O. A.: Über Randwertprobleme für Gleichungen mit einem kleinen Parameter bei den höchsten Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 493—495 (1952) [Russisch].

Es sei $u_\varepsilon(x, y)$ eine Lösung von

$$L_\varepsilon(u) \equiv \varepsilon \Delta u + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = f(x, y),$$

die auf der Berandung S des Gebietes D der Bedingung $\partial u / \partial n + a(s) u = \varphi(s)$ genügt [$C < 0$, $a(s) \leq 0$, s Bogenlänge auf S , nebst einer Reihe von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über A , B , C , f , a , φ und die Berandung S]. Bezeichnet ferner S_1 bzw. S_2 bzw. S_0 die Gesamtheit derjenigen Punkte von S , in denen $B dx/ds - A dy/ds < 0$ bzw. > 0 bzw. $= 0$ ist, so gilt für eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $U(x, y)$ der Gleichung

$$(1) \quad A(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} + C(x, y) U = f(x, y),$$

die auf S_1 der Bedingung $\partial U / \partial n + a(s) U = \varphi(s)$ genügt, gleichmäßig in $D + S$: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y) = U(x, y)$. Es folgt dann noch ein weiterer, etwas anders ge-

lagerter Konvergenzsatz bezüglich u_ε und gewisser Lösungen U von (1). — Schließlich wird ohne Beweis für die parabolische Gleichung

$$(2) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y) u = f(x, y)$$

folgender Satz genannt: Es sei das Gebiet D begrenzt durch die Strecke PQ der x -Achse, durch die durch P und Q verlaufenden Integralkurven von $dx/A = dy/B$ und durch die Strecke $P_1 Q_1$ auf $y = \beta > 0$. Ist jetzt $u_\varepsilon(x, y)$ eine Lösung von (2) in D mit $u_\varepsilon = \varphi(x)$ auf PQ und $\partial u_\varepsilon / \partial x + a u_\varepsilon = \varphi$ auf den Kurvenstücken PP_1 und QQ_1 ($a \leq 0$ auf PP_1 , $a \geq 0$ auf QQ_1) und mit gewissen weiteren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, so konvergieren für $\varepsilon \rightarrow 0$ die $u_\varepsilon(x, y)$ gleichmäßig in $D + S$ gegen die Lösung von (1), die auf PQ die Werte $\varphi(x)$ annimmt.

K. Maruhn.

Bergman, Stefan: The coefficient problem in the theory of linear partial differential equations. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 1—34 (1952).

Reprenant ses opérateurs p qui transforment des fonctions analytiques d'une ou deux variables en solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques de 2 et 3 variables, l'A., dans ce mémoire particulièrement difficile à lire, établit des relations entre les propriétés globales de solutions ψ des équations $\Delta \psi + F\psi = 0$ à 2 et 3 variables et la structure de la suite des coefficients du développement en série de ψ . Il étudie d'abord l'équation $\Delta \psi + F\psi = 0$ où F est fonction réelle entière de 2 variables et prend comme variables $z = x + iy$ et $z^* = x - iy$, ce qui transforme l'équation en $\partial^2 \psi / \partial z \partial z^* + F_1 \psi = 0$. Il associe à ψ une fonction $g(z)$ pour laquelle la partie réelle de l'opérateur p redonne ψ . Et cela permet de retrouver et de transformer divers résultats connus sur les fonctions analytiques ou algébriques.

M. Brelot.

Myškis, A. D.: Über den Übergang von dem gewöhnlichen ersten Randwertproblem zu dem umgeformten. Mat. Sbornik, n. Ser. **31 (73)**, 128—135 (1952) [Russisch].

Um die Methode des Überganges vom gewöhnlichen ersten Randwertproblem zum umgeformten deutlich hervortreten zu lassen, wird eine Abstraktion von Begriffen der Potentialtheorie vorgenommen. Die Rolle der Lösungsgesamtheit einer Differentialgleichung übernimmt eine durch abstrakte Eigenschaften definierte Klasse R von Funktionen. An Stelle des Gradientenflusses durch eine Fläche S wird ein Funktional $I(f, S)$ für $f \in R$ abstrakt durch eine Anzahl von Bedingungen definiert. In der neuen Sprache lautet z. B. das umgeformte erste Randwertproblem: Auf dem Rande K des Gebietes G sei eine stetige Funktion φ vorgegeben. Gesucht wird eine Funktion $f \in R$, deren Randwerte φ folgende Eigenschaft haben: $\varphi - \psi$ ist auf jeder zusammenhängenden Komponente von K konstant. Ferner gelte auf jeder geschlossenen Fläche $S \subset G$ die Gleichung $I(f, S) = 0$. Verf. zeigt, daß aus seinen Definitionen für die Lösungsfunktionen der Randwertprobleme viele Eigenschaften der Potentialfunktionen folgen, z. B. die Sätze über die Bestimmtheit der Lösungen, gewisse Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen vom Gebiet und auch der Satz: Wenn für die Funktion φ auf dem Rande K von G eine Lösung des ersten Randwertproblems existiert, so hat auch das umgeformte erste Randwertproblem für φ eine Lösung.

W. Thimm.

Minasjan, R. S.: Über ein gemischtes Randwertproblem der Laplaceschen Gleichung für das Rechteck. Priklad. Mat. Mech. **16**, 293—304 (1952) [Russisch].

Solution of the problem in question, supposed to be axially symmetric, by means of suitable series. Numerical results.

L. Gårding.

Schubert, Hans: Über ein gemischtes räumliches Randwertproblem der Potentialtheorie. II. Math. Nachr. 7, 335—338 (1952).

Im Anschluß an Teil I (dies. Zbl. 42, 107) wird ein Beispiel behandelt. Die Lösung der entscheidenden Integralgleichung erfolgt näherungsweise durch einen Interpolationsansatz.

K. Maruhn.

Schubert, Hans: Über die Potentiale der auf dem Mantel eines Kreiszylinders ausgebreiteten einfachen und doppelten Belegung. Math. Nachr. 8, 249—255 (1952).

Verf. stellt für einen unendlich langen Kreiszylinder (rotationssymmetrischer Fall) die Potentiale der Doppelschicht und der einfachen Schicht (nebst der Normalableitung des letzteren) für Innen- und Außengebiet als Fouriersche Integrale dar, die modifizierte Besselsche Funktionen enthalten und die die Berechnung aus den jeweiligen Belegungen gestatten. In diesem Zusammenhang wird dann die erste bzw. zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Zylinder behandelt, wenn die (rotationssymmetrische) Randfunktion auf einem endlichen Stück des Zylinders vorgegeben ist; dies geschieht durch Bestimmung der Belegung der entsprechenden Flächenpotentiale auf demselben Zylinderstück.

K. Maruhn.

Fichera, Gaetano: Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 367—377 (1952).

Man fragt nach einer harmonischen Funktion $u(x, y)$ in einem von einer regulären Kurve Γ berandeten Gebiet A der x, y -Ebene, mit vorgeschriebenen Werten g in allen Randpunkten für die Ableitung nach einer gegebenen veränderlichen Richtung λ . Der zutreffende Existenzsatz erfordert das Erfülltsein einer Kompatibilitätsbedingung: die vorgeschriebene Funktion g soll nämlich einer gewissen Funktion τ auf Γ orthogonal sein; und das Hauptergebnis der Arbeit ist eine neue Charakterisierung der Funktion τ . Als Sonderfall, wenn Γ aus zwei Bogen Γ_1, Γ_2 besteht, auf deren einem λ die Randnormalen-, während es auf dem anderen die Randtangentialrichtung ist, erhält man eine gemischte Randwertaufgabe, für welche aus der allgemeinen Behandlung Kompatibilitätsgleichungen entspringen.

G. Cimmino.

Graffi, Dario: Sul problema della derivate obliqua. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 378—382 (1952).

Verf. weist auf eine physikalische Bedeutung der im vorstehenden Referat erwähnten Bedingungen hin, beim Problem der stationären elektrischen Strömung in einem leitungsfähigen Plättchen.

G. Cimmino.

Viola, Tullio: Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 6, 109—145 (1952).

Sia A un campo limitato dello spazio S_n e sia \bar{U}_n la classe delle funzioni u che godono delle seguenti proprietà: 1. se $n = 2p$ le funzioni $u, \Delta_2^p u, \dots, \Delta_2^{p-1} u$ (Δ operatore differenziale di Laplace) sono continue e dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile; 2. se $n = 2p + 1$ oltre alle condizioni precedenti anche le funzioni $\Delta_2^p u$ sono dotate di derivate parziali prime continue e di quadrato sommabile; 3. assegnate le funzioni quasi continue e sommabili su $FA: f_h, g_h (n = 2p), f_h, g_h, f_p (n = 2p + 1) (h = 0, 1, \dots, p - 1)$ ogni u verifica su FA , in modo ben precisato, le condizioni: $u = f_0, \partial u / \partial \nu = g_0, \dots, \Delta_2^{p-1} u = f_{p-1}, \partial \Delta_2^{p-1} u / \partial \nu = g_{p-1}$ e, se $n = 2p + 1, \Delta_2^p u = f_p$. — L'A. in opportune ipotesi per A , peraltro assai generali, dimostra che il funzionale

$$I(u) \begin{cases} = \int_A (\Delta_2^p u)^2 d\tau & \text{se } n = 2p, \\ = \int_A |\text{grad } \Delta_2^p u|^2 d\tau & \text{se } n = 2p + 1 \end{cases}$$

ammette nella classe \bar{U}_n , supposta non vuota, minimo assoluto e che la minimante verifica in tutte A l'equazione $\Delta_2^p u = 0$. Egli perviene inoltre ad una costruzione esplicita della minimante stessa.

G. Fichera.

Atkinson, F. V.: On a theorem of K. Yosida. Proc. Japan Acad. **28**, 327—329 (1952).

A result of the reviewer (this Zbl. **44**, 235) is refined as follows: Consider the equation

$$(1) \quad \Delta h(x) = m(x) h(x) \quad (\Delta = \text{the Laplacian})$$

in a region R which is a connected domain with smooth boundaries ∂R in an n -dimensional Euclidean space, where $n \geq 2$. Let $m(x)$ be continuous and have a positive lower bound m in R , and let ∂R lie entirely in the bounded part of R . Then the solution $h(x)$ of (1) satisfying the internal boundary condition $\partial h / \partial n = 0$ on ∂R and the order relation $h(x) = o(r^{-(n-1)/2} \exp(r\sqrt{m}))$, r = the distance of the point x from the origin, must vanish identically. This order relation is, in general, a best possible one, since $h(x) = r^{-1} \exp(\pm kr)$ satisfies (1) with $n = 3$, $m(x) = k^2$.

K. Yosida.

Brelot, Marcel: Lignes de Green et problème de Dirichlet. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 1595—1597 (1952).

Voranzeige über Weiterführungen früherer Untersuchungen [C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 598—600 (1952); Brelot und Choquet, dies. Zbl. **46**, 327] über das Problem von Dirichlet für allgemeine Greensche Räume. Es handelt sich um die Rolle gewisser Unterklassen der daselbst harmonischen bzw. subharmonischen Funktionen als Lösungsfunktionen bzw. als eine Art Minoranten der gegebenen Funktionen.

G. af Hällström.

Deny, Jacques: Le balayage. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 47—61 (1952).

Das Ziel dieser Arbeit ist, alle Kerne anzugeben, für welche ein „balayage“-Verfahren möglich ist. Diese werden erhalten durch $K = a^{-1}(\varepsilon + \sigma + \sigma^2 + \dots)$ (a positive Konstante, ε Dirac-Maß, σ positives symmetrisches Maß vom Totalmaß < 1), bzw. deren abgeschlossene Klasse. Als Spezialfälle ergeben sich u. a. auch die bekannten Rieszschen Funktionen $|x|^{\alpha-m}$ ($0 < \alpha \leq 2$) des R^m ($m > 2$).

H. Hornich.

Deny, Jacques: Familles fondamentales. Noyaux associés. Ann. Inst. Fourier **3**, 73—101 (1952).

Ce mémoire très riche et autonome approfondit, perfectionne et simplifie des recherches entreprises récemment [Cartan et Deny, ce Zbl. **38**, 261; Deny, v. l'analyse précédente] à la suite des premiers travaux de ces auteurs sur le potentiel. On reprend de façon plus générale l'étude des familles fondamentales: ensemble Σ de mesures de Radon $\sigma \geq 0$ sur un groupe abélien localement compact G , tel qu'on puisse associer une mesure $K \geq 0$ (base de Σ) satisfaisant aux conditions: 1. $K * \sigma$ a un sens pour tout σ et $K - K * \sigma$ est ≥ 0 non nulle, à support compact, 2. à tout voisinage V de l'origine de G , on peut associer un σ tel que le support de $K - K * \sigma$ soit contenu dans V . On voit que cela généralise les distributions de masses uniformes sur les sphères de centre O dans R^n , où la mesure de densité $1/r^{n-2}$ ($n > 2$) est une base associée. On distingue parmi les bases associées un noyau associé et on développe des théories généralisant celles du potentiel classique: mesures surharmoniques, balayage, capacité, principes du maximum. On pousse très loin la recherche des noyaux pour lesquels le balayage est possible. A côté des progrès dans les résultats, signalons une méthode nouvelle qui remplace avantageusement l'usage de l'énergie finie et consiste à considérer la borne inférieure d'un ensemble de mesures ≥ 0 .

M. Brelot.

Beckenbach, E. F.: On characteristic properties of harmonic functions. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 765—769 (1952).

Die Funktion $u(x, y)$ sei in einem Gebiete D samt ihren ersten Ableitungen stetig und erfülle folgende Bedingungen: (1) Für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ gilt mit $r \rightarrow 0$:

$$\iint_{K_r} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{C_r} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = o(r^2),$$

wobei K_r das Innere, C_r den Rand von $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$, n die äußere Normale von C_r bezeichnet; (2) $u \neq 0$ in D . Dann ist u harmonisch in D . —

Verf. zeigt ferner, daß der Satz gültig bleibt, wenn (2) ersetzt wird durch: (2') $\partial^2 u / \partial x^2$ und $\partial^2 u / \partial y^2$ existieren und sind summierbar in D . — Der Beweis stützt sich u. a. auf einen Satz von S. Saks (vgl. dies. Zbl. 5, 17). *A. Huber.*

Cole, Julian D.: Note on the fundamental solution of $w y_{vv} + y_{ww} = 0$. Z. angew. Math. Phys. 3, 286—297 (1952).

Verf. untersucht zunächst die Fundamentallösung der Gleichung $w y_{vv} + y_{ww} = 0$ und betrachtet dann durch Integrale dargestellte Lösungen mit einer Singularität in $w > 0$, die nach $w < 0$ fortsetzbar sind. Diskussion des Grenzfalles $w = 0$ und Reihenentwicklung des singulären Teiles der Grundlösung. *K. Maruhn.*

Riesz, Marcel: Sur le potentiel de Liénard-Wiechert attaché à une ligne d'univers. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2159—2161 (1952).

Dans son mémoire bien connu (ce Zbl. 33, 276; ce travail sera noté M.), l'A. a introduit (cf. M. p. 151) le potentiel-vecteur retardé d'ordre α :

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{H(\alpha)} \int_{Lx} r^{\alpha-4} dz$$

défini dans l'espace-temps muni de la métrique:

$$ds^2 = (dz^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (dz^i)^2.$$

La forme ci-dessus n'est valable que pour $2 < \alpha < 3$; l'A. en effectue d'abord le prolongement analytique à l'intervalle $2 < \alpha < 5$. Par passage à la limite $\alpha \rightarrow 2$, on retrouve le potentiel de Liénard-Wiechert; l'A. a, au moyen de calculs laborieux, obtenu la formule (cf. M. p. 157).

$$A^2(x) = \square A^4(x) = \frac{1}{8\pi} \square_x (z_{\text{ret}} - x)$$

où z_{ret} est l'intersection de L avec le cône retrograde de sommet x . L'A. a également donné une autre démonstration, intuitive, et rapide, du résultat ci-dessus (cf. M. p. 157) que la présente note rend entièrement rigoureuse. *J. Kravtchenko.*

Moon, Parry and Domina Eberle Spencer: Theorems on separability in Riemannian n -space. Proc. Amer. math. Soc. 3, 635—642 (1952).

Die R -Separierbarkeit der Differentialgleichungen $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$ und $\nabla^2 \Phi = 0$ im n -dimensionalen Riemannschen Raum mit einer Metrik, für die $g_{ij} = 0$, wenn $i \neq j$, wird untersucht. R -separierbar heißt, daß der Ansatz

$$\Phi = \frac{1}{R(u^1, u^2, \dots, u^n)} \prod_{i=1}^n U^i(u^i).$$

die Separation der partiellen Differentialgleichung in n gewöhnliche Differentialgleichungen erlaubt. Ist $R = \text{const}$, so wird von gewöhnlicher Separierbarkeit gesprochen. — Es werden jeweils notwendige und hinreichende Bedingungen dafür formuliert, daß R - oder gewöhnliche Separierbarkeit für die eine bzw. die andere Differentialgleichung vorliegt. Spezialisiert werden diese Sätze auf den Fall, daß Φ nicht von allen Koordinaten u^1, \dots, u^n abhängt. Schließlich werden alle gewonnenen Sätze noch für den dreidimensionalen euklidischen Raum spezialisiert.

J. Meixner.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Gagaev, B. M.: Existenzsätze für die Lösungen von Integrodifferentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 469—472 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet ein System von Integro-Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{d^{m_s} y_s(x)}{dx^{m_s}} = L_s(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) + \lambda \int_a^b K_s(x, u) M_s(u, y_1(u), \dots, y_n(u)) du,$$

($s = 1, \dots, n$) und nennt es „normal“, wenn die Differentialoperatoren L_s und M_s die y_1, \dots, y_n lediglich nebst den Ableitungen, deren Ordnungen niedriger als m_s sind, (nicht notwendig linear) enthalten. Schreibt man, wie in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen üblich, (1) in ein entsprechendes System mit $m_s = 1$ um, so erhält man, für stetige L_s und M_s , unter einigen weiteren Voraussetzungen die Existenz von Lösungssystemen, für die bei Hinzunahme von Lipschitzbedingungen die Unität folgt. Sieht man auch von der Stetigkeit ab, so lassen sich Verallgemeinerungen in Analogie zu Carathéodory finden. (Ohne Beweise.)

K. Maruhn.

Ženčhen, O.: Über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von Integro-Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 229—230 (1952) [Russisch].

Beweis des Satzes: Die Funktion $f(x, z)$ sei für $a \leq x \leq b$, $|z| < \infty$ stetig in (x, z) und genüge der Lipschitzbedingung: $|f(x, z^{**}) - f(x, z^*)| \leq N_1 |z^{**} - z^*|$. Die Funktion $K(x, t, y)$ sei stetig für $a \leq x, t \leq b$, $|y| < \infty$ und erfülle die Lipschitzbedingung: $|K(x, t, y^{**}) - K(x, t, y^*)| \leq N_2 |y^{**} - y^*|$. Dann besitzt die Integralgleichung: $y(x) = f\left(x, \lambda \int_a^b K(x, t, y(t)) dt\right)$ für $\lambda < \frac{1}{(b-a)N_1N_2}$ eine eindeutig bestimmte Lösung. Es wird eine Verallgemeinerung dieses Satzes auf Integro-Differentialgleichungen angegeben.

W. Thimm.

Bykov, Ja. V.: Über eine Klasse linearer Integro-Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 221—224 (1952) [Russisch].

In der Integro-Differentialgleichung

$$L(z) = \lambda \int_a^b K(x, t) M(z) dt + \varphi(x)$$

seien $K(x, t)$ und $\varphi(x)$ gegebene Funktionen, $L(z)$ ein linearer, homogener Differentialoperator mit in $\langle a, b \rangle$ stetigen Koeffizienten, $M(z)$ ein linearer homogener Operator und $z(x)$ die gesuchte Funktion. Unter weiteren Einschränkungen für K, φ, L und M werden Sätze über die Lösbarkeit und die Anzahl der linear unabhängigen Lösungen des Problems bewiesen.

W. Thimm.

Pogorzelski, W.: Sur l'équation intégrale-différentielle non linéaire à singularité polaire. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 75—87 (1952).

Verf. betrachtet die Gleichung

$$(1) \quad \int_0^a N(x, y) F[x, y, \varphi(y), \varphi'(y), \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy = f(x)$$

mit
$$N(x, y) = M_1(x, y) \cotg \frac{\pi}{a} (x - y) + M_2(x, y)$$

(M_1, M_2 regulär, das Integral als Cauchyschen Hauptwert) für die Unbekannte $\varphi(y)$. Mittels der Poincaréschen Transformation eines iterierten Integrals und mit Hilfe eines abgeschlossenen Kerns der gleichen Singularität wie N wird dann (1) in eine reguläre nichtlineare Integro-Differentialgleichung der Form

$$\Phi[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] = \int_0^a \Psi[x, y, \varphi(y), \varphi'(y), \dots, \varphi^{(n)}(y)] dy$$

übergeführt, deren Lösung unter bestimmten Bedingungen mittels eines geeigneten Iterationsverfahrens gelingt.

K. Maruhn.

Colombo, Serge: Sur une équation intégrale-différentielle non linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 857—858 (1952).

L'equazione $af(x) - xf'(x) + \int_0^x f(\xi) f^{(n+1)}(x - \xi) d\xi = g(x)$ nella funzione incognita $f(x)$ si può ricondurre a una equazione differenziale di Riccati e, se $g(x)$ è la costante zero, a una equazione differenziale lineare.

C. Cimmino.

Germay, R. H.: Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégral-différentielles récurrentes. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 125—130 (1952).

A sistemi di equazioni integrodifferenziali ricorrenti vengono estesi i procedimenti precedentemente indicati dall'A. per le equazioni integrodifferenziali, poi per le equazioni differenziali ricorrenti, poi per i sistemi di equazioni differenziali ricorrenti (questo Zbl. 6, 346; 41, 239).

C. Cimmino.

Elliott, Joanne: On a class of integral equations. Proc. Amer. math. Soc. 3, 566—572 (1952).

Verf. löst die Integralgleichung

$$(1) \quad g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{t-x} dt + \lambda \int_{-a}^a h(x, t) f(t) dt$$

mit $f(t)$ als unbekannter Funktion. a kann endlich und unendlich sein. Eine ähnliche Aufgabe wird auch von Šerman (dies. Zbl. 44, 322) behandelt. Ersetzt man in (1) $f(t)$ durch $f(t) w(t)$, so kann man die Gewichtsfunktion w so wählen, daß die Hilbert-

transformation $Tf = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) w(t)}{t-x} dt$ isometrisch ist. Es wird $a = 1$ angenommen und $w(t) = (1-t)^{1/2} (1+t)^{-1/2}$ gesetzt. Dann ist die Inverse von Tf

$$(2) \quad T_1 g = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t) w_1(t)}{t-x} dt \quad \text{mit} \quad w_1(t) = \frac{1}{w(t)}.$$

Es wird vorausgesetzt

$$\int_{-1}^1 |h(x, t)|^2 w_1(x) dx < \infty, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |h(x, t)|^2 w_1(x) w(t) dx dt < \infty,$$

$$\int_{-1}^1 |g(x)|^2 w_1(x) dx < \infty.$$

Zur Gewichtsfunktion $w(t)$ gehören dann Jacobische Polynome $P_n(x)$, zu $w_1(t)$ Polynome $Q_n(x)$. Wendet man auf (1) die Transformation (2) an, so erhält man eine Fredholmsche Gleichung

$$\tilde{g}(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^1 \tilde{h}(x, t) f(t) w(t) dt.$$

Mittels der Jacobischen Polynome wird dies auf ein Gleichungssystem

$$-g_k = f_k - \lambda \sum_j c_{kj} f_j$$

mit $\sum |c_{ij}|^2 < \infty$ zurückgeführt.

G. L. Tautz.

Colombo, Serge: Sur les équations intégrales de Volterra à noyaux logarithmiques. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 928—929 (1952).

L'A. osserva che la regola del calcolo operazionale

$$\frac{p(p+a \log p)}{p+a \log p} \subset \int_0^t \frac{(t-s)^{a_s}}{\Gamma(1+a_s)} f(s) ds$$

permette la risoluzione formale dell'equazione integrale di Volterra:

$$\int_0^t (\xi \log \xi + m \xi + n) f(t-\xi) d\xi = g(t)$$

(m, n costanti), appartenente a un tipo generale già considerato da Volterra e Pérès nella loro „Théorie générale des fonctionnelles“ (Paris 1936; questo Zbl. 15, 305). Si trova che

$$f(t) = \frac{1}{n} \left\{ \int_0^t \omega(\xi e^{m+1-\gamma}, \kappa) g''(t-\xi) d\xi + g'(0) \omega(t e^{m+1-\gamma}, \kappa) \right\} \quad (n < 0)$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni, $\varkappa = -n^{-1} e^{(-m+1-\gamma)}$ e

$$\omega(t, a) = \int_0^t \frac{(t-s)^{a-1}}{\Gamma(a)} ds \supset p(p+a \log p)^{-1} \quad (\operatorname{Re} a > 0).$$

La funzione $\omega(t, \varkappa)$ può essere riavvicinata alle funzioni

$$\nu(t, n) = \int_0^\infty \frac{t^{\xi+n}}{\Gamma(\xi+n+1)} d\xi \supset p^{-n} (\log p)^{-1}$$

e

$$\mu(t, m, n) = \int_0^\infty \frac{t^{n+\xi} \xi^m}{\Gamma(1+n+\xi) \Gamma(1+m)} d\xi \supset p^{-n} (\log p)^{-m-1}$$

che intervengono nella risoluzione dell'equazione di Volterra il cui nucleo è un polinomio in $\log t$. L. Giuliano.

Mitra, S. C. and B. N. Bose: On certain theorems in operational calculus. Acta math. 88, 227—240 (1952).

Wenn $f(t)$ und $\Phi(p)$ durch die Laplace-Transformation $\Phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ zusammenhängen, so entspricht jeder Eigenschaft von $f(t)$ eine solche von $\Phi(p)$. Ist z. B. $t^{-n-1/2} f(t)$ selbstreziprok in der Hankel-Transformation der Ordnung n , so hat $t^{n-3/2} \Phi(t)$ dieselbe Eigenschaft. Es wird eine größere Anzahl von Sätzen dieser Art abgeleitet, die sich auch dazu verwenden lassen, die Laplace-Transformierten von gewissen Funktionen auszurechnen. G. Doetsch.

Ghizzetti, Aldo: Sopra un fondamentale teorema nella teoria della trasformazione di Laplace. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 21, 103—115 (1952).

Nach einem historischen Überblick über die verschiedenen Formen des „Faltungssatzes“ beschäftigt sich Verf. vor allem mit folgender, von ihm (dies. Zbl. 38,

64) bewiesenen Fassung: Wenn $\int_0^\infty \varphi(t) dt$ und $\int_0^\infty \psi(t) dt$ konvergieren und

$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$, $\psi(t) = O\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \rightarrow \infty$ ist, so konvergiert $\int_0^\infty \varphi(t) * \psi(t) dt$ und

ist gleich $\int_0^\infty \varphi(t) dt \cdot \int_0^\infty \psi(t) dt$. Dieser Satz läßt sich nicht unmittelbar auf n Faktoren verallgemeinern. Beachtet man aber, daß für eine Funktion $\varphi(t)$ mit den obigen

Eigenschaften das Integral $\int_0^\infty \varphi(t) dt$ von jeder Ordnung α mit $-1 < \alpha \leq 0$

Cesàro-summabel ist und daß die Faltung zweier Funktionen, deren Integrale von der Ordnung α , bzw. β summabel sind, ein von der Ordnung $\alpha + \beta + 1$ summables Integral hat, so kann man behaupten, daß jedes einzelne der n Integrale von der Ordnung $-1 + 1/n$, das Integral ihrer Faltung also von der Ordnung 0 summabel, d. h. konvergent ist. G. Doetsch.

Rooney, P. G.: A new representation and inversion theory for the Laplace transformation. Canadian J. Math. 4, 436—444 (1952).

Das Umkehrungs- und das Darstellungsproblem der Laplace-Transformation werden auf Grund des von Erdélyi (dies. Zbl. 38, 65) angegebenen Operators

$$L_{k,t} [f(s)] = k e^{2k} (\pi t)^{-1} \int_0^\infty x^{-1/2} \cos(2k x^{1/2}) f(k(x+1)/t) dx$$

behandelt. Umkehrung: Wenn $e^{-st} t^{-1/2} \varphi(t) \in L(0, \infty)$ für alle $s > \gamma$, so existiert $f(s) = \mathfrak{L}\{\varphi\}$ für $s > \gamma$, und es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{k,t} [f(s)] = \frac{1}{2} [\varphi(t+) + \varphi(t-)]$ in jedem

Punkt t , wo diese Grenzwerte existieren; $\lim_{k \rightarrow \infty} L_{k,t}[f(s)] = \varphi(t)$ in jedem Punkt der Lebesgueschen Menge von $\varphi(t)$. Darstellung: Wenn $s^{-1}f(s) \in L(\delta, \infty)$ für jedes $\delta > 0$, $F(x) = \int_x^\infty y^{-1}|f(y)|dy = O(x^{-m})$ für $x \rightarrow \infty$ mit $m > \frac{1}{2}$, $F(x) = O(e^{\gamma/x})$ für $x \rightarrow +0$ mit $\gamma \geq 0$, $|L_{k,t}[f(s)]| < M$ für $k > k_0$, $0 \leq t < \infty$, so ist $f(s) = \mathfrak{L}\{\varphi\}$ mit einem in $0 \leq t < \infty$ beschränkten φ . Analoge Sätze existieren für $\varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ und für die Laplace-Stieltjes-Transformation $f(s) = \mathfrak{L}\{\alpha\}$ mit einem $\alpha(t)$ von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall.

G. Doetsch.

Knopp, Konrad: Zwei Abelsche Sätze. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. 4, 89—94 (1952).

Es werden die Beweise zweier Sätze abelscher Art erbracht, die sich in der bisherigen Literatur noch nicht zu finden scheinen, obwohl die entsprechenden tauberschen Sätze seit langem bekannt sind. [Vgl. Ref., Math. Z. 33, 294—299 (1931), sowie J. reine angew. Math. 164, 27—39 (1931)]. Von dem ersten der beiden Sätze steht eine sozusagen duale Formulierung bei G. Doetsch (Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, S. 202, dies. Zbl. 18, 129), doch übergeht der angedeutete Beweis die Hauptschwierigkeit. Diese beiden Sätze zusammengefaßt (von denen sich der erste auf das Laplacesche Integral und der zweite auf die Taylorreihe bezieht) lauten: Sei $s(t)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall; aus $s(t) = t^\alpha L(t)$, ($t \rightarrow \infty$), $\alpha > -1$, folgt

$$\int_0^\infty e^{-t/y} ds(t) = \Gamma(\alpha + 1) y^\alpha L(y), \quad (y \rightarrow \infty),$$

wo das Integral im stieltjeschen Sinne zu nehmen ist und wobei $L(t)$ eine sogenannte „sich langsam ändernde“ Funktion bedeutet, welche durch die Existenz von $\lim_{u \rightarrow \infty} L(ut)/L(t) = 1$, für jedes $u > 0$, definiert ist. Vgl. Ref., Mathematica Cluj 4, 38—53 (1930), und dies. Zbl. 8, 8.

J. Karamata.

Laguardia, Rafael: Probleme bei der Iteration der Laplace-Transformation. Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 177—183 (1952) [Spanisch].

Überblick über eigene und fremde Ergebnisse bezüglich der Iteration der Laplace- und der Stieltjes-Transformation und Angabe einer Anzahl von Problemen, deren Lösung nützlich wäre (Abelsche Sätze, exakter Konvergenzbereich, Darstellungsproblem, Anwendung auf Differentialgleichungen).

G. Doetsch.

Schwartz, Laurent: Transformation de Laplace des distributions. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 196—206 (1952).

Die Definition der (zweiseitigen, n -dimensionalen) Laplace-Transformation für Distributionen läuft darauf hinaus, daß in der Sprache der gewöhnlichen Funktionen das Integral

$$\int e^{-px} F(x) dx = \int e^{-(\xi + i\eta)x} F(x) dx$$

als Fourier-Transformation von $e^{-\xi x} F(x)$ erklärt wird. Da der Verf. in seinem Buch „Théorie des distributions“, t. II, Actual. sci. industr. Nr. 1122, Paris 1951 (dies. Zbl. 42, 114), dessen Bezeichnungsweisen im folgenden benutzt und als bekannt vorausgesetzt werden, die Fourier-Transformation für Distributionen definiert und ausführlich behandelt hat, kann die Übertragung der Laplace-Transformation auf Distributionen vorgenommen werden, wenn geklärt ist, welchen Bereichen die Variable ξ und die durch eine Distribution T ersetzte Funktion F angehören müssen, damit $e^{-\xi x} F(x)$ eine „temperierte“ Distribution ist, weil nur für solche die Fourier-Transformation definiert ist. Dies geschieht so: Es sei $X^n = R^n$ ein reeller Vektorraum von n Dimensionen, $\mathcal{E}^n = R^n$ sein Dual, $\Pi^n = \mathcal{E}^n + i\mathcal{E}^n$ der Raum der Linearformen mit komplexen Werten über X^n . Für $x = (x^1, \dots, x^n) \in X^n$, $p = (p^1, \dots, p^n) \in \Pi^n$ ($p = \xi + i\eta$, $p^j = \xi^j + i\eta^j$) wird gesetzt: $p x = p^1 x^1 + \dots + p^n x^n$. Wenn T eine Distribution auf X^n , also $T \in \mathcal{D}'_x$, ist, so bildet die Menge der $p \in \Pi^n$, für die $\exp(-px) T$ eine temperierte Distribution, also $\exp(-px) T \in \mathcal{S}'_x$, ist, einen „Zylinder“ $\Gamma + i\mathcal{E}^n$, definiert durch $\xi \in \Gamma$, wo Γ eine gewisse Menge von \mathcal{E}^n ist, die sich als konvex erweist. Wenn ξ dem Inneren von Γ angehört, ist

$\exp(-px)T(x)$ eine holomorphe Funktion von p mit Werten in $(O'_x)_r$. Unter $S'_x(I)$ wird die Menge der Distributionen $T \in D'_x$ verstanden mit der Eigenschaft, daß $\exp(-\xi x)T$ in S'_x ist für jedes $\xi \in I$. Entsprechend wird der Raum $(O'_x)_r(I)$ definiert. Für $S \in S'_x(I)$ und $T \in (O'_x)_r(I)$ wird die Faltung $S * T$ durch $S * T = \exp(px) [(\exp(-px)S) * (\exp(-px)T)]$ definiert. Sie gehört zu $S'_x(I)$. Die Laplace-Transformation wird nun so definiert: Für festes $\xi \in I$ wird die Fourier-Transformierte von $\exp(-\xi x)T_x$, betrachtet als Distribution in x , bestimmt. Sie wird als Distribution in η geschrieben; sie gehört zu $S'_\eta(\eta \in \mathbb{E}^n)$ und hängt von dem Parameter ξ ab: $(E(\xi))_\eta = [\mathfrak{F}_{(x)}(\exp(-\xi x)T_x)]_\eta$. Diese Abbildung $\xi \rightarrow (E(\xi))_\eta$ von I auf S'_η heißt Laplace-Transformierte von $T \in S'_x(I)$, bezeichnet mit $(\mathfrak{L} T(\xi))_\eta$ oder $\mathfrak{L} T$. — Wenn I offen ist, so ist $\mathfrak{L} T$ eine unbeschränkt oft differenzierbare Abbildung von I auf $(O_M)_\eta$ und gleich einer holomorphen Funktion von p in $I + i\mathbb{E}^n$, die auch Laplace-Transformierte von T heißt. Umgekehrt ist jede holomorphe Funktion $F(p)$ auf $I + i\mathbb{E}^n$ mit der Eigenschaft, daß für jeden kompakten Teil K von I die Funktion $F(p)$ auf $K + i\mathbb{E}^n$ durch ein Polynom in η majorisiert wird, die Laplace-Transformierte einer eindeutig bestimmten Distribution $T \in S'_x(I)$. Es gilt der Faltungssatz: Wenn I eine konvexe Menge in \mathbb{E}^n , $S \in S'_x(I)$ und $T \in (O'_x)_r(I)$ ist, so ist $\mathfrak{L}\{S * T\} = \mathfrak{L} S \cdot \mathfrak{L} T$, wobei dieses Produkt für jedes $\xi \in I$ als Produkt einer Distribution aus S'_η und einer Funktion aus $(O_M)_\eta$ auszuführen ist. *G. Doetsch.*

Jaiswal, J. P.: On Meijer transform. II. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 131—151 (1952).

Fortsetzung der in dies. Zbl. 46, 114 referierten Arbeit. Es werden weitere Eigenschaften der Meijer-Transformation abgeleitet und spezielle Transformierte bestimmt. Damit lassen sich gewisse Reihen und Integrale berechnen. *G. Doetsch.*

Bochner, S.: Bessel functions and modular relations of higher type and hyperbolic differential equations. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 12—20 (1952).

The transform (1) $f(\mu) = \int_{\lambda > 0} S(\mu, \lambda) g(\lambda) d\lambda$, ($S = \mu^{-r/2} J_r(2\sqrt{\mu}\lambda) \lambda^{r/2}$), is self-inversive and unitary with respect to $\lambda^r d\lambda$ (Watson transform). It can be generalized in various ways. It is e. g. possible to consider μ and λ as symmetric matrices of order m and then (1) is still self-inversive if

$$(2) \quad S(\mu, \lambda) = (2\pi i)^{-m(m+1)/2} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{-\text{Tr}(\mu z^{-1}) + \text{Tr}(\mu z)} (\det z)^{-\delta} dz$$

($z = x + iy$, $x > 0$, $\delta > \frac{1}{2}(m-1)$), and it is unitary with respect to the volume element $\Delta(\lambda) d\lambda$ where $\Delta(\lambda) = (\det \lambda)^{\delta - (m+1)/2}$. The function $J(\mu, \lambda) = \Delta(\mu)^{1/2} S(\mu, \lambda) \Delta(\lambda)^{-1/2}$ is symmetric and $S(\lambda, 1)$ satisfies a differential equation analogous to the classical differential equation for Bessel functions. Other generalizations starting from a suitable integrand in an integral of the form (2) are also given.

L. Gårding.

MacDonald III, William M., John M. Richardson and Leon P. Rosenberry: Representation of nonlinear field functions by Thiele semi-invariants. Quart. appl. Math. 10, 284—289 (1952).

Dem Gradienten $\partial T / \partial x$ der Zustandsgröße (Temperatur) $T(x, y, z)$ im Intervall $x_1(y, z) \leq x \leq x_2(y, z)$ wird die charakteristische Funktion $\varphi(t) = \int_{x_1}^{x_2} e^{itx} \frac{\partial T}{\partial x} dx$ zugeordnet. Es ist dann

$$T(x) - T(x_1) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} (e^{-ixt} - e^{-ix_1 t}) \varphi(t) dt.$$

Durch Residuenrechnung wird hieraus für $J(x) = T(x) - \frac{1}{2}[T(x_1) + T(x_2)]$ der Ausdruck $J(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ abgeleitet. Dies wird in $\varphi_s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} J^s \frac{\partial J}{\partial x} dx$ eingesetzt, wodurch sich nach nicht exakt legitimierten Umformungen ergibt:

$$\varphi_s(t) = i^s (2\pi)^{-s-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_s \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \prod_{r=1}^s \frac{\varphi(t_r)}{t_r} \varphi(\sigma_s) \quad \text{mit} \quad \sigma_s(t) = t - \sum_1^s t_q.$$

Die Größen $\mu_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\nu J^\delta \frac{\partial J}{\partial x} dx$ berechnen sich zu $i^\nu \mu_\nu = \varphi_s^{(\nu)}(0)$. Sie werden in

Taylorreihen nach den durch $\sum_{\nu=0}^{\infty} (it)^\nu \frac{k_\nu}{\nu!} = \log \varphi(t)$ definierten Variablen k_ν (den in der Statistik so genannten Thieleschen Semiinvarianten) entwickelt; die ersten drei Koeffizienten werden explizit angegeben. — Verallgemeinerung auf den Fall, daß J ein Vektor in einem n -dimensionalen Raum ist. G. Doetsch.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Kračkovskij, S. N. und A. A. Vinogradov: Über ein Kriterium für die gleichmäßige Konvexität eines Raumes vom Typus B. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3, 131—134 (1952) [Russisch].

J. A. Clarkson hat den Begriff der gleichmäßigen Konvexität eingeführt für Banachsche Räume E (dies. Zbl. 15, 356). D. h.: E ist gleichmäßig konvex, wenn sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ findet, so daß $\|(x+y)/2\| < 1 - \delta(\varepsilon)$ gilt, sobald $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ und $\|x-y\| \geq \varepsilon$ gilt. Die Verff. schreiben diese Definition Sobolev zu (Anwendungen der Funktionalanalysis in der mathematischen Physik, Staatliche Universität Leningrad 1950, S. 27 [Russisch]). E sei ein Banachscher Raum, x_0 ein Punkt auf der Einheitskugel, f ein lineares Funktional mit den Eigenschaften $f(x_0) = 1$ und $\|f\| = 1$. Die Menge aller Punkte x , für die $f(x) = 1$ gilt, heißt eine Stützebene an die Einheitskugel durch den Punkt x_0 . L_{xy} sei die Mannigfaltigkeit, die besteht aus dem Durchschnitt aller Stützebenen, die x und y enthalten. $d(x, y)$ sei der Abstand von 0 zu L_{xy} , wenn L_{xy} nicht leer ist, sonst $d(x, y) = +\infty$. Satz: E ist gleichmäßig konvex dann und nur dann, wenn es für jedes ε , $0 < \varepsilon \leq 2$, ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\|x-y\| \geq \varepsilon$ impliziert $d(x, y) > 1 + \delta(\varepsilon)$. E. Hewitt.

Takenouchi, Osamu: Sur les espaces linéaires localement convexes. Math. J. Okayama Univ. 2, 57—84 (1952).

L'A. généralise la notion de limite inductive [définie pour les suites croissantes d'espaces (F) par L. Schwartz et le rapp. (ce Zbl. 35, 355)] à des familles filtrantes quelconques d'espaces localement convexes, et définit une notion „duale“ de limite projective, en prenant modèle sur les définitions connues pour les groupes topologiques; il applique ces notions à l'étude des espaces bornologiques et des espaces tonnellés. Beaucoup de ces résultats ont été obtenus indépendamment par W. Donoghue et K. T. Smith (ce Zbl. 47, 106; nous renvoyons pour plus de détails au rapport sur cet article). L'A. prétend (p. 61) que lorsqu'un espace E est réunion d'une famille filtrante de sous-espaces E_α , et que chaque E_α est muni d'une topologie \mathcal{T}_α telle que, si $E_\alpha \subset E_\beta$, \mathcal{T}_α soit induite sur E_α par \mathcal{T}_β , alors la limite inductive des \mathcal{T}_α sur E induit sur chaque E_α exactement la topologie \mathcal{T}_α ; il renvoie pour cela à la proposition analogue de L. Schwartz et du rapporteur (loc. cit., p. 68) pour la limite inductive d'une suite croissante; mais cette dernière proposition utilise de façon essentielle une construction par récurrence, qui ne semble pas se généraliser aux familles filtrantes quelconques, et le théorème en question reste douteux pour le moment. J. Dieudonné.

Fan, Ky: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 121—126 (1952).

Verf. beweist: Ist L ein lokal konvexer topologischer linearer Raum, K eine kompakte konvexe Teilmenge von L und $\mathfrak{K}(K)$ das System aller abgeschlossenen konvexen Teilmengen von K , ferner $F|K$ eine nach oben halbstetige Punkt-Mengen-Abbildung von K in $\mathfrak{K}(K)$ [so daß also mit $x_n \in K$, $\lim x_n = x^*$, $y_n \in F(x_n)$ und $\lim y_n = y^*$ allemal $y^* \in F(x^*)$], dann gibt es einen „Fixpunkt“ x_0 in K mit $x_0 \in F(x_0)$. Dieser Satz liefert einen Satz von S. Kakutani (1941), wenn man L

euklidisch wählt, andererseits einen Satz von A. Tychonoff (1935), wenn man F als einelementig annimmt. Anwendung des obigen Satzes gestattet eine Verallgemeinerung eines Satzes von J. von Neumann (dies. Zbl. 17, 39), insbesondere des Minimum-Maximum-Satzes von J. von Neumann aus der Theorie der Spiele, auf lokal konvexe topologische lineare Räume und ergibt damit auch den Minimum-Maximum-Satz von J. Ville (Traité du calcul des probabilités et de ses applications IV, 2; Collection Borel, Paris 1938, S. 105—155, dies. Zbl. 19, 126). *G. Aumann.*

Heider, L. J.: Lattice ordering on Banach spaces. Proc. Amer. math. Soc. 3, 833—838 (1952).

A subset of a real Banach space B is denoted by B^+ if it satisfies (i) $0 \in B^+$; (ii) $b, c \in B^+$ imply $b + c \in B^+$ and if $b + c = 0$ then $b = 0 = c$; (iii) $b \in B^+$ implies $mb \in B^+$ for all scalars $m \geq 0$. If B contains a subset B^+ , then setting $x \geq y$ if $x - y \in B^+$ defines a linear partial order in B . The author proves that B is then a linear lattice if and only if for each $b \in B$ there exists $b^+ \in B$ such that $(B^+ + b) \cap B^+ = B^+ + b^+$. A subset B^+ having this property [in addition to (i), (ii), (iii)] is denoted by B^{+v} . A subset B^{+v} is a subset B^{+ve} if it contains an element e , with $\|e\| = 1$, such that $\|b\| \leq 1$ if and only if $e + b$ and $e - b$ are in B^{+v} . Let $C(X)$ denote the algebra of all continuous real valued functions in a compact Hausdorff space. Using the lattice theoretic characterization of $C(X)$ due to M. and S. Krein (this Zbl. 23, 327) the author proves that a Banach space is equivalent to a space $C(X)$ if and only if it contains a subset B^{+ve} . The relation between the Krein characterization of $C(X)$ and that of S. Kakutani [Ann. of Math., II. Ser. 42, 994—1024 (1941)] is studied, and similar methods are applied to the characterization of abstract (L) spaces. — There are several misprints. In particular B^{+e} on p. 835 l. 12 should be B^{+ve} ; p. 836 l. 4 should be $(\tau) b \wedge c = 0$ implies $\|b + c\| = \|b - c\|$; $\|b\|^{+}$ on p. 836 l. 18 should be $\|b^+\|$. *F. F. Bonsall.*

Hitotumatu, Sin: A note on the maximal ideals of analytic functions. Kōdai math. Sem. Reports 1952, 51—53 (1952).

The author, applying the ideal theory of analytic functions due to H. Cartan and K. Oka, discusses on the maximal ideals in the integral domain O of regular analytic functions on a domain of regularity D . Topologizing O by the uniform convergence in wider sense on D , the author proves that the maximal ideal with at most a countable ideal base is necessarily closed. He then shows, completing a result of the reviewer, that the following four conditions are equivalent: An ideal τ is maximal and closed; τ is maximal and has at most a countable ideal base; O/τ is canonically isomorphic to the field of complex numbers; τ consists of all functions in O which vanish at some point of D . *J. Igusa.*

Köthe, Gottfried: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. 57, 13—33 (1952).

Dans le plan de la variable complexe, soit C une courbe de Jordan fermée, rectifiable et sans point double, G l'intérieur de C . L'A. considère l'espace vectoriel $\mathfrak{A}(C)$ des fonctions analytiques dans un voisinage de C (dépendant de la fonction), muni de façon naturelle d'une topologie limite inductive de topologies d'espace de Banach. L'intégrale de Cauchy permet de décomposer canoniquement $\mathfrak{A}(C)$ en somme directe topologique des deux espaces analogues $\mathfrak{A}(\bar{G})$ et $\mathfrak{A}(\Omega - G)$, où Ω est la sphère de Riemann, les fonctions de $\mathfrak{A}(\Omega - G)$ devant être nulles au point ∞ . Le dual fort $\mathfrak{A}'(C)$ de $\mathfrak{A}(C)$ est alors décomposé en somme directe topologique de $\mathfrak{A}'(\bar{G})$ et $\mathfrak{A}'(\Omega - G)$, qui sont respectivement identifiés à l'espace des fonctions analytiques dans $\Omega - \bar{G}$ et dans G , avec la topologie de la convergence compacte dans ces domaines (considérés comme contenus dans la sphère de Riemann). L'A. remarque que les fonctions de $\mathfrak{A}(C)$ sont entièrement définies par leurs restrictions à C , et ces restrictions forment un sous-espace de l'espace $\mathfrak{E}(C)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur C ; lorsque $\mathfrak{E}(C)$ est muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées, la topologie induite sur $\mathfrak{A}(C)$ est moins fine que celle définie ci-dessus, et $\mathfrak{A}(C)$ est partout dense dans $\mathfrak{E}(C)$. Par suite, les distributions à support dans C peuvent être considérées comme formant un sous-espace $\mathfrak{E}'(C)$ de $\mathfrak{A}'(C)$. Les décompositions en somme directe définies pour $\mathfrak{A}(C)$ et $\mathfrak{A}'(C)$ donnent des décompositions correspondantes pour $\mathfrak{E}(C)$ et $\mathfrak{E}'(C)$. L'A. montre que $\mathfrak{E}(\bar{G})$ est l'espace des fonctions analytiques dans G , dont toutes les dérivées sont bornées; définition analogue pour $\mathfrak{E}(\Omega - G)$; quant à $\mathfrak{E}'(\Omega - G)$, c'est l'ensemble des fonctions analytiques dans G , „à croissance lente“ au voisinage de C (i. e., majorées par une puissance négative de la distance à C). Définition analogue pour $\mathfrak{E}'(\bar{G})$. *J. Dieudonné.*

Carleson, Lennart: On bounded analytic functions and closure problems. Ark. Mat. 2, 283—291 (1952).

Let H^p , $p \geq 1$, be the class of functions $f(z)$, regular in $|z| < 1$, for which

$$N_p(f) = \lim_{r \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} < \infty,$$

where $f(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ p. f.; H^p is a Banach space under the norm N_p . If $1 < p < \infty$, the general (continuous) linear functional on H^p has the form

$$L(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta, \quad g \in H^q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

In the limiting case H^∞ , or B , of the class of all $f(z)$, regular and bounded in $|z| < 1$, the appropriate norm is $\sup_{|z| < 1} |f(z)|$. The general form of a linear functional on B is rather complicated. The author discusses the problem when it has one of the two forms of representation:

$$(A) \quad L(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta, \quad g \in H^1, \quad (B) \quad L(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) K(\theta) d\theta, \quad K \in L^1.$$

For this purpose he introduces a continuous weight function $\mu(r)$ defined for $0 \leq r \leq 1$, with $0 \leq \mu(r) \leq 1$ and $\mu(1) = 0$. The class C_μ of all functions $f(z)$, regular in $|z| < 1$ for which $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) f(re^{i\theta}) = 0$ uniformly in θ , is a Banach space under the norm $\sup_{|z| < 1} \mu(|z|) |f(z)|$; every linear functional on C_μ is also a linear functional on B (though not vice versa). The following theorem is then obtained: Every linear functional on C_μ has on B a representation of type (B), whatever the weight function μ may be. It has one of type (A) if, and only if, $\lim_{r \rightarrow 1} \mu(r) \log \frac{1}{1-r} < \infty$.

— The same method of weighted norms is employed for finding a function-theoretic correspondence to weak convergence of real functions bounded in a finite interval. — In the second part of the paper, the subspace C of B of functions uniformly continuous in $|z| \leq 1$ is considered. The main result is as follows: If $f_1, f_2, \dots, f_n \in C$ and if they do not vanish simultaneously

anywhere in $|z| \leq 1$, then, if $g \in C$, there exist $p_1, p_2, \dots, p_n \in C$ such that $g(z) = \sum_{v=1}^n p_v(z) f_v(z)$.

— This theorem is then generalized for the class B itself, and an application made to the Pick-Nevanlinna interpolation problem for „bounded like“ $f(z)$. W. W. Rogosinski.

Putnam, C. R.: Function space: Hilbert-space correspondences in quantum mechanics. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 260—267 (1952).

By virtue of the Riesz-Fisher theorem, the function space $L^2(-\infty, \infty)$ is isomorphically isometric with the sequence space l^2 through any complete orthonormal function system $\{\Phi_k(x)\}$ from $L^2(-\infty, \infty)$. However, if we consider the matrix representation of the linear operator, the correspondence may fail to hold good. Let $X = \{x_k\}$ denote the vector in l^2 which corresponds, with respect to $\{\Phi_k\}$, to the function $f(x)$ in $L^2(-\infty, \infty)$ and let $Q = (Q_{jk})$ denote the „coordinate“ matrix corresponding, with respect to $\{\Phi_k\}$, to the „coordinate“ operator x . It is easily shown that QX is in l^2 and corresponds to $xf(x)$ whenever the latter function belongs to $L^2(-\infty, \infty)$. But, it may be shown, by an example, that QX can belong to l^2 even if $xf(x)$ does not belong to $L^2(-\infty, \infty)$. It is proved that the latter situation cannot occur for the case in which $\{\Phi_k\}$ are the eigenfunctions of the quantum-mechanical, linear oscillator boundary value problem. Similar result is valid if Q is replaced by the „moment“ matrix. K. Yosida.

Makar, Raouf H.: The binomial series in infinite matrices. Indagationes math. 14, 408—414 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 408—414 (1952).

Die betrachteten Matrizen sind selbstassoziativ, d. h. es können beliebige positive Potenzen eindeutig gebildet werden. Es wird die binomische Reihe $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(r+s-1)!}{s!(r-1)!} A^s$ untersucht. Ist A algebraisch, so konvergiert diese Reihe dann und nur dann, wenn $\frac{(r+s-1)!}{s!(r-1)!} A^s$ gegen die Nullmatrix konvergiert. Konvergiert bzw. divergiert sie

für die Wurzel einer gegebenen irreduziblen Gleichung, so für alle anderen Wurzeln auch. Die Reihe konvergiert für A dann und nur dann, wenn alle skalaren Wurzeln ihrer Minimalgleichung den Betrag < 1 besitzen. Auch für einen Fall nichtalgebraischer A wird ein Konvergenzkriterium gegeben.

G. Köthe.

Schwartz, Laurent: Sur les multiplicateurs de FL^p . Fysiogr. Sällsk. Lund Förl. 22, 124—128 (1952).

In den Bezeichnungen von L. Schwartz: Théorie des distributions I, II, Paris 1950—51, Actual. sci. industr. Nr. 1091, 1122 (dies. Zbl. 37, 73; 42, 114) wird definiert: FL^p ($1 < p < \infty$) sei der Vektorraum der Distributionen T über R^n , deren Fourier-Abbild FT in $L^p(R^n)$ liegt. Multiplikator von FL^p heißt eine lokal summable Funktion f mit der Eigenschaft, daß die Multiplikation $\varphi \rightarrow f\varphi$ den Raum (D) auf FL^p abbildet und stetig ist, wenn man (D) die durch FL^p induzierte Topologie aufprägt. Diese Operation setzt sich durch Grenzübergang eindeutig in eine lineare stetige Operation auf FL^p fort. Das Hauptergebnis lautet: Die charakteristische Funktion f_P eines projektiven Polyeders P von R^n ist ein Multiplikator von FL^p . Dagegen ist die charakteristische Funktion f_B der Einheitskugel des R^n ($n \geq 2$) kein Multiplikator von FL^p für $p > 2n/(n-1)$ und $p < 2n/(n+1)$. Wenn $T \in FL^p$, so ist $f_P \cdot T$ die einzige Distribution, die zu FL^p gehört, gleich T im Innern von P ist und einen in P enthaltenen Träger hat.

G. Doetsch.

González Domínguez, Alberto: Distributionen und analytische Funktionen. Symposium problem. mat. Latino América, 19—21 Dic. 1951, 91—106 (1952) [Spanisch].

L. Schwartz hat gezeigt, daß durch seine „Theorie der Distributionen“ die Ableitungen der Diracschen Funktion eine exakte mathematische Bedeutung erhalten. Verf. weist nun dasselbe für eine große Anzahl von weiteren, in der quantistischen Elektrodynamik gebräuchlichen symbolischen Funktionen nach, so für das positive und negative Heisenbergsche Delta, das Sommerfeldsche Delta, die von Schönberg-Schwinger und Feynman eingeführten Funktionen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die Zerlegung einer Distribution S in ihre „analytischen Komponenten“ S^+ und S^- , die so definiert sind:

$$S^\pm = S * \delta^\pm = \frac{S}{2} \mp \frac{1}{2\pi i} \text{ V. P. } \frac{1}{x} * S,$$

wo der Stern $*$ die Faltung im Schwartzschen Sinn und δ^\pm die Heisenbergschen Delta bedeutet. Dieses Formeln übertragen die Plemeljischen Formeln für analytische Funktionen auf Distributionen.

G. Doetsch.

Vilenkin, N. Ja.: Zur Theorie der Fourierintegrale auf topologischen Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 233—244 (1952) [Russisch].

This paper extends to non-compact locally compact Abelian groups results obtained earlier for compact Abelian groups (this Zbl. 36, 356). Let G be a locally compact Abelian group, zero-dimensional in the sense that the component of the identity e is $\{e\}$, having a countable open basis, and having the property that every element of G generates a compact subgroup of G . Then the character group X of G again has all of the above properties. A complete ordering $<$ is introduced in G and X , in terms of a sequence $\{H_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ of compact subgroups of G such that

$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n = \{e\}$ and $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} H_n = G$. This ordering, based on an infinite number of choices,

is somewhat arbitrary and seems to have no natural connection with the structure of the group. For example, if $x \in G$ and $x \neq e$, then $x > e$. — The aim of the paper is to study the convergence of Fourier integrals on the groups G and X . An analogue of Dirichlet's kernel is defined, and a number of results, too complicated to state without reproducing most of the paper, are obtained regarding the inversion of Fourier transforms of functions in $\mathcal{L}_1(G)$. A new proof of the Weil-Plancherel theorem, adapted from the proof on the line using Hermite functions, is given for locally compact Abelian groups having compact component of e . The results in this paper are incomplete and rather complicated, but they are interesting in that they form a first step in the systematic extension of the theory of non-absolutely convergent trigonometric integrals to general locally compact Abelian groups.

E. Hewitt.

Loomis, L. H.: Note on a theorem of Mackey. Duke math. J. 19, 641—645 (1952).

Es sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe, die durch $\varrho \rightarrow U_\varrho$ stark stetig durch unitäre Operatoren eines Hilbertschen Raumes H dargestellt wird. Durch einen Booleschen σ -Homomorphismus $A \rightarrow P_A$ seien die Baireschen Teilmengen von G auf eine abelsche Familie von Projektionen auf H so abgebildet, daß $U_\varrho P_A = P_{\varrho A} U_\varrho$ für alle ϱ, A gilt. Ist H irreduzibel unter $\{U_\varrho\}$ und $\{P_A\}$ zusammen, so gibt es eine eindeutig bestimmte unitäre Abbildung von H auf $L^2(G)$, bei der U_ϱ die Linkstransformation mit ϱ und P_A die Multiplikation mit der charakteristischen Funktion φ_A von A entspricht. Ist H nicht irreduzibel, so ist H die direkte Summe solcher $L^2(G)$. Dieser Satz wurde von G. Mackey (dies. Zbl. 36, 77) unter der zusätzlichen Voraussetzung der Separabilität von H bewiesen. Verf. gibt einen neuen direkten und wesentlich einfacheren Beweis, der ohne die Separabilität auskommt.

G. Köthe.

Michael, Ernest A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. math. Soc. Nr. 11, 79 S. (1952).

Eine lokalkonvexe Algebra A ist ein lokalkonvexer Raum, der zugleich eine Algebra über dem Körper K der komplexen Zahlen ist, so daß die Multiplikation in jeder Variablen stetig ist. Gibt es eine Nullumgebungsbasis $\{U_i\}$ mit $U_i^2 \subset U_i$, U_i konvex, so heißt A eine lokal-m-konvexe (l. m. k.) Algebra. Dann ist die Multiplikation in beiden Variablen gleichzeitig stetig. Jede normierte Algebra ist l. m. k. Ist A l. m. k. und Divisionsalgebra, so ist A isomorph K in Verallgemeinerung eines Satzes über normierte Algebren. Jede l. m. k. Algebra ist isomorph einer Subalgebra eines topologischen Produktes von normierten Algebren. Ist $U_i^2 \subset U_i$, U_i konvex, eine Nullumgebung, $p_i(x)$ die zu U_i gehörige Halbnorm, N_i die Menge aller x mit $p_i(x) = 0$, so ist N_i ein Ideal in A und $A_i = A/N_i$ eine durch p_i normierte Algebra; A_i sei die vollständige Hülle von A_i , also eine Banachalgebra. Ist A vollständig, so ist A der projektive Limes $L_p(A_i)$ der A_i bezüglich der kanonischen Abbildungen $\pi_i(A) = A_i$ von A in A_i . Aus dieser Darstellung als projektiver Limes ergibt sich eine Reihe von Sätzen über die Spektren der Elemente eines vollständigen A . Ein $x \in A$ ist dann und nur dann quasiregulär bzw. invertierbar, wenn jedes x_i in A_i diese Eigenschaften hat. A' sei der konjugierte Raum zu A , $\mathfrak{M}(A) \subset A'$ sei die Menge aller stetigen linearen multiplikativen Funktionalen auf A , versehen mit der schwachen Topologie. Ein x in der kommutativen vollständigen l. m. k. Algebra A ist dann und nur dann quasiregulär, wenn $f(x) \neq -1$ für alle $f \in \mathfrak{M}(A)$ gilt, das Radikal $\mathfrak{R}(A)$ ist die Menge aller x mit $f(x) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{M}(A)$. Im nichtkommutativen Fall gilt $\mathfrak{R}(A) \subset C\mathfrak{R}(A)$, wobei letzteres den Durchschnitt aller regulären, abgeschlossenen, maximalen Rechtsideale von A bedeutet, wenn A vollständig ist. Ist A überdies kommutativ, so haben wir $\mathfrak{R}(A) = C\mathfrak{R}(A)$. Die Eigenschaften von $\mathfrak{M}(A)$ werden genauer untersucht. In Verallgemeinerung des bekannten Resultats für normierte Algebren gilt der Darstellungssatz: A sei l. m. k., kommutativ, halbeinfach und vollständig. Dann ist A algebraisch isomorph einer separierenden Teilalgebra \tilde{A} der Algebra $C_0(\mathfrak{M}(A))$ der auf $\mathfrak{M}(A)$ stetigen, in 0 verschwindenden Funktionen. A heißt voll, wenn $\tilde{A} = C_0(\mathfrak{M}(A))$ ist. A ist voll, wenn die A_i es sind für eine geeignete Nullumgebungsbasis; A ist dann eine symmetrische *-Algebra, und die Topologie von A ist dann die der gleichmäßigen Konvergenz auf den gleichstetigen Teilmengen von $\mathfrak{M}(A)$. Im nichtkommutativen Fall wird eine Reihe von Voraussetzungen angegeben, aus denen folgt, daß $\mathfrak{R}(A)$ der Durchschnitt aller regulären, abgeschlossenen, maximalen Rechtsideale ist und ein Element x quasiregulär ist, wenn $-x$ keine Einheit modulo irgendeines abgeschlossenen regulären, maximalen einseitigen Ideals ist. Zwei Sätze von Gelfand (dies. Zbl. 24, 320, Satz 18 und 20 der Arbeit) werden auf l. m. k. Algebren übertragen. Die aus der Theorie der normierten Ringe bekannten Sätze über topologische Nullteiler lassen sich bei geeigneter Abänderung der Definition übertragen. Es wird ferner untersucht, wann jedes multiplikative lineare Funktional auf A immer stetig ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn A eine kommutative F -Algebra (d. h. eine vollständige und metrisierbare l. m. k. Algebra) und gleichzeitig eine symmetrische *-Algebra ist. Aber auch die Algebra der analytischen Funktionen in einem offenen Gebiet der komplexen Ebene ist ein Beispiel dafür. Ist A eine kommutative F -Algebra, so sind die Aussagen äquivalent, daß $\mathfrak{M}(A)$ kompakt ist, daß jedes Element von A ein beschränktes Spektrum besitzt und daß A eine Q -Algebra ist, d. h. daß die Menge der quasiregulären Elemente von A offen in A ist. Auf einer halbeinfachen kommutativen und symmetrischen Algebra A gibt es höchstens eine Topologie, die A zu einer F -Algebra macht. Der letzte Abschnitt studiert LF -Algebren, das sind LF -Räume $A = \bigcup_{n=1} A_n$ im Sinne von Dieudonné

und Schwartz, bei denen jedes A_n eine F -Algebra und zweiseitiges Ideal in A_{n+1} ist. Der Raum D von Schwartz ist eine (LF) - und Q -Algebra. Im Anhang werden Sätze der topologischen Algebra entwickelt, die bei den Beweisen des Hauptteils benötigt werden. *G. Köthe.*

Dixmier, J.: Algèbres quasi-unitaires. Commentarii math. Helvet. **26**, 275–322 (1952).

In Verallgemeinerung der unitären Algebren werden quasiunitäre Algebren A betrachtet. Das sind assoziative Algebren über dem Körper der komplexen Zahlen, die bezüglich eines skalaren Produkts $\langle x, y \rangle$ einen prähilbertschen Raum bilden, in denen ferner ein Automorphismus $x \rightarrow x^*$ und ein involutorischer Antiautomorphismus $x \rightarrow x^s$ erklärt sind, so daß für alle $x, y, z \in A$ gilt: 1. $\langle x, x^j \rangle \geq 0$; 2. $\langle x, x \rangle = \langle x^s, x^s \rangle$; 3. $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^{sj} z \rangle$; 4. $y \rightarrow xy$ ist stetig; 5. die Elemente $xy + (xy)^j$ sind überall dicht in A . Vervollständigt man A zu einem Hilbertschen Raum H , so setzen sich die Abbildungen $x \rightarrow x^j, x \rightarrow x^s, y \rightarrow xy, y \rightarrow yx$ fort zu Operatoren J, S, U_x, V_x in H . Es ist J selbstadjungiert, die anderen sind beschränkt. Die U_x bzw. V_x erzeugen schwach abgeschlossene $*$ -Algebren R^j bzw. R^s , die 1 enthalten. Durch $T \rightarrow S T S$ geht R^j in R^d über. In Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Godement gilt der Vertauschungssatz $R^j = (R^d)'$, $R^d = (R^j)'$, $R = R^j \cap R^d$ ist das gemeinsame Zentrum von R^j und R^d . Besteht R nur aus den skalaren Operatoren, so heißt A irreduzibel. Der Operator J ist stets mit den Elementen von R vertauschbar, daraus ergibt sich, wenn in R die Projektionen E_1, E_2 zweier orthogonalkomplementärer Teilräume H_1, H_2 von H liegen, daß A in zwei quasiunitäre Algebren $E_1(A)$ und $E_2(A)$ zerfällt. Die quasiunitären Algebren endlicher Dimension lassen sich vollkommen übersehen: Sei A eine $*$ -Algebra von Operatoren eines endlichdimensionalen Hilbertschen Raumes, die 1 enthält; es sei Tr eine treue Spur auf A , $a \in A$ ein selbstadjungierter positiver, invertierbarer Operator. Setzt man für $x, y \in A$ $\langle x, y \rangle = \text{Tr}(x a y^* a)$ und $J x = a^{-1} x a$, so erhält man eine quasiunitäre Algebra und bis auf Isomorphie alle endlichdimensionalen. Es bezeichne P^j (P^d) die Menge der mit J vertauschbaren Operatoren von R^j (R^d), Q^j (Q^d) die Menge der Operatoren aus R^j (R^d), die mit allen Operatoren aus P^j (P^d) vertauschbar sind. Im endlichdimensionalen Fall gibt es stets positive selbstadjungierte Operatoren $M \in R^d$, $M' \in R^j$ mit $M' = SMS$ und $J = M^{-1} M'$. Setzt man im allgemeinen Fall die Existenz positiver selbstadjungierter invertierbarer M, M' voraus, die im weiteren Sinn (sie brauchen ja nicht beschränkt zu sein) zu R^d bzw. R^j gehören, so daß $M' = SMS$ gilt und J die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $M' M^{-1}$ ist, so haben R^d und R^j keine rein unendlichen Komponenten (vgl. Dixmier, dies. Zbl. **43**, 327), und es gehören M und M' im weiteren Sinn zu Q^d bzw. Q^j , und es gilt $Q^j \subset P^j$, $Q^d \subset P^d$. Haben umgekehrt R^j und R^d keine rein unendlichen Komponenten und gilt $Q^j \subset P^j$, $Q^d \subset P^d$, so gibt es M und M' mit den obigen Eigenschaften. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß R^j und R^d von endlicher Klasse sind. Jede quasiunitäre Algebra läßt sich eindeutig in eine vollständige einbetten. Unter gewissen einfachen Zusatzbedingungen, vor allem der Separabilität von H , gilt der Hauptsatz, daß sich jede vollständige quasiunitäre Algebra als eine direkte stetige Summe irreduzibler Algebren darstellen läßt mit Hilfe eines Maßes auf dem Spektrum von R . — Diese Ergebnisse werden angewendet auf die folgende Klasse von Beispielen: E sei ein lokalkompakter Raum, G eine lokalkompakte Gruppe von Homöomorphismen $x \rightarrow x\alpha$ von E . L sei die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen $f(x, \alpha)$ auf $E \times G$ mit kompaktem Träger. Durch $f * g(x, \alpha) = \int f(x\beta, \alpha\beta) g(x, \beta^{-1}) d\beta$ wird L eine Algebra ($d\beta$ das linksinvariante Haarsche Maß auf G). Es sei $\chi(\alpha)$ positiv und stetig auf G , und es gelte $\chi(\alpha\beta) = \chi(\alpha)\chi(\beta)$, ferner sei μ ein Radonsches Maß auf E mit dem Träger E , und es gebe eine stetige Funktion $\varrho(x, \alpha) > 0$, so daß $d\mu(x\alpha) = \varrho(x, \alpha) d\mu(x)$ gilt; durch

$$\langle f, g \rangle = \iint f(x, \alpha) \bar{g}(x, \alpha) \chi(\alpha) d\alpha d\mu(x)$$

wird L ein prähilbertscher Raum. Eine stetige Funktion $\nu(x, \alpha) > 0$ auf $E \times G$ heißt ein Multiplikator, wenn stets $\nu(x, \beta\alpha) = \nu(x, \beta)\nu(x, \alpha)$ gilt. Setzt man schließlich $f^j(x, \alpha) = \chi_2(x, \alpha^{-1}) f(x, \alpha)$ und $f^s(x, \alpha) = \chi_1(x, \alpha^{-1}) f(x, \alpha^{-1})$, so wird L eine quasiunitäre Algebra, wenn χ_1 und χ_2 Multiplikatoren sind, die die Beziehungen $\chi_1^2 = \chi^2 \Delta \varrho$ und $\chi_2^2 = \Delta \varrho^{-1}$ erfüllen, wobei $\Delta(\alpha)$ durch $d(\beta\alpha) = \Delta(\alpha) d\beta$ erklärt ist. Ist G eine freie Gruppe, d. h. ist die Abbildung $\alpha \rightarrow x\alpha$ von G in E eineindeutig für jedes x außerhalb einer lokal zu vernachlässigenden Menge N , so sind R^j und R^d Faktoren dann und nur dann, wenn G ergodisch ist (d. h. gilt $F\alpha = F$ bis auf eine lokal zu vernachlässigende Menge für jedes $\alpha \in G$, so ist die als meßbar vorausgesetzte Menge F selbst oder ihr Komplement lokal zu vernachlässigen). G heißt meßbar, wenn eine μ -meßbare Funktion φ auf E existiert mit $0 < \varphi(x) < \infty$ und $\varphi(x\alpha)\varphi(x)^{-1} = \Delta(\alpha)\varrho(x, \alpha)^{-1}$ lokal fast überall für jedes $\alpha \in G$. Ist G frei, nicht meßbar und ergodisch, so sind R^j und R^d rein unendliche Faktoren. Ist G meßbar, so sind R^j und R^d ohne rein unendliche Komponenten. Ist G überdies frei, so sind R^j und R^d Faktoren der Klasse I oder II. Ist G frei, meßbar, ergodisch und nicht diskret, so sind R^j und R^d Faktoren der Klasse I_∞ oder II_∞ . Diese Beispiele von Faktoren umfassen die von J. von Neumann (dies. Zbl. **23**, 133) angegebenen. *G. Köthe.*

Kaplansky, Irving: Algebras of type I. Ann. of Math., II. Ser. 56, 460—472 (1952).

L'A. étudie les AW^* -algèbres (ce Zbl. 42, 124) de type I. Une telle algèbre est dite \aleph -homogène si 1 est la borne supérieure de \aleph projecteurs orthogonaux abéliens équivalents (l'unicité du cardinal \aleph est une question ouverte; elle est résolue positivement si toute famille de projecteurs orthogonaux non nuls du centre est dénombrable). Toute AW^* -algèbre de type I est une „somme directe“ (non algébrique!) d'algèbres homogènes. Deux \aleph -homogènes AW^* -algèbres sont isomorphes si et seulement si leurs centres sont isomorphes (et l'A. précise un isomorphisme). Une AW^* -algèbre de type I est une W^* -algèbre si et seulement si son centre est une W^* -algèbre. Un $*$ -automorphisme d'une AW^* -algèbre de type I laissant fixes les éléments du centre est intérieur (et défini par un élément unitaire). Le fait qu'il s'agit d' AW^* -algèbres (et non de W^* -algèbres) est la source de difficultés, et amène l'A. à démontrer de nombreux emmes, valables pour toute AW^* -algèbre.

J. Dixmier.

Buck, R. Creighton: Operator algebras and dual spaces. Proc. Amer. math. Soc. 3, 681—687 (1952).

Soient G un groupe topologique d'élément neutre 0, $C^*(G)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur G à valeurs complexes, $x \rightarrow U_x$ la représentation régulière gauche de G dans $C^*(G)$, X un sous-espace de $C^*(G)$ invariant par les U_x , U'_x la restriction de U_x à X , τ une topologie localement convexe sur X , $B^0(X)$ l'algèbre des endomorphismes de X qui commutent aux U'_x , sont τ -bornés et τ -continus sur les ensembles τ -bornés, $L(X)$ l'ensemble des formes linéaires sur X qui sont continues sur les ensembles τ -bornés. Pour tout $T \in B^0(X)$, soit F la forme linéaire sur X définie par $F(\varphi) = T(\varphi)(0)$. Si $T \rightarrow F$ est un isomorphisme de $B^0(X)$ sur $L(X)$, $L(X)$ se trouve muni d'une structure d'algèbre, le produit étant du type „produit de composition“. L'A. donne des cas où il en est ainsi. Exemples: X = espace des fonctions continues bornées, τ = topologie de la convergence compacte; G = groupe additif des réels, X = espace des fonctions indéfiniment différentiables, τ = topologie de Schwartz.

J. Dixmier.

Kadison, Richard V.: A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. Ann. of Math., II. Ser. 56, 494—503 (1952).

Soient \mathfrak{A} et \mathfrak{A}' deux C^* -algèbres, φ une application linéaire positive de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A}' telle que $\|\varphi\| \leq 1$. Alors, $\varphi(A^2) \geq \varphi(A)^2$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$ self-adjoint. Cette inégalité de Schwarz non commutative donne divers corollaires. Exemple: soit φ un isomorphisme de l'espace vectoriel ordonné \mathfrak{A} sur l'espace vectoriel ordonné \mathfrak{A}' tel que $\varphi(1) = 1$; alors, φ est un isomorphisme de $*$ -algèbres. Autre résultat: si θ est une application linéaire de \mathfrak{A} dans \mathfrak{A}' telle que $\theta(1) = 1$ et $\theta(|A|) = |\theta(A)|$ pour $A \in \mathfrak{A}$ self-adjoint, alors θ est un $*$ -homomorphisme. Les extensions au cas où les C^* -algèbres n'ont pas d'élément unité sont données.

J. Dixmier.

Dixmier, J.: Remarques sur les applications \natural . Arch. der Math. 3, 290—297 (1952).

Die Note schließt an eine frühere Arbeit des Verf. an (dies. Zbl. 46, 335). M sei ein die 1 enthaltender Operatorenring im Hilbertraum H , \mathfrak{m} ein Ideal in M , φ eine auf \mathfrak{m} definierte normale \natural -Abbildung. Es wird bewiesen, daß für $A \in \mathfrak{m}$ und beliebiges $B \in M$ die Abbildung $B \rightarrow \varphi(AB)$ stark und schwach stetig auf den beschränkten Teilmengen von M ist. Dasselbe gilt, wenn φ eine normale Spur auf \mathfrak{m} ist. Ferner gilt in beiden Fällen $\varphi(A) = \sum_{\alpha} \varphi(P_{m_{\alpha}} A P_{m_{\alpha}})$, wenn die \mathfrak{M}_{α} ein H aufspannendes Orthogonalsystem von Teilräumen bilden, deren Projektionen $P_{m_{\alpha}}$ zu M gehören. Die Menge der selbstadjungierten Operatoren ≥ 0 eines Ideals \mathfrak{m} wird als der positive Teil \mathfrak{m}^+ von \mathfrak{m} bezeichnet. Ist $\alpha > 0$ beliebig reell, so bilden die A^{α} , $A \in \mathfrak{m}^+$, den positiven Teil eines Ideals \mathfrak{m}^{α} aus M . Es gilt $(\mathfrak{m}^{\alpha})^{\beta} = \mathfrak{m}^{\alpha\beta}$, $(\mathfrak{m}^{\alpha})(\mathfrak{m}^{\beta}) = \mathfrak{m}^{\alpha+\beta}$ und für ganzes n ist \mathfrak{m}^n die übliche n -te Potenz von \mathfrak{m} . Sei wieder φ eine normale \natural -Abbildung oder Spur auf \mathfrak{m} und sei $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 0$. Ist dann für $A, B \in M$ $(A^* A)^{p/2} \in \mathfrak{m}$ und $(B^* B)^{q/2} \in \mathfrak{m}$, so ist $AB \in \mathfrak{m}$, $BA \in \mathfrak{m}$ und $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

G. Köthe.

Sunouchi, Haruo: On rings of operators of infinite classes. II. Proc. Japan Acad. 28, 330—335 (1952).

(Pour la 1^{ère} Pte. v. ce Zbl. 46, 119.) Construction d'une application^h dans un anneau d'opérateurs. Les résultats ont été obtenus aussi par le rapporteur (ce Zbl. 46, 335).
J. Dixmier.

Arens, Richard: A generalization of normed rings. Pacific J. Math. 2, 455—471 (1952).

Soit A une algèbre à élément unité sur le corps complexe, munie d'une famille \mathfrak{B} de semi-normes \mathfrak{B} [satisfaisant à $V(xy) \leq V(x)V(y)$] qui définit sur A une topologie localement convexe séparée. Si z est un élément régulier à gauche, limite d'éléments x réguliers à droite, z a un inverse $y = \lim_{x \rightarrow z} x'$, x' étant un inverse à droite arbitraire de x ; de plus, on a un analogue (beaucoup plus faible) de la série de Neumann. Pour $V \in \mathfrak{B}$, soient Z_V l'idéal d'équation $V(x) = 0$, et B_V le complété de A/Z_V , muni de la norme déduite de V par passage au quotient. Tout idéal (à gauche, bilatère) maximal non dense est fermé et contient un idéal Z_V . Si A est complet, $x \in A$ a un inverse à droite unique si et seulement si son image dans tout B_V a un inverse à droite unique dans B_V . La généralisation du „structure space“ de Jacobson est étudiée. Enfin, on caractérise l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace localement compact et paracompact munie de la topologie de la convergence compacte comme une algèbre commutative complète du type précédent, munie d'une involution $x \rightarrow x^*$ telle que $V(xx^*) \geq k_V V(x)V(x^*)$, et possédant une „partition localement finie de l'unité“ (i. e., pour tout $V \in \mathfrak{B}$, il existe un $u_V \in A$ tel que les u_V vérifient les propriétés des partitions localement finies de l'unité concrètes). Le cas où il n'y a pas d'élément unité, et le cas où il s'agit d'anneaux et non d'algèbres, sont aussi envisagés.
J. Dixmier.

Halperin, Israel: The supremum of a family of additive functions. Canadian J. Math. 4, 463—479 (1952).

L'A. généralise le théorème de Hahn-Banach: au lieu d'espace vectoriel réel il s'agit d'un semi-groupe commutatif G avec des opérateurs (qui sont des nombres réels). Il en déduit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction numérique sur G puisse être considérée comme l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions additives. Etant donné un ensemble S dans lequel une loi de composition est partiellement définie, le même problème est résolu pour les fonctions numériques sur S : on définit une application canonique de S dans un semi-groupe additif G ; les conditions trouvées font intervenir G , mais peuvent être exprimées plus directement dans S si S est une lattice modulaire relativement complétée avec élément 0 dans laquelle la perspectivité est transitive. Les résultats précis sont trop compliqués pour être énoncés ici.
J. Dixmier.

● **Silverman, Robert Jerome:** Invariant extensions of linear operators. Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 2 p.

Generalizations of the Hahn-Banach theorem on the extension of linear functions are proved. The restriction that the range space is the real numbers is removed and the conditions that the extension is fixed with respect to certain semigroups of operators is imposed. Another problem considered which is very closely related to the above is the existence of monotone distributive functions which are invariant with respect to semigroups of operators. (Autoreferat.)

Mimura, Yukio: On a theorem of O. Toeplitz. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo 2, 9—11 (1952).

Es sei A ein abgeschlossener linearer Operator mit dichtem Definitionsbereich in Hilbertschen Raum. Dann und nur dann besitzt A eine beschränkte rechte Inverse, wenn es ein $m > 0$ gibt, so daß $\|A^* f\| > m \|f\|$ für alle f im Definitionsbereich des adjungierten Operators A^* gilt.
G. Köthe.

Wermer, John: The existence of invariant subspaces. Duke math. J. 19, 615—622 (1952).

Let B be a complex Banach space and T a bounded linear operator on B , with bounded inverse. It is known that B has a proper closed sub-space invariant under T if the sequence $\|T^n\|$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, is bounded. The author shows that such a sub-space exists if the spectrum of T consists of a single point and $\|T^n\| = O(|n|^k)$, or if the spectrum has more than one point and $\|T^n\| \leq d_n$ for all n , where

$d_{-n} = d_n \geq d_{n-1} \geq 1$ ($n > 0$), $\sum_0^\infty (\log d_n)/(1+n^2) < \infty$, and $(\log d_n)/n$ decreases as n increases. These conditions ensure that the spectrum of T lies on the unit circle I , and an invariant sub-space is determined by any closed set $A \subseteq I$ as the set of all $\varphi \in B$ for which $A_\varphi \subseteq A$, where, for each $\varphi \in B$, A_φ consists of all points $p \in I$ such that, for some continuous linear functional F , the functions defined by $F[(\lambda I - T)^{-1}\varphi]$ inside and outside I do not continue each other analytically across any arc containing p .

J. D. Weston.

Sz-Nagy, Béla: On the stability of the index of unbounded linear transformations. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 49—51 und russische Zusammenfassg. 52 (1952).

F. V. Atkinson (dies. Zbl. 42, 120) bewies zwei Sätze über verallgemeinerte Fredholmsche Operatoren, d. h. lineare beschränkte Abbildungen A eines Banachraumes E in einen Banachraum E' , deren Nullraum eine endliche Dimension $\alpha(A)$ und deren Bildraum $\mathfrak{R}(A)$ in E' endlichen Defekt $\beta(A)$ hat. Es gibt dann zu A ein $\varrho > 0$, so daß für alle beschränkten B , mit $\|B\| \leq \varrho$ die E in E' abbilden, auch $A + B$ ein verallgemeinerter Fredholmscher Operator ist und $\alpha(A + B) - \beta(A + B) = \alpha(A) - \beta(A)$ gilt. Dasselbe gilt für jeden vollstetigen Operator. Diese beiden Sätze wurden von M. Krein und M. Krasnoselskij [Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 219—224 (1952)] unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen auf unbeschränkte Operatoren A übertragen. Verf. gibt einen sehr einfachen Beweis für diese Verallgemeinerung ohne Einschränkungen durch Einführung der neuen Metrik $\|f\| = \|f\| + \|Af\|$ in E .

G. Köthe.

Krasnosel'skij, M. A.: Die Zerlegung von Operatoren, die aus dem Raume L^q in den Raum L^p operieren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 333—336 (1952) [Russisch].

Let G be a measurable set (presumably in some Euclidean space) of positive finite or infinite measure. Let p_0 be a fixed number such that $1 < p_0 \leq 2$. Let $r' = r/(r-1)$ for all numbers $r > 1$. Let A be an additive and homogeneous operator defined on the function space $\bigcup_{p_0 \leq p \leq 2} L_p$ (presumably complex L_p 's are meant).

Suppose that A enjoys the following properties: α) $A(L_p) \subset L_{p'}$ for $p_0 \leq p \leq 2$; β) A is continuous on L_p , $p_0 \leq p \leq 2$; γ) on L_2 , A is Hermitian and positive-definite. Then the operator $A^{1/2}$ on L_2 into L_2 actually carries L_2 into $L_2 \cap L_q$, for every q such that $2 < q < p'_0$. Furthermore, A can be written as HH^* , where $H = A^{1/2}$, carrying L_2 into L_q , and H^* is the adjoint of H , carrying L_p into L_2 . If A is completely continuous on L_2 into L_2 , then H and H^* are completely continuous as well. E. Hewitt.

Dunford, Nelson: Spectral theory. II. Resolutions of the identity. Pacific J. Math. 2, 559—614 (1952).

Vgl. Teil I [Trans. Amer. math. Soc. 54, 185—217 (1943)]. X sei im folgenden ein Banachraum, T ein beschränkter Operator, der X in sich abbildet, $T(\xi) = (\xi - T)^{-1}$ die Resolvente von T , die auf der Resolventenmenge $\varrho(T)$ ein beschränkter Operator ist. Das Komplement von $\varrho(T)$ in der komplexen Ebene ist das Spektrum $\sigma(T)$ von T . Als eine Zerlegung der Identität für T wird eine Familie E_σ von Projektionen von X bezeichnet, die für alle Borelmengen σ der komplexen Ebene erklärt sind, so daß stets $E_\sigma E_\delta = E_{\sigma \cap \delta}$, $E_{\sigma'} = I - E_\sigma$ (σ' das Komplement von σ) gilt, $x^* E_\sigma x$ abzählbar additiv für jedes $x \in X$, $x^* \in X^*$ ist, stets $T E_\sigma = E_\sigma T$ gilt und das Spektrum des auf $E_\sigma X$ eingeschränkten Operators T in der abgeschlossenen Hülle σ von σ enthalten ist. Besitzt T eine solche Zerlegung der Identität (sie ist eindeutig bestimmt), so heißt T ein Spektraloperator. Ist T ein Spektraloperator und $f(\lambda)$ eine auf $\sigma(T)$ eindeutige analytische Funktion, so wird durch $f(T) = \sum_{n=0}^\infty \int_{\sigma(T)} \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!} (T - \lambda)^n dE_\lambda$ ein beschränkter Operator erklärt, wobei Integral und Reihe im

Sinn der uniformen Topologie der Operatoren konvergieren. Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich mit der Ableitung von Kriterien dafür, daß T ein Spektraloperator ist. Es wird im folgenden stets die Voraussetzung gemacht, daß das Spektrum $\sigma(T)$ auf einer rektifizierbaren geschlossenen

Jordankurve Γ_0 liegt. Es wird Γ_0 eingebettet in eine für $-\delta_0 \leq \delta \leq \delta_0$ erklärte Schar Γ_δ von ebensolchen Kurven, die durch $\xi = \xi(\lambda, \delta)$, $-1 \leq \lambda \leq 1$, gegeben sind; für $\delta_1 < \delta_2$ liege Γ_{δ_1} innerhalb Γ_{δ_2} , und $|\delta|$ sei die längs des Bogens $\xi(\lambda, \delta)$ von $\xi(\lambda, 0)$ nach $\xi(\lambda, \delta)$ gemessene Entfernung. Es wird dann als wesentliche Voraussetzung über das Verhalten von $T(\xi)$ verlangt, daß eine nichtnegative ganzzahlige Funktion $\nu(\lambda)$ existiert, so daß für die $\xi = \xi(\lambda, \delta)$ in der Nähe des Spektrums gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} |\delta^{\nu(\lambda)} T(\xi)| < \infty$ für $-1 \leq \lambda \leq 1$. Ist X schwach vollständig,

so ist T unter diesen Voraussetzungen ein Spektraloperator, wenn noch die beiden weiteren Bedingungen erfüllt sind: (I) Für jedes ξ einer in Γ_0 dichten Menge ist die Menge $M_\xi + N_\xi$ dicht in X [M_ξ bedeutet den Nullraum, N_ξ den Bildraum von $(T - \xi)^{\nu(\lambda)}$]; (II) Ist $\sigma(x)$ die Menge der Singularitäten der Funktion $x(\xi) = (\xi - T)^{-1}x$ und ist σ offen und abgeschlossen in $\sigma(x)$, so heißt $x_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_C x(\xi) d\xi$ das σ -Residuum von $x(\xi)$ [C umschließt σ , $\sigma(x) \cap \sigma'$ liegt außerhalb C].

Es wird dann verlangt, daß ein K existiert mit $|x_\sigma| \leq K|x|$ für alle $x \in X$ und $\sigma \in \sigma(x)$. — Die Bedingung (I) ist erfüllt, wenn X reflexiv ist und $\nu(\lambda) = 1$ genommen werden kann, auch dann, wenn jeder Teilbogen positiver Länge von Γ_0 entweder Punkte aus dem kontinuierlichen Spektrum oder aus der Resolventenmenge enthält. Schließlich ist (I) erfüllt, wenn T vollstetig ist. Wird die Bedingung der Existenz einer Funktion $\nu(\lambda)$ ersetzt durch die stärkere Bedingung, daß $d^m(\xi) T(\xi)$ in der Nähe von $\sigma(T)$ beschränkt bleibt [$d(\xi)$ die Entfernung von ξ von $\sigma(T)$], wird weiter zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $\xi(\lambda, \delta)$ vorausgesetzt, so folgt aus (I) und (II), daß in der obigen Formel für $f(T)$ die Summanden mit $n \geq m$ alle gleich Null werden.

G. Köthe.

Atkinson, F. V.: A spectral problem for completely continuous operators. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 53–60 und russische Zusammenfassg. 60 (1952).

Es seien V_1, \dots, V_n vollstetige Operatoren eines Banachraumes. Es wird die Gleichung $f + \sum_{r=1}^n \lambda^r V_r f = g$ untersucht, und es wird bewiesen, daß die sogenannte Alternative gilt (dies ist trivial), und daß die Menge der λ , für die die homogene Gleichung lösbar ist, keinen Häufungspunkt im Endlichen hat. Für diesen Satz läßt sich die für $n = 1$ von F. Riesz stammende Methode nicht verwenden. Die Methode des Verf. beruht auf dem genauen Studium der Funktion $k(\lambda) = \alpha(T(\lambda_0)) - \alpha(T(\lambda))$, wobei $T(\lambda) = I + \sum_{r=1}^n \lambda^r V_r$ ist, $\alpha(T)$ die Dimension des Nullraumes von T . Es wird bewiesen, daß $k(\lambda)$ in einer ganzen Umgebung von λ_0 bis auf λ_0 konstant ist.

G. Köthe.

Sz. Nagy, Béla: On a spectral problem of Atkinson. Acta math. Acad. Sci. Hungar. 3, 61–66 und russische Zusammenfassg. 66 (1952).

Für den in der vorstehend besprochenen Note von F. Atkinson bewiesenen Satz, daß die Menge der λ , für die $T(\lambda)f = 0$ lösbar ist, diskret ist, wird ein anderer Beweis gegeben, der auf folgendem Hilfssatz beruht: S_0 sei ein vollstetiger, S_n beschränkte Operatoren eines Banachraumes mit $\|S_n\| \leq a^n$, $n = 1, 2, \dots$. Dann gibt es zu jedem komplexen $\mu \neq 0$ eine Umgebung, so daß für alle genügend kleinen komplexen ε das Spektrum von $S(\varepsilon) = S_0 + \dots + \varepsilon^n S_n + \dots$ in der Umgebung von μ aus den charakteristischen Wurzeln einer endlichen quadratischen Matrix $(c_{ik}(\varepsilon))$ besteht; die $c_{ik}(\varepsilon)$ sind reguläre Funktionen von ε . G. Köthe.

Gol'dman, M. A. und S. N. Kračkovskij: Über die Nullelemente eines linearen Operators in seinem Fredholmschen Gebiet. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 15–17 (1952) [Russisch].

Les AA. étudient le „domaine de Fredholm“ Φ_A , d'un opérateur A du point de vue de ses éléments nulfiques („Nullelemente“ de F. Riesz). Par „domaine de Fredholm“ de l'opérateur A on entend, selon S. M. Nicolski, l'ensemble des λ tels que $I - \lambda A = U + V$ où V est complètement continu et U un opérateur inversible. On démontre que la condition $UV = VU$ est nécessaire et suffisante pour que les éléments nulfiques correspondant à $\lambda \in \Phi_A$ constituent un espace à un nombre fini de dimensions. Le résultat final est le suivant: si la composante G

de Φ_A contient un point λ ayant cette dernière propriété, elle est formée alors entièrement de tels points. Les points λ de G sont ou des valeurs propres isolées de A , ou des valeurs régulières. *G. Marinescu.*

Schönberg, Mario: Sur la méthode d'itération de Wiarda et Bückner pour la résolution de l'équation de Fredholm. II. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 154—167 (1952).

[Teil I *ibid.* 37, 1141—1156 (1951).] Im zweiten Teil wird der Zusammenhang, der zwischen der Neumann-Liouvilleschen Iteration und der gleichnamigen Reihe besteht, verallgemeinert. Die Entwicklung von $(1 - \lambda \mathfrak{K})^{-1}$ nach gewissen Polynomen von \mathfrak{K} tritt dem obigen Iterationsverfahren an die Seite. Darüber hinaus wird unter Vermittlung einer Potenzreihe $R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \lambda^n \cdot z^n$, die für $|z| \leq \|\mathfrak{K}\|$ konvergiert und an keiner Stelle des Spektrums von \mathfrak{K} verschwindet, aus der gegebenen Gleichung die neue $y = R(\mathfrak{K}) f + Q(\mathfrak{K}) y$ mit $Q(\mathfrak{K}) = 1 - R(\mathfrak{K}) (1 - \lambda \mathfrak{K})^{-1}$ abgeleitet. Die zugehörige Neumann-Liouvillesche Reihe definiert dann ein allgemeineres Iterationsverfahren. Konvergenzbetrachtungen und Fehlerabschätzungen beenden die Arbeit. Die Transformation auf die neue Gleichung läßt sich, wie der Verf. bemerkt, der Schmidtschen Methode zur Behandlung von Integralgleichungen unterordnen. *H. Bückner.*

Anastassiadis, Jean: Fonctions semi-monotones et semi-convexes et solutions d'une équation fonctionnelle. Bull. Sci. math., II. Sér. 76, 148—160 (1952).

Ist ω eine feste positive Zahl, so heißt die Funktion $g|J(\omega)$ -fallend bzw. (ω) -konvex, wenn $g(x + \omega) \leq g(x)$ bzw. $g(x + \omega) \leq \frac{1}{2}(g(x) + g(x + 2\omega))$, sofern x , $x + \omega$, bzw. auch noch $x + 2\omega$ dem Definitionsintervall J angehören. Es wird bewiesen: Die (1)-fallenden oder (1)-konvexen positiven Lösungen $g|\{x: x > 0\}$ der Funktionalgleichung $g(x + 1) = \frac{1}{x g(x)}$ sind mit $G(x) = \frac{\Gamma(x/2)}{\sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2} \cdot (x+1))}$ identisch.

In analoger Weise wird die Funktionalgleichung $f(x + 1) = 1/P(x) f(x)$ behandelt, worin $P(x) = (x + \varrho_1) \cdots (x + \varrho_k)$ und $\varrho_1, \dots, \varrho_k > 0$ sind. *G. Aumann.*

Pastidès, M. Nicolas: Sur les équations fonctionnelles du type de Poincaré. Compositio math. 10, 168—212 (1952).

L'A. étudie les équations fonctionnelles en φ_i :

$$R_i[\varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)] = \varphi_i(s_i u_1, \dots, s_n u_n)$$

dans les chapitres I, II et III et

$$R_i[\varphi_1(u_1, \dots, u_n), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_n)] = \varphi_i[Q_1(u_1, \dots, u_n), \dots, Q_n(u_1, \dots, u_n)]$$

dans le chapitre IV; où i représente $1, 2, \dots, n$, les fonctions R_i et Q_i sont supposées nulles à l'origine et les s_i sont les valeurs caractéristiques de la matrice formée des coefficients des termes du premier degré dans les développements de R_i . — Dans le chapitre I, l'existence d'une solution analytique a été établie, en supposant l'existence d'un nombre positif ϱ tel que l'on ait $|s_i - s_i^{\mu_1} \cdots s_i^{\mu_n}| > \varrho$ pour tout système i , μ_1, \dots, μ_n avec $\mu_1 + \dots + \mu_n > 1$. Il étudie, dans le chapitre II, le nombre des constantes arbitraires dont dépend effectivement la solution. Le chapitre III est consacré à l'étude du cas où il existe n entiers p_1, \dots, p_n tels que $s_1^{p_1} = \dots = s_n^{p_n} = 1$. Dans le chapitre IV, il cherche en particulier des conditions nécessaires et suffisantes pour la permutabilité des systèmes de n fonctions. Il remarque enfin dans le chapitre V que l'on peut énoncer quelques-uns de ses théorèmes sous une forme abstraite. *M. Hukuhara.*

Kuwagaki, Akira: Sur les fonctions de deux variables satisfaisant une formule d'addition algébrique. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 139—143 (1952).

L'A. étudie l'équation fonctionnelle

$$P\{f(x + y, u + v), f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\} = 0,$$

où P est un polynome, et montre que la solution analytique à un nombre fini de branches prend une des formes:

$$A_3[u \cdot A_2^{-1}\{A_1(x)\}], \quad F\{A_1(x), A_2(u)\},$$

où les $A_i(x)$ représentent des fonctions analytiques admettant respectivement une formule d'addition algébrique et F une fonction algébrique. *M. Hukuhara.*

Kuwagaki, Akira: Sur l'équation fonctionnelle rationnelle de la fonction inconnue de deux variables. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 145—151 (1952).

Détermination complète de la solution analytique de l'équation fonctionnelle

$$f(x + y, u + v) = R \{f(x, u), f(x, v), f(y, u), f(y, v)\},$$

ou $R(X, Y, U, V)$ est une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes du premier degré par rapport à chacune des paires (X, Y) , (X, U) , (Y, V) et (U, V) .
M. Hukuhara.

Praktische Analysis:

Krasnosel'skij, M. A. und S. G. Krejn: Ein Iterationsprozeß mit minimalen Abweichungen. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 315—334 (1952) [Russisch].

Preliminary: Let A be a pos. def. symmetric matrix, λ_i its eigenvalues and e_i a system of corresponding orthonormaleigen vectors. For any real s consider the quadratic form $a_s = x' A^s x$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i^s (x' e_i)^2. \text{ From Hölder's inequality, for } p, q > 0 \text{ and any real } s, \text{ one has } a_s^{p+q} \leq a_s^p a_{s+q}^q.$$

Putting $A_{s_1, \dots, s_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = a_{s_1}^{\alpha_1} \dots a_{s_k}^{\alpha_k}$ (s_k real, $\alpha_k > 0$) this inequality may be extended in the following way: Let $s_1 < p_1, \dots, p_k < s_2$; $\Sigma \alpha_k = \beta_1 + \beta_2$; $\Sigma \alpha_k p_k = \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2$; then $\beta_1, \beta_2 > 0$ and (1) $A_{s_1, \dots, s_k}^{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \leq A_{s_1, s_2}^{\beta_1, \beta_2}$. The authors state that these results remain true for pos. def. self-adjoint operators in the Hilbert space. — The iteration process applied to the system $Bx = b$, where B is pos. def. If x_0 is the (arbitrary) initial column (zeroth approximation), the initial error vector will be $\Delta_0 = Bx_0 - b$. The first approximation will be defined by $x_1 = x_0 + c_1 \Delta_0$, where the numerical constant c_1 is to be chosen such that the first error vector $\Delta_1 = Bx_1 - b = (I + c_1 B) \Delta_0$ has minimum length. It is found that $c_1 = -\Delta_0' B \Delta_0 / \Delta_0' B^2 \Delta_0$. If m and M are the least and the greatest root of B , the length of Δ_1 is estimated by

$$\|\Delta_1\| \leq \sqrt{1 - m^2/M^2} \cdot \|\Delta_0\|.$$

Repetition of the process leads to the formula

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n + c_{n+1} \Delta_n, \text{ where } c_{n+1} = -\Delta_n' B \Delta_n / \Delta_n' B^2 \Delta_n$$

or

$$(3) \quad x_{n+1} = x_0 + c_1 \Delta_0 + c_2 \Delta_1 + \dots + c_{n+1} \Delta_n,$$

the latter showing that, in principle, there is no need for finding explicitly the successive approximations x_1, \dots, x_n . Using a special case of the inequality (1) the process is easily seen to be monotonically convergent, not slower than the GP with the quotient $q = (1 - m^2/M^2)^{1/2}$. The authors point out that the formula (3) should not be practically applied to any length because of the accumulation of rounding-off errors; they recommend restarting the iteration after a certain number of steps according to (3), i. e. using (2). The remaining parts of the paper are devoted to: 1. A comparison of the new process with the ordinary iteration processes, mainly with regard to the speed of convergence. As to the technique it is pointed out that the new process requires no knowledge of the roots of the matrix B (or any other matrix derived from it). — 2. An interesting study of the non-linear operator L defined by $Lx = x - (x' B x / x' B^2 x) Bx$, which in the new process leads from the n -th to the $(n+1)$ -th error. L represents the orthogonal projection of the vector x on the hyperplane which is orthogonal to the vector Bx ; it is homogeneous of degree one in x , and, if the norm of L is defined by $\|L\| = \text{Max}_{\|x\|=1} \|Lx\|$, then (4)

$\|Lx\| \leq \|L\| \cdot \|x\|$. It is found that $\|L\| = (M - m)/(M + m) = q$ where m, M are the least and the greatest roots of B . Thus the speed of convergence of the process is the same as that of the sequence q^n . Finally the „worst“ vectors $x = \varphi$ are found for which (4) becomes an equality. — 3. A generalization of the process, called the α -process ($\alpha \geq -1$), where the constant c_{n+1} of (2) is to be replaced by $c_{n+1}^{(\alpha)} = -\Delta_n' B^\alpha \Delta_n / \Delta_n' B^{\alpha+1} \Delta_n$. For $\alpha = 0$ this is the „method of steepest descent“ proposed earlier by Kantorovich (this Zbl. 34, 212). All these α -processes are shown to be monotonically convergent, but the one for $\alpha = 1$ („least deviations“) turns out to have the quickest convergence of all. — There are a number of misprints, mainly in (4. 4) and in the last formula on p. 323, and an inconsistency in the notations which prevents an easy reading of the important work. H. Schwerdtfeger.

Forsythe, George E. and Theodore S. Motzkin: An extension of Gauss' transformation for improving the condition of systems of linear equations. Math. Tables Aids Comput. 6, 9—17 (1952).

Für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit reell-symmetrischer n -reihiger Matrix A vom Range $n - d > 0$, deren quadratische Form positiv semidefinit sei,

wird ein von Gauß angegebener Kunstgriff zur Konvergenzverbesserung bei iterativer Lösung verallgemeinert zur Transformation $x_i = y_i + s_i y_{n+1}$ ($i = 1, \dots, n$) mit beliebigem reellen Vektor $s = (s_1, \dots, s_n)$ gegenüber Gauß mit $s = (-1, \dots, -1)$. Dabei geht A über in die $(n+1)$ -reihige symmetrische Matrix A_1 . Die Eigenwerte λ_j von A seien geordnet nach $0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_d < \lambda_{d+1} \leq \dots \leq \lambda_n$. Es wird untersucht, welchen Einfluß die Wahl von s auf die sogenannte Bedingungszahl $P(A) = \lambda_n/\lambda_{d+1}$ hat und insbesondere, wann $P(A_1)$ zum Minimum (Optimum) wird. Durch Wahl von s kann $P(A_1)$ stets größer und im Falle $\lambda_{d+1} \neq \lambda_{d+2}$ auch kleiner als $P(A)$ gemacht werden. Insbesondere wird $P(A_1) = \text{Min} = \lambda_n/\lambda_{d+2}$, wenn s parallel dem zu λ_{d+1} gehörigen Eigenvektor u_{d+1} gewählt und noch geeignet normiert wird. Der Prozeß kann auch fortgesetzt werden. Die Ergebnisse werden an einem Zahlenbeispiel erläutert, bei dem die ursprüngliche Gauß-Transformation $s = (-1, \dots, -1)$ die Bedingungszahl verschlechtert.

R. Zurmühl.

Ludwig, Rudolf: Verbesserung einer Iterationsfolge bei Gleichungssystemen. Z. angew. Math. Mech. 32, 232—234 (1952).

Für ein beliebiges algebraisches oder transzendentes Gleichungssystem, geschrieben in der Form eines Iterationsverfahrens $\xi_{v+1} = f(\xi_v)$ mit den Komponenten $x_{i,v+1} = f_i(x_{1v}, \dots, x_{nv})$, wird aus einer Folge $n+1$ iterierter Vektoren $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}$ ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Komponenten eines an ξ_{n+1} anzubringenden Korrekturvektors aufgestellt. Die so erzielte Verbesserung entspricht etwa einer einmaligen Anwendung des Newton-Verfahrens. Das Verfahren kann fortgesetzt werden. Es konvergiert auch noch, wenn die Folge der iterierten Vektoren divergiert. — In Gl. (8) sind versehentlich Zähler und Nenner vertauscht.

R. Zurmühl.

Olver, F. W. J.: The evaluation of zeros of high-degree polynomials. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 244, 385—415 (1952).

Die aus langjähriger Praxis in der Mathematics Division, National Physical Laboratory, hervorgegangene Arbeit bespricht die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Wurzeln algebraischer Gleichungen von relativ hohem Grad (> 6). Bei den sog. direkten Methoden wird zuerst die Aitkensche Fortbildung der Bernoullischen Methode besprochen, wobei indessen die relativ langsame Konvergenz und das starke Wegheben der ersten Anfangsdezimalen den Verf. zu einem eher ablehnenden Urteil über diese Methode veranlaßt. Am längsten wird sodann die Graeffesche Methode besprochen, bei deren Diskussion der Verf. sich allerdings auf mehr elementare und leichter zugängliche Teile der Literatur beschränkt. — Im zweiten Teil werden die „indirekten“ oder „Iterationsmethoden“ besprochen, wobei in erster Linie die quadratisch konvergente Newtonsche Formel sowie zwei kubisch konvergente Formeln besprochen werden. Sodann werden die weniger bekannten, aber heute ständig an Bedeutung gewinnenden Methoden besprochen, die quadratischen Faktoren durch iterativ angelegte Rechnungen zu bestimmen. In der ganzen Diskussion wird auf die Abrundungsfragen und auf die Behandlung von Polynomen mit nahe beieinander liegenden Wurzeln recht ausführlich eingegangen, und namentlich das dabei beigebrachte numerische Material dürfte auch bei theoretischen Überlegungen sehr nützlich sein. Nur gestreift werden die Methoden, die auf inverser Interpolation beruhen, während allerdings gerade diese Methoden, iterativ ausgestaltet, überraschend schnelle Konvergenz zu sichern vermögen. — Es sei noch zu der in der Arbeit angeführten Literatur ergänzend auf die Abhandlung von E. Schröder hingewiesen: Über unendliche viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2, in der verschiedene Dinge stehen, die der Verf. anscheinend Herrn E. Bodewig zuschreibt.

A. Ostrowski.

Falk, Sigurd: Ein einfaches Iterationsverfahren zur Lösung algebraischer Gleichungen höheren Grades. Abh. Braunschweig. wiss. Ges. 4, 1—4 (1952).

Algebraic equations with real coefficients and complex roots are solved by iteration on a quadratic real matrix which contains the equation to be solved as a characteristic equation. The method is numerically simple and can be used with success in nearly all practical cases, especially when all roots are complex. (Autoferat.)

E. J. Nyström.

Eltermann, H.: Die Lösung algebraischer und transzendenter Gleichungen mit Hilfe von rekursiven Folgen. Z. angew. Math. Mech. 32, 231—232 (1952).

In geeigneter Form geschriebenen algebraischen Gleichungen kann man —

auf Grund der Theorie der linearen Differenzengleichungen — lineare Rekursionsformeln zuordnen und dann, sogar von beliebigen Anfangswerten ausgehend, sukzessiv Werte von Wurzeln der gegebenen Gleichung beliebig genau berechnen. Zwei Arten des Verfahrens werden besprochen und deren Anwendung auch auf den Fall mehrfach auftretender Wurzeln. Das eine Verfahren wird auch für transzendente Gleichungen verallgemeinert.

E. J. Nyström.

Bodewig, E.: Bericht über die Methoden zur numerischen Lösung von algebraischen Eigenwertproblemen. II. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena 5 (1950—51), 3—38 (1952).

Teil I siehe dies. Zbl. 41, 242. — In diesem zweiten Teil der Arbeit werden die direkten Methoden behandelt, die die Aufgabe im Prinzip elementar-algebraisch lösen, wobei es darauf ankommt, dieses möglichst zweckmäßig zu tun. Nachdem kurz auf die Bestimmung der Eigenvektoren, auf den Einfluß der Abrundungsfehler der Matrizenelemente usw. eingegangen ist, werden folgende Methoden behandelt. Die Methode von Leverrier und ihre Modifikation durch Souriau. Eingehend wird dieses Verfahren mit dem von Jacobi verglichen. Dabei wird auch auf die von Leverrier benutzte Iteration eingegangen. Es folgt die Methode von Krylow-Lusin-Duncan, die den Satz von Cayley-Frobenius benutzt, ferner die Methode von Hessenberg, die eine verhältnismäßig große Zahl von Operationen erfordert, die von Danilewski, die nach Angabe des Verfassers die kürzeste aller Methoden zur Aufstellung der charakteristischen Gleichung ist. Ferner werden die Verfahren von Weber, Samuelson und das der unbestimmten Koeffizienten behandelt. Vorteile und Nachteile der einzelnen Methoden werden gegeneinander abgewogen, z. B. durch Abzählen der Zahl der für jede erforderlichen Operationen usw. In der Zusammenfassung wird als Standardverfahren das von Krylow-Duncan empfohlen, ferner für spezielle Aufgaben andere Methoden angegeben und schließlich die Anzahl der bei den einzelnen Verfahren erforderlichen Multiplikationen zusammengestellt.

Fr.-A. Willers.

Slobodjanskij, M. G.: Eine Abschätzung des Fehlers einer Näherungslösung bei linearen Problemen, die sich auf Variationsprobleme reduzieren, und ihre Anwendung zur Bestimmung von zweiseitigen Näherungen bei statischen Problemen der Elastizitätstheorie. Priklad. Mat. Mech. 16, 449—464 (1952) [Russisch].

Variationsprobleme lassen sich häufig in Form einer linearen Operatorgleichung schreiben. Es sei A ein symmetrischer, positiv-definiter Operator, der das Problem kennzeichnet; u und v seien Elemente des linearen Raumes. Dann ist das Aufsuchen der gesuchten Funktion gleichbedeutend mit der Aufgabe, das skalare Produkt (f, v) zu bestimmen, wobei $Au = f$; $Av = \psi$. — Ein Näherungswert für (f, v) ist $b_n = (f, v_n) + (\psi - \psi_n, u_n)$ (beim Ritzschen oder Galerkinschen Verfahren vereinfacht sich dieser Ausdruck, indem das zweite Produkt gleich 0 wird); ebenfalls ist b_n^* ein Näherungswert, der gefunden sei, indem man die gleiche Aufgabe auf eine andere Variationsaufgabe überführt (z. B. mit Hilfe des Prinzips der Ergänzungsarbeit von Castigliano). Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(f, v_0) - b_n| &< [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} \cdot [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2}; \\ |(f, v_0) - b_n^*| &< [F_f(u_0) - a_n^*]^{1/2} \cdot [F_\psi(v_0) - c_n^*]^{1/2}; \end{aligned}$$

dabei ist:

$$\begin{aligned} F_f(u) &= (Au, u) - 2(u, f); \quad F_\psi(v) = (Av, v) - 2(v, \psi) \quad (\text{Minimal-Funktional}); \\ a_n^* &< F_f(u_0) < F_f(u_n); \quad c_n^* < F_\psi(v_0) < F_\psi(v_n). \end{aligned}$$

Man kann auch $\frac{1}{2}(b_n + b_n^*)$ als Näherungswert für (f, v) ansetzen und hierfür gilt:

$$|(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)| < \frac{1}{2} [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} \cdot [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2}.$$

Wendet man diese Überlegung auf eine räumliche Aufgabe der Elastizitätstheorie an, so erhält man

$$|F(U, U_{11}) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)| \leq \delta$$

bzw.:

$$\frac{1}{2}(b_n + b_n^*) - \delta < F(U, U_{11}) < \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) + \delta$$

mit $\delta = [A^*(\sigma_n) + \Pi(U_n)]^{1/2} \cdot [A^*(\sigma_{11n}) + \Pi(U_{11n})]^{1/2}$; darin ist A^* die Ergänzungsarbeit, Π die potentielle Energie. Als Beispiele werden die Durchbiegung einer an den Rändern eingespannten quadratischen Platte infolge gleichmäßiger Belastung, sowie die Biegemomente bei einer an den Rändern eingespannten halbkreisförmigen Platte, ebenfalls infolge gleichmäßiger Belastung, behandelt.

K. Borkmann.

Meyerott, R. E., P. J. Luke, W. W. Clendenin und S. Geltman: A numerical variational method. Phys. Review, II. Ser. 85, 393—400 (1952).

Verff. betrachten zunächst Eigenwertprobleme vom Typ $\frac{d^2 \psi}{dx^2} + [A + U(x)] \psi = 0$ mit den Randbedingungen $\psi = 0$ für $x = a$ und $x = b$ und entwickeln eine Näherungsmethode zur

Bestimmung der ersten Eigenfunktionen ψ_1 und des zugehörigen ersten Eigenwertes λ_1 auf Grund der Tatsache, daß ψ_1 die Variationsaufgabe löst, den Quotienten

$$\lambda[\varphi] = \left(\int_a^b \left[\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - U(x) \varphi^2 \right] dx \right) : \left(\int_a^b \varphi^2 dx \right)$$

zum Minimum zu machen, wenn φ den Bereich der stetigen Funktionen durchläuft, die eine stückweise stetige erste Ableitung besitzen und den Randbedingungen genügen. Das zugehörige Minimum ist $\lambda[\psi_1] = \lambda_1$. Die Näherungsmethode ergibt sich durch den Ansatz $\varphi(x) = \varphi_n + s(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$ für $x = x_n + s(x_{n+1} - x_n)$ mit $0 \leq s \leq 1$ [es ist $\varphi_n = \varphi(x_n)$, $x_n = a + n h$ und $h = (b-a)/N$ gesetzt] als Spezialfall des allgemeinen Ritzschen Verfahrens. Die φ_n ($n = 1, 2, \dots, N-1$) werden als Parameter aufgefaßt, für deren Berechnung sich $N-1$ lineare homogene Gleichungen ergeben. Den Wert von λ erhält man aus der Bedingung des Verschwindens der Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems. — Die geschilderte Variationsmethode wird mit dem von Hartree benutzten Integrationsverfahren verglichen.

In einem zweiten Abschnitt wird das zwei-dimensionale Problem $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + [\lambda + U(x, y)] \psi = 0$ mit der Randbedingung $\psi = 0$ auf dem Rande des Rechteckbereiches $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ ganz analog behandelt. In einem weiteren Abschnitt wird die Variationsmethode zur Verbesserung einer vorliegenden Näherungslösung herangezogen. *H.-K. Dettmar.*

Zurmühl, Rudolf: Runge-Kutta-Verfahren unter Verwendung höherer Ableitungen. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 153—154 (1952).

Bei gewöhnlichen expliziten Differentialgleichungen kann die Genauigkeit der numerischen Integration bei fester Schrittweite h durch Umwandlung in eine Differentialgleichung höherer Ordnung beträchtlich gesteigert werden. Verf. zeigt, daß dies im allgemeinen auch bei dem Runge-Kuttaschen Verfahren der Fall ist. Die Anwendung dieses Verfahrens kann hier so erfolgen, daß aus der gegebenen Differentialgleichung n -ter Ordnung durch p -maliges Ableiten eine Differentialgleichung $(n+p)$ -ter Ordnung hergestellt wird, und die letztere nach den verallgemeinerten Runge-Kuttaschen Formeln für Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt wird (vgl. R. Zurmühl, dies. Zbl. **30**, 59). Für $n \geq 2$ tritt eine Genauigkeitssteigerung ein, die Genauigkeit in den y -Werten ist von der Größenordnung h^{n+p+2} . — Eine Ausnahme hiervon bildet die Differentialgleichung erster Ordnung, wenn zu ihrer Integration eine Differentialgleichung zweiter Ordnung benutzt wird. Hier ist beide Male die Genauigkeit von der Größenordnung h^4 , dafür ergibt sich aber eine bedeutende Vereinfachung des Rechnungsganges. — Für die praktische Durchführung der Rechnung teilt Verf. zwei Rechenschemata mit. Das erste Schema bezieht sich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, die mit Hilfe einer Differentialgleichung zweiter Ordnung integriert werden soll, das zweite betrifft eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die vermöge einer Differentialgleichung dritter Ordnung integriert werden soll. *W. Quade.*

Blanch, Gertrude: On the numerical solution of equations involvng differential operators with constant coefficients. *Math. Tables Aids Comput.* **6**, 219—223 (1952).

Verf. empfiehlt, statt der Differentialgleichung $y'' + b y' + c y + F(y, x) = 0$ bei gegebenen Anfangswerten $y(0)$ und $y'(0)$ die entsprechende Integralgleichung $y = \alpha_1 e^{m_1 x} + \alpha_2 e^{m_2 x} - G_1(x) + G_2(x)$ zu lösen, wobei $\alpha_1 + \alpha_2 = y(0)$; $\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = y'(0)$ und $G_k(x) = (b^2 - 4c)^{-1/2} e^{m_k x} \int_0^x e^{-m_k t} F(y, t) dt$ mit $k = 1, 2$ sowie m_1 und m_2 die Wurzeln der zugehörigen charakteristischen Gleichung, $m^2 + b m + c = 0$, sind. Besonders vorteilhaft sei dies, wenn $(b^2 - 4c)^{1/2}$ große Zahlenwerte besitzt. Ein Zahlenbeispiel veranschaulicht das Gesagte. — Das Analoge gilt auch für Gleichungen höherer Ordnung; doch wird dies in der Arbeit ohne näheres Eingehen nur kurz angedeutet. *K. Borkmann.*

Roberson, Robert E.: On the relationship between the Martiensson and Duffing methods for non-linear vibrations. *Quart. appl. Math.* **10**, 270—272 (1952).

Zur näherungsweisen Lösung der Differentialgleichung nichtlinearer erzwungener

Schwingungen mittels eines eingliedrigen Ansatzes gibt es (unter der Voraussetzung, daß die erzwungene Schwingung dieselbe Frequenz hat wie die Erregung) u. a. folgende Methoden. Erstens: Man fordert (nach Martienssen), daß der eingliedrige Ansatz die Differentialgleichung an 2 Stellen (z. B. bei $t = 0$ und $t = \frac{1}{4}$ Periode) erfüllt und erhält so eine Gleichung für die gesuchte Amplitude der Schwingung. Zweitens: Man benutzt (nach Duffing) das Iterationsverfahren. Aus der Forderung, daß die erste Iterierte keine säkularen Glieder enthält, ergibt sich ebenfalls eine Gleichung für die Amplitude, die von der nach Martienssen erhaltenen i. a. verschieden sein wird. Der Verf. dehnt beide Verfahren auf das spezielle System

$$\Omega_i^2 \ddot{x}_i + \sum_1^n a_{ik} x_k + v_i f(x_i) = F_i \sin t \quad (i = 1, \dots, n)$$

aus und diskutiert kurz den Fall $f(x_i) = x_i^m$.

A. Weigand.

Bakaev, Ju. N.: Angenäherte Integration der Differentialgleichung des Pendels. Priklad. Mat. Mech. **16**, 723—728 (1952) [Russisch].

L'A. considère le système différentiel

$$dv/dt = u + \beta, \quad \frac{1}{\alpha^2} du/dt = -\sin v - u$$

déjà étudié en particulier par El'sin (ce Zbl. **43**, 92). Il étudie le cas où $0 < \beta < 1$ et montre qu'il existe une fonction $f(\beta)$ telle que si $\alpha > f(\beta)$, toute intégrale du système tend vers la solution constante stable $v_0 = \arcsin \beta$; si $\alpha < f(\beta)$, le système a soit des intégrales qui tendent vers une intégrale périodique, soit des intégrales qui tendent vers la solution constante stable, selon les valeurs initiales. L'A. étudie en terminant, d'une manière plus particulière, le cas où $\beta = 0$. Ch. Blanc.

Diaz, J. B. and R. C. Roberts: Upper and lower bounds for the numerical solution of the Dirichlet difference boundary value problem. J. Math. Physics **31**, 184—191 (1952).

Der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie werde nach dem Differenzenverfahren ein Gleichungssystem für Näherungswerte $u(m, n)$ an den Gitterstellen m, n zugeordnet. Es wird beschrieben, wie man, von gewissen Näherungen ausgehend, nach Art des Liebmannschen Mittelungsverfahrens oder der Relaxation eine superharmonische Funktion $v(m, n)$ [d. h. mit

$$\Delta v(m, n) = v(m+1, n) + v(m-1, n) + v(m, n+1) + v(m, n-1) - 4v(m, n) \leq 0]$$

und eine subharmonische Funktion $w(m, n)$ (mit $\Delta w \geq 0$) aufstellen kann, welche beide die gegebenen Randwerte annehmen. Dann hat man für u die Schranken $w(m, n) \leq u(m, n) \leq v(m, n)$. — (Anm. des Ref.: Diese Eingabelungsaussage bewies bereits der Ref.; s. dies. Zbl. **46**, 127.)

L. Collatz.

Polya, Georges: Sur une interprétation de la méthode des différences finies qui peut fournir des bornes supérieures ou inférieures. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 995—997 (1952).

Verf. erläutert sein Prinzip, eine bei einer Differentialgleichungsaufgabe auftretende wichtige Größe mit Hilfe der entsprechenden Größe bei Verwendung des Differenzenverfahrens abzuschätzen, an mehreren Beispielen. Beim Torsionsproblem ist eine am Rande C eines ebenen Bereiches D verschwindende Funktion $u(x, y)$ mit $\Delta u + 2 = 0$ und die Größe $P = 2 \iint_D u \, dx \, dy$ zu ermitteln. Es sei

D^* ein in D enthaltenes Gittergebiet mit der Maschenweite h , für welches nach dem gewöhnlichen Differenzenverfahren die Näherungen u_{ij} berechnet seien. Dann ist $2h^2 \sum_{D^*} u_{ij}$ eine untere Schranke für P , wie mit Hilfe des Dirichletschen Prinzips

gezeigt wird, indem in diesem Prinzip nach Triangulation von D^* eine stückweise lineare in allen Schnittpunkten die Werte u_{ij} annehmende stetige Funktion verwendet wird. Als weitere Anwendung wird genannt: Es seien λ^* die Eigenwerte von

$\Delta u + \lambda u = 0$ bei $u = 0$ auf C für das Gebiet D , λ_k^* beim Gebiete D^* und λ'_k die Eigenwerte der zur D^* gehörigen Differenzengleichungen der besonderen Form

$$\frac{1}{h^2} (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) + \frac{\lambda}{12} (6u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j-1} + u_{i,j-1}) = 0.$$

Dann gilt $\lambda_k \leq \lambda_k^* \leq \lambda'_k$ (die $\lambda_k, \lambda_k^*, \lambda'_k$ der Größe nach geordnet). Bei den gewöhnlichen Differenzengleichungen ist eine entsprechende Aussage nicht gesichert.

L. Collatz.

Jacobsen, L. S.: On a general method of solving second-order ordinary differential equations by phase-plane displacements. *J. appl. Mech.* **19**, 543—553 (1952).

Bringt man eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Form $\ddot{x} + p^2(x + \delta) = 0$ mit konstantem p und $\delta = \delta(x, \dot{x}, t)$ und setzt $v = \dot{x}/p$, so beschreibt die Lösung in der x, v -Ebene eine Kurve, die wegen $dx/dv = v/(x + \delta)$ bei konstantem δ ein Kreis mit dem Mittelpunkt $x = -\delta, v = 0$ ist. Indem man näherungsweise δ stückweise konstant annimmt, erhält man eine graphisches Lösungsverfahren durch Kreisbogen, das Verf. an zahlreichen Beispielen erläutert.

J. Weissinger.

Salzer, Herbert E.: Formulas for numerical differentiation in the complex plane. *J. Math. Physics* **31**, 155—169 (1952).

Unter Benutzung von zweckmäßig, möglichst dicht gewählten Gitterpunkten werden Ausdrücke zur numerischen Auswertung der Ableitungen einer tabulierten Funktion einer komplexen Veränderlichen gegeben, und zwar bis einschließlich der 7. Ableitung bei 9 gegebenen Punkten.

E. J. Nyström.

Brock, P. and F. J. Murray: The use of exponential sums in step by step integration. *II. Math. Tables Aids Comput.* **6**, 138—150 (1952).

In Ergänzung des ersten Teils (dies. Zbl. **46**, 343) werden Anweisungen für die Wahl der Schrittweite und die zweckmäßige Berechnung der Integrationskoeffizienten a_k gegeben; das ganze Verfahren wird an numerischen Beispielen erläutert.

J. Weissinger.

Štykan, A. B.: Graphische Berechnung von Stieltjes-Integralen. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **87**, 893—895 (1952) [Russisch].

Il s'agit de l'application du procédé graphique connu de l'intégration par tangentes pour une intégrale

$$y(x) = \int_{x_0}^x F[x, y(x), y(x \pm \alpha(x)), y(x \pm \beta(y))] d[\zeta(\tau(x))]$$

qui se présente dans l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre à argument retardé. Un exemple est traité [il y a quelques regrettables fautes d'impression, par ex. dans les équations (3) et (4)].

Ch. Blanc.

Luke, Yudell, L.: Mechanical quadrature near a singularity. *Math. Tables Aids Comput.* **6**, 215—219 (1952).

Für die numerische Auswertung von Integralen der Form $\int_0^b x^{-1/2} f(x) dx$ werden Formeln und Fehlerabschätzungen gegeben, und zwar bei 2 bis einschl. 11 gegebenen, äquidistanten Ordinaten.

E. J. Nyström.

Batschelet, Eduard und Hans Rudolf Striebel: Nomogramm zur Bestimmung der reellen und komplexen Wurzeln einer Gleichung vierten Grades. *Z. angew. Math. Phys.* **3**, 156—159 (1952).

Bei der von H. Blenk (dies. Zbl. **41**, 243) angegebenen graphischen Auflösung von Gleichungen vierten Grades in der Form $z^4 + p z^2 + q z + r = 0$ mit reellen Koeffizienten werden die Wurzeln in der Gestalt $z_1 = u + v, z_2 = u - v, z_3 = -u + w, z_4 = -u - w$ angesetzt, wobei u reell und nichtnegativ angenommen

werden darf und v^2 und w^2 reell sind. Es bestehen dann drei funktionale Beziehungen zwischen u, p, q, r , zwischen v^2, u, p, q und zwischen w^2, u, p, q . Für die erste gibt Verf. an Stelle der von Blenk verwendeten Netztafel eine Fluchtlinientafel mit einem krummlinigen und zwei parallelen Skalenträgern an, was Vorteile bietet. Dabei ist p fest gleich $-10, 0, +10$, was durch Transformation stets erreicht werden kann. G. Schulz.

● Meyer zur Capellen, W.: *Instrumentelle Mathematik für den Ingenieur.* (Fachbücher für Ingenieure.) Essen: Verlag W. Girardet, 1952. 383 S. mit 190 Abb., DM 27,80.

Das Buch stellt eine Ergänzung zum Werk „Mathematische Instrumente“ des gleichen Verf. dar. Das Hauptgewicht liegt hier nicht so sehr auf der Beschreibung von Bau und Funktion der mechanischen Rechenhilfsmittel, als vielmehr auf der Umarbeitung und Anpassung gegebener Probleme zum Zweck der Lösung mit Instrumenten; die Instrumente sind nur so weit beschrieben, als es zum Verständnis der mathematischen Verfahren nötig ist. Die Einteilung ist nach der mathematischen Natur der Problemstellung getroffen; die vier Hauptabschnitte sind überschrieben: Arithmetik und Algebra, Geometrie und Trigonometrie, Infinitesimalrechnung, Harmonische Analyse und verwandte Probleme. Vielerorts (besonders im Abschnitt über Infinitesimalrechnung) sind auch numerische Verfahren, welche keinen Bezug auf Rechenhilfsmittel haben, gegeben. Eine große Zahl von vollständig ausgeführten Beispielen aus der Technik, sowie reichhaltiges Figurenmateriale erhöhen die Anschauung. Nach dem Titel zu schließen, hätte man immerhin eine Mitberücksichtigung der Integrieranlagen und der programmgesteuerten Rechenmaschinen erwartet, da solche Instrumente heute mehr und mehr der Allgemeinheit zugänglich sind. Nichtsdestoweniger kann das Buch jedem, der numerische Berechnungen mit mechanischen Hilfsmitteln auszuführen hat, bestens empfohlen werden. Ambros P. Speiser.

Speiser, Ambros P.: *Rechengeräte mit linearen Potentiometern.* Z. angew. Math. Phys. 3, 449—460 (1952).

Die Arbeit handelt von Analogie-Rechengeräten, die aus Ohmschen Widerständen und linearen Potentiometern zusammengesetzt sind. Mit Hilfe geeigneter Schaltungen können gewisse Funktionen einer oder mehrerer Variablen dargestellt werden. Die Variablen werden dabei als Drehwinkel der Potentiometer gegeben; der Funktionswert wird entweder als eine Spannung oder (unter Heranziehung eines Nullabgleichs) ebenfalls als Potentiometerdrehwinkel erhalten. Für die Ausführung der Addition und Multiplikation geeignete Schaltungen werden angegeben. Ferner werden einige Bemerkungen und praktische Erfahrungen über die angenäherte Darstellung gewünschter Funktionen durch Schaltungen der obengenannten Art mitgeteilt. Für Funktionen einer Variablen schlägt Verf. u. a. die Anlage eines Katalogs von elektrisch darstellbaren Funktionen vor, aus dem man zunächst eine der gewünschten Funktion einigermaßen nahekommende Kurve herauszusuchen hat; die so gewonnene erste Näherung soll dann analytisch verbessert werden. Für die angenäherte Darstellung der Sinusfunktion wird eine Schaltung empfohlen, die ein Potentiometer mit Abgriffen benutzt. Funktionen zweier Variablen $z = z(x, y)$ will Verf. nach Möglichkeit durch den Ansatz $Z(z) = X(x) + Y(y)$ auf Funktionen einer Variablen zurückführen; zur Durchführung dieser rechnerischen Umformung empfiehlt Verf. die Benutzung von Kurvennetzen, die (streng oder wenigstens angenähert) Sechseckgewebe sein müssen. — Eine ausführlichere Fassung der Arbeit ist in der Bibliothek der ETH Zürich niedergelegt. A. Stöhr.

Korn, Granino A.: *The difference analyzer: A simple differential equation solver.* Math. Tables Aids Comput. 6, 1—8 (1952).

Es wird eine neue Art von Analogierechengerät beschrieben, das die Lösung sowohl nicht linearer, wie linearer simultaner Differentialgleichungen durch eine einfache schrittweise Integration unter Benutzung von Potentiometern und Netzwerken gestattet. Die Variablen werden durch den Drehwinkel von Achsen dargestellt, die sich schrittweise ändern, da die Integration nach einem Differenzenverfahren erfolgt. Ohne Anwendung von Verstärkern und Servomechanismen erreicht man eine Genauigkeit von etwa 3%. An einem Beispiel wird eine Fehlerabschätzung gegeben. Das Integrationsverfahren kann aber unter Benutzung von Servomechanismen vollständig automatisiert werden. Eine wesentliche Preissenkung gegenüber den Differentialanalysatoren ist auf Kosten der Rechengeschwindigkeit erreicht. Fr. A. Willers.

Erismann, Th.: *Eine neue Integrieranlage.* Z. angew. Math. Mech. 32, 242—245 (1952).

Die vom Verf. bei der Firma Amsler, Schaffhausen entwickelte Integrieranlage

enthält Kugelintegratoren in der sogenannten Nebenschlußschaltung, photoelektrisch abgetastete Funktionstriebwerke, Zeichentische und Summentriebwerke. Die Nebenschlußschaltung erlaubt es, zum Integral ein konstantes Vielfaches der Integrationsvariablen zu addieren, wodurch man den Integranden auf ein Intervall positiver Werte beschränken kann. Die Funktionstriebwerke arbeiten mit moduliertem Licht. Zur Fernübertragung der Drehbewegungen von einem Rechenelement zum anderen dienen Schrittschaltwerke mit kollektorartigen Gebern. Die Anlage ist so klein, daß sie eine direkte Verkopplung der Rechenelemente durch Steckerschüre erlaubt.

H. Bückner.

Sprague, R. E.: Fundamental concepts of the digital differential analyzer method of computation. *Math. Tables Aids Comput.* **6**, 41—49 (1952).

Die digitalen Differential-Analysatoren bilden eine Gruppe von Rechengernäten, die eine Zwischenstellung zwischen den beiden großen Gruppen der digitalen und der Analogie-Rechengernäte einnimmt. Sie verbinden wesentliche Vorteile der beiden Gruppen. — Wie in einer vergleichenden Betrachtung gezeigt wird, unterscheidet sich das wesentlichste Element des digitalen Differential-Analysators, der digitale Integrator dadurch von den Integratoren anderer Differential-Analysatoren, daß die Veränderlichen durch Impulsraten dargestellt werden, wodurch die digitale Behandlung des Problems ermöglicht wird. Der digitale Integrator besteht aus 2 Registern. Das *Y*-Register empfängt die *dy*-Impulse und bildet durch Summierung die Zahl *Y*. Gesteuert durch die *dx*-Impulse wird die Zahl *Y* in das *R*-Register übertragen. In diesem Register werden die *Y* summiert und jedesmal beim Überschreiten der Registerkapazität ein *dz*-Impuls abgegeben. — Als Vorteile des digitalen Differential-Analysators werden genannt die einfachere Aufstellung des Rechenprogramms und die größere Rechengeschwindigkeit gegenüber den digitalen Rechengernäten einerseits, die größere Genauigkeit und leichtere Feststellung von Fehlern gegenüber den Analogiegeräten andererseits, sowie die geringe Größe. *Breitling.*

Rey, T. J.: On the back-ground of pulse-coded computers. I, II. *Electronic Engineering* **24**, 28—32, 66—69 (1952).

Goetz, J. A. and A. W. Brooke: Electron tube experience in computing equipment. *Electrical Engineering* **70**, 154—157 (1952).

Wild, John J.: High-speed printer for computers and communications. *Electronics* **25**, 116—120 (1952).

Poel, W. L. van der: A simple electronic digital computer. *Appl. sci. Research*, **B 2**, 367—400 (1952).

Aus bereits fertiggestellten Teilen einer im Bau befindlichen elektronischen digitalen Rechenmaschine für das Centrallabor der niederländischen Postverwaltung wurde die einfachste programmgesteuerte Maschine, die möglich ist, aufgebaut. Bei dieser bildet die Steuerung einen Teil der Recheneinheit. Als Serienspeicher wird die Quecksilber-Ultraschalleitung oder die magnetische Trommel und für Ein- und Ausgang Lochstreifen verwendet. Die Maschine arbeitet mit Einadreßschlüssel. Da das Rechenwerk nur addieren bzw. subtrahieren kann, müssen andere Operationen wie Multiplikation usw. mit Unterprogrammen durchgeführt werden. Die Entwicklung solcher Programme vom einfachsten Additionsprogramm bis zum vollständigen Multiplikationsprogramm wird ausführlich gezeigt. Als Vorteile der Maschine werden hervorgehoben der einfache logische Aufbau, das flexible Programmsystem, das leicht erlernt werden kann und bei dem verwickelte Programme aus Standard-Unterprogrammen aufgebaut werden, und der Preis, der hauptsächlich durch den Speicher bedingt ist. Nachteilig ist die verhältnismäßig kleine Rechengeschwindigkeit, hauptsächlich bei Multiplikationen, und der große Bedarf von Registern. Einige einfache Berechnungen, die mit der Maschine durchgeführt wurden, werden angegeben.

W. Breitling.

Wolf, J. Jay: The office of naval research relay computer. *Math. Tables Aids Comput.* 6, 207—212 (1952).

Diese parallel arbeitende Relaismaschine braucht für eine Multiplikation 2,5 Sekunden und führt 220 Additionen in der Minute aus. Sie benutzt Einadreßbefehle und kann in einem magnetischen Trommelspeicher von 12 Zoll Durchmesser und 8,5 Zoll Länge, der 440 Umdrehungen in der Minute macht, 4094 Zahlen oder Befehle von je 24 Dualziffern einschließlich Vorzeichen speichern. Sie benutzt für die Rechnung 734 Relais und in Verbindung mit der Speicherung 655 Röhren. Die Eingabe erfolgt mittels siebenreihigen Lochstreifens, durch den 90 Zahlen in der Minute eingegeben werden können oder durch Hand; die Ausgabe mittels elektrischen Fernschreibers oder durch Lochstreifen (110 Zahlen pro Minute). Die Maschine hat drei Rechenregister mit 24 bzw. 48 Dualstellen. 42 verschiedene Operationen können ausgeführt werden. Arbeitsweise, Gebrauch und Überwachung werden im einzelnen beschrieben.

Fr.-A. Willers.

Williams, F. C. and T. Kilburn: The University of Manchester computing machine. *Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951)*, 57—61 (1952).

Geschildert werden die einzelnen Schritte der im Jahre 1946 begonnenen Entwicklung der in Manchester arbeitenden Rechenmaschine. Unter Benutzung der am Radar gewonnenen Erfahrungen wurde zunächst ein Kathodenstrahlrohrspeicher konstruiert und damit eine kleine Versuchsmaschine gebaut, weiter wurde ein Magnettrommelspeicher entwickelt, der zusammen mit dem Kathodenstrahlrohrspeicher arbeiten sollte. 1949 wurden dann damit zwei weitere Versuchsmaschinen gebaut. Schließlich wird die endgültige Maschine, deren Speicher in acht Röhren 10240 und auf der Magnettrommel 150000 Dualziffern aufnehmen kann, in ihren Einzelheiten beschrieben und das für sie in Aussicht genommene Arbeitsprogramm angegeben.

Fr.-A. Willers.

Pollard, B. W.: The design, construction and performance of a large-scale general-purpose digital computer. *Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951)*, 62—70 (1952).

Verf. beschreibt das von F. C. Williams entwickelte und von der Firma Ferranti gebaute digitale Rechenggerät. Bei dem jetzigen Entwicklungsstand elektrischer Rechenggeräte ist der technischen Ausführung große Aufmerksamkeit zu schenken. Gefordert wird ein stabiler Aufbau mit leichter Zugänglichkeit zu den Röhren und Schaltelementen und gute Kühlung. Die Konstruktion wird im einzelnen beschrieben. Die Stromversorgungen sind teilweise elektronisch stabilisiert. Die Röhrenheizung wird einem 115 V, 1600 Hz Motorgenerator entnommen. Das Rechenggerät ist im wesentlichen mit 4 Röhrentypen aufgebaut und enthält ca. 950 Röhren EF 50, 350 Röhren EF 55, 2350 Röhren EA 50, 300 Röhren EF 91, 50 andere Röhren, 12000 Widerstände und 2500 Kondensatoren. Als Speicher wird das Williams-Elektronenstrahlröhren-Speichersystem und ein Magnettrommelspeicher verwendet. In jeder der 12 Speicherröhren können 1300 Ziffern in 65 Linien mit je 20 Ziffern gespeichert werden. Der magnetische Speicher hat eine Kapazität von 655360 Ziffern, die in 250 Spuren aufgezeichnet werden. Die Trommel ist mechanisch sehr sorgfältig ausgeführt. Für den Eingang wird ein Lochstreifengeber, für den Ausgang ein Fernschreiber und ein Streifenlocher verwendet. — Von den bisher durchgeführten Berechnungen werden als wichtigste aufgeführt: 1. Untersuchung des Verhaltens eines Baumwollfadens in einer Ringspinnmaschine. Das Problem führte auf die Lösung eines Systems von linearen, simultanen Differentialgleichungen nach der Methode von Runge-Kutta. 2. Berechnung von Laguerre-Funktionen. 3. Netzwerkprobleme. — In einer Untersuchung über die Zuverlässigkeit der Maschine wird eine 90%ige Einsatzfähigkeit festgestellt, die sich durch ständige Verbesserungen noch erhöht. Für die verwendeten handelsüblichen Röhren ergab sich eine durchschnittliche Lebensdauer von 85600 Stunden, für die Widerstände und Kondensatoren eine solche von 3336000 bzw. 2085000 Stunden.

W. Breitling.

Everett, R. R.: The whirlwind I computer. *Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951)*, 70—74 (1952).

Es wird eine kurze Beschreibung des unter der Bezeichnung Whirlwind I (WWI) entwickelten digitalen Rechenggerätes gegeben. WWI hatte anfänglich eine Speicherkapazität von 256 Registern, zur Zeit 1280 und im Endausbau 2048 Register. Re-

gisterlänge 16 Binärziffern. Für genauere Rechnungen sind deshalb Unterpläne erforderlich, wodurch die Rechengeschwindigkeit sinkt. Sie beträgt z. Z. 20 000 Einadreß-Operationen/s, die Impulsfrequenz 1 MHz. Speicherung mit elektrostatischen MIT-Zweistrahlröhren. WWI enthält 5 000 Röhren, meist Einzelpentoden und 11 000 Kristalldioden. — Die Hauptteile des Rechengerätes sind durch ein Zentralleitungssystem verbunden. Das Leitwerk besteht aus der Zentralsteuerung und den daran angeschlossenen Steuerungen für den Speicher, das Rechenwerk und den Ausgang, sowie einem 11-stufigen Binärzähler für die Programmsteuerung. Das Rechenwerk enthält 3 Register, einen Zähler und eine Steuerung. Es arbeitet parallel und führt eine vollständige Addition in $3\mu\text{s}$, eine Multiplikation durchschnittlich in $16\mu\text{s}$ durch. Für den Eingang und Ausgang des WWI steht eine Reihe von Einrichtungen wie photoelektrische und mechanische Streifengeber, Oszilloskope usw. zur Verfügung. Vorgesehen sind noch Magnetbänder und Magnettrommel. — Das Gerät ist seit März 1951 in Betrieb und arbeitet zufriedenstellend. Eine Reihe von technischen und wissenschaftlichen Problemen wurde bereits mit dem Gerät bearbeitet. *W. Breitling.*

Taylor, Norman H.: Evaluation of the engineering aspects of whirlwind I. Review electronic digital Computers, Conference (Philadelphia, Dec. 10—12, 1951), 75—78 (1952).

Die Erfahrungen mit dem im vorhergehenden Aufsatz beschriebenen digitalen Rechengerät WWI werden ausgewertet und ergeben eine Einsatzbereitschaft von 85%. Von den Fehlzeiten gehen $2/3$ zu Lasten des Bedienungspersonals und nur $1/3$ zu Lasten des Gerätes. Die Zuverlässigkeit der einzelnen Elemente wird untersucht. Zusammenfassend wird festgestellt, daß das Gerät im ganzen günstig aufgebaut ist und nur noch wenige Verbesserungen notwendig sind. *W. Breitling.*

Raymond, François-Henri: Sur la stabilité d'un asservissement linéaire multiple. C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 508—510 (1952).

Verf. beweist folgenden Satz. Ergeben sich die Abgangssignale eines Servomechanismus mit n -Veränderlichen aus den Fehlersignalen durch lineare Elemente, deren Übermittlungskoeffizienten den Bedingungen $\Re g_i(p) < 0$ für $\Re(p) < 0$ bei $i = 1, \dots, n$ genügen, dann ist zur Stabilität des Mechanismus hinreichend, daß der symmetrische Teil der Reaktionsmatrix nichtnegativ definit sei. Der Satz ist bisher nur für gleiche $g_i(p)$ bewiesen worden. *T. Szentmártony.*

● **Spenceley, G. W., R. M. Spenceley and E. R. Epperson:** Smithsonian logarithmic tables. Washington: Smithsonian Institution 1952. XII, 402 p. \$ 4,50.

Der erste Teil des Werkes enthält in 4 Spalten nebeneinandergestellt die Zahlen N , $\ln N$, $\ln(1 + 10^{-4} N)$, $\ln(1 + 10^{-8} N)$, wo N die natürlichen Zahlen bis 10^4 durchläuft, der zweite Teil dasselbe für die gewöhnlichen Logarithmen. Auf einem Vorsatzblatt sind die Werte von $\ln 10^n$ ($n = 1(1)10$) und $\log e$ angegeben. Alle Logarithmen mit 23 Dezimalen. — Damit kann nach der in einer kurzen Einleitung erläuterten Faktorisationsmethode, die man zweckmäßig mit einer Rechenmaschine durchführt, der Logarithmus einer beliebigen Zahl auf 23 Dezimalen mit einem maximalen Fehler von höchstens 2 Einheiten der letzten Stelle (ohne Interpolation) bestimmt werden. Ähnlich für die Antilogarithmen. — Der Satz des handlichen, gut ausgestatteten Werkes ist übersichtlich. *J. Weissinger.*

● **Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen. (Hauptverwaltung für Geodäsie und Kartographie beim Ministerrat der UdSSR.)** Moskau: Verlag der geodätischen und kartographischen Literatur 1952. 303 S. R. 21,00 [Russisch].

Für $x = 0(10'')45^\circ$ werden mit 6 Dezimalen (bzw. 6 gültigen Ziffern bei cosec und ctg für kleine Winkel) angegeben: $\sin x$, cosec x , tg x , ctg x , sec x und cos x . Eine Hilfstafel bringt cosec x und ctg x mit 5—6 gültigen Ziffern für $x = 0(1'')1^\circ 24'$. Erste Differenzen mit Differenztafeln sind zur Interpolation beigefügt. *H. Unger.*

● Zehnstellige Tafeln der Logarithmen der komplexen Zahlen und des Übergangs von Cartesischen zu Polarkoordinaten. Tafeln der Funktionen $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, $\sqrt{1+x^2}$. (Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Institut für Mechanik und Rechentchnik. Mathematische Tafeln). Moskau: Verlag der Akademie der Wissenschaften der UdSSR 1952. 116 S. R. 10,80 [Russisch].

Es werden mitgeteilt: $\ln x$ für $x = 1(0,001)10$ und $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$, $\operatorname{arctg} x$, $\sqrt{1+x^2}$ für $x = 0(0,001)1$ mit 10 Dezimalen. Für die quadratische Interpolation werden 1. und 2. Differenzen angegeben. Damit können die Logarithmen komplexer Zahlen, die Logarithmen der Beträge, die Beträge selbst und die Winkel bestimmt werden. Zur Umrechnung werden dabei folgende Formeln benutzt: $\ln(A \pm iB) = \ln A + \frac{1}{2} \ln(1 + (B/A)^2) \pm i \operatorname{arctg} |B/A|$ für $0 \leq |B| \leq A$, $\ln(A + iB) = \ln i + \ln(B - iA)$ für $|B| > |A| > 0$, $\ln(A + iB) = \ln(-1) + \ln(-A - iB)$ für $A < 0$. H. Unger.

● Dolanský, Ladislav and Marie P. Dolanský: Table of $\log_2 1/p$, $p \cdot \log_2 1/p$ and $p \cdot \log_2 1/p + (1-p) \cdot \log_2 1/(1-p)$. (Technical Report No. 227) Cambridge, Mass.: Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology 1952. I, 23 p. 1 plate.

Zur Berechnung von Ausdrücken der Form $\sum_{i=1}^n p_i \log_2 \frac{1}{p_i}$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ und $0 \leq p_i \leq 1$ sind für $p = 0(0,001)0,5$ und $q = 1 - p$ mit 6 Dezimalen $-\log_2 p$, $-p \log_2 p$, $-(p \log_2 p + q \log_2 q)$, $-q \log_2 q$ und $\log_2 q$ vertafelt. Ein Schaubild gibt den Verlauf von $p \log_2 1/p$ für $0 \leq p \leq 1$ wieder. H. Unger.

● Jones, C. W.: A short table for the Bessel functions. $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $\frac{2}{\pi} K_{n+\frac{1}{2}}(x)$. London: Cambridge University Press 1952. 20 p. 6 s. 6 d.

● National Bureau of Standards: A guide to tables of the normal probability integral. (Applied Mathematics. Series 21) Washington: U. S. Government Printing Office 1952. 16 p. 15 cents.

Diemer, G. and H. Dijkstra: Langmuir's ξ, η tables for the exponential region of the $I_\alpha - V_\alpha$ characteristic. Philips Res. Rep. 7, 45—53 (1952).

Chandrasekhar, S., Donna Elbert and Ann Franklin: The X- and Y-functions for isotropic scattering. I. Astrophys. J. 115, 244—268 (1952).

Uhler, Horace S.: Many-figure approximations for $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{4}$ and $\sqrt[3]{9}$ with χ^2 data. Scripta math. 18, 173—176 (1952).

Von $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[3]{4}$ werden je 709 Stellen hinter dem Komma, von $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[3]{9}$ je 478 Stellen angegeben. H.-J. Kanold.

Myrholm, A. M. S.: Über das Wurzelausziehen. Mat. Tidsskr. A 1952, 22—39 (1952) [Dänisch].

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

● Laplace, Pierre Simon Marquis de: A philosophical essay on probabilities. — Transl. from the 6th French ed. by F. W. Truscott and F. L. Emory. New York: Dover 1952. VIII, 196 p., paper bound \$ 1,25; cloth bound \$ 2,50.

● Carnap, Rudolf: The continuum of inductive methods. Chicago: The University of Chicago Press 1952. 92 p. \$ 3,50.

Verf. behandelt die Methoden der Bekräftigung (confirmation) und der Schätzung (estimation). Erstere bestimmen ein Bekräftigungsmaß $c(h, e)$ einer Hypothese h auf Grund einer Menge e von Einsichten. Letztere geben eine Schätzung $e(r, M, e)$ für die relative Häufigkeit r einer Eigenschaft M in einer endlichen Gesamtheit auf Grund einer durch eine Stichprobe gewonnenen Einsicht e . Zwischen beiden gibt es eine ein-eindeutige Zuordnung c, e . Eine Analyse dieser Paare zeigt, daß ihr Kontinuum c_λ, e_λ also einparametrig ist. Insbesondere

ergibt sich der Parameter $0 \leq \lambda \leq \infty$ als „das relative Gewicht des in der Bestimmung von c_λ und e_λ steckenden logischen Faktors im Vergleich zum empirischen“. Bezeichnet nun e_M jene, durch eine s -gliedrige Stichprobe gewonnene Einsicht, nach welcher diese Stichprobe s_M Elemente mit der Eigenschaft M besitzt und h_M die Hypothese, gemäß welcher ein Element außerhalb der Stichprobe die Eigenschaft M aufweist, dann ist $c_\lambda(r, M, e_M) = c_\lambda(h_M, e_M)$. Für $\lambda = 0$ sind insbesondere beide gleich s_M/s . Dieser als „straight rule“ bezeichnete λ -Fall ist zwar nicht so unannehmbar wie der von Peirce, Keynes und Wittgenstein angenommene Fall $\lambda = \infty$ (welcher allen individuellen Verteilungen gleiche apriorische Wahrscheinlichkeit zuordnet), er zeigt aber noch immer gewisse Unzulänglichkeiten. Was nun die zu verschiedenen λ -Werten gehörigen Methoden anbelangt, läßt sich für eine Zustandsbeschreibung k ein von der Stichprobenweite unabhängiger und bezüglich der Häufigkeitsschätzung den minimalen quadratischen Fehler sichernder λ^d -Wert angeben. Für k mit maximaler bzw. minimaler Gleichmäßigkeit ergibt sich $\lambda^d = 0$ bzw. ∞ . Ein Beobachter kann bezüglich des entsprechenden λ^d allerdings nur eine positive untere Grenze λ' angeben. So ergibt sich ein λ' mit kleinerem mittleren quadratischen Fehler als für $\lambda = 0$. Dies spricht nach Verf. ernst gegen die $\lambda = 0$ -Methode und somit gegen die erwartungstreuen Schätzungen sowie gegen das Prinzip der maximalen Stichprobenwahrscheinlichkeit bzw. deren Dichte (likelihood). — In einem Anhang zeigt Verf., daß A. Walds Minimax-Prinzip bezüglich der relativen Häufigkeit zu einem ungünstigen Ergebnis führt und gibt eine zu dem λ -System gehörige vorteilhaftere Schätzungsfunktion an.

T. Szentmártony.

Moran, P. A. P.: A characteristic property of the Poisson distribution. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 206—207 (1952).

X und Y seien unabhängige zufällige Veränderliche, die nur nichtnegative ganze Werte annehmen. Ist bei gegebener Summe $X + Y$ die bedingte Verteilung von X eine binomische Verteilung für alle $X + Y$ und existiert mindestens eine ganze Zahl i , so daß $P\{X = i\} > 0$ und $P\{Y = i\} > 0$ gilt, dann folgen sowohl X wie auch Y einer Poissonschen Verteilung und die binomische Verteilung ist dieselbe für alle $X + Y$.

G. Schulz.

Maritz, J. S.: Note on a certain family of discrete distributions. Biometrika 39, 196—198 (1952).

x_1, x_2, \dots, x_n seien korrelierte stochastische Veränderliche, deren jede einem Poissonschen Gesetz gehorcht. Verf. bestimmt die Verteilung von $z = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ und untersucht, welche Verteilungen zu der Klasse gehören, die man durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhält. Ein Beispiel dafür ist die negative Binomialverteilung (Pascalsche Verteilung). Es wird auf eine Anwendung auf die sogenannten c -Karten bei der statistischen Qualitätskontrolle hingewiesen.

G. Schulz.

Pollaczek, Félix: Fonctions caractéristiques de certaines répartitions définies au moyen de la notion d'ordre. Application à la théorie des attentes. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2334—2336 (1952).

X_1, X_2, \dots, X_n seien unabhängige Zufallsveränderliche, von denen jede dieselbe Verteilungsfunktion $f(t)$ besitzt. Die zugehörige charakteristische Funktion

$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zt} f(t) dt$ sei für $|R(z)| < \delta$ (mit $0 < \delta \ll 1$) regulär. Verf. gibt (ohne Beweise) unter Bezugnahme auf frühere Ergebnisse die charakteristischen Funktionen der Zufallsveränderlichen

$X_{n,v}(1, 2, \dots, n) = \max^{(v)}(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + \dots + X_n)$ ($n, v - 1 = 0, 1, \dots$) und ihre erzeugende Funktion. Dabei bedeutet $\max^{(v)}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für $n \geq v > 1$ die v -te der Zahlen a_i in nicht wachsender Reihenfolge aufgeschrieben. Für $v > n \geq 0$ sei $\max^{(v)} = 0$. Unter gewissen Voraussetzungen wird ferner der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und in der erzeugenden Funktion der charakteristischen Funktionen der Zufallsveränderlichen

$$X_{n,v,c}^+ = \max_{i=1, \dots, n}^{(v)+} \left(c + \sum_{\lambda=1}^i X_\lambda \right) - c, \quad a^+ = \text{Max}(a; 0),$$

der Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ durchgeführt.

J. Heinhold.

Pollaczek, Félix: Sur la répartition des périodes d'occupation ininterrompue d'un guichet. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2042—2044 (1952).

Im Anschluß an eine Arbeit von M. E. Borel (dies. Zbl. 26, 330) werden die Verteilungsfunktionen $g_n(t)$ für die Beschäftigungsperioden der Klasse n unter gewissen Annahmen angegeben. J. Heinhöld.

Goodman, Leo A.: A probabilistic approach to a system of integral equations. Proc. Amer. math. Soc. 3, 505—507 (1952).

The author considers the system of integral equations

$$G_n(y) = \int_0^y \Gamma(n, \alpha)^{-1} e^{-\omega} \omega^{n\alpha-1} d\omega = \int_0^{g(y)} H_{n-1}(g(y) - z; g) dH_1(z; g),$$

where $g(x) \geq 0$ is an increasing continuous function of $x \geq 0$ and

$$H_n(x; g) = \int_0^x H_{n-1}(x - z; g) dH_1(z; g), \quad H_0(x; g) = 1.$$

By a probabilistic approach, it is proved that the only function satisfying the system of equations for fixed α , $0 < \alpha \leq 2$, are $g(x) = cx$ ($c = \text{a constant}$). The result is applied to the statistics: Let X_1, X_2, \dots be a sequence of non-negative independent random variables with the same continuous distribution function $F(x)$ and let N_x be defined as the least n such that $X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1} > x$. If N_x has a distribution function of the form

$$\Pr \{N_x \leq n\} = e^{-f(x)} \left[1 + f(x) + \frac{1}{2!} f^2(x) + \dots + \frac{1}{[(n+1)\alpha - 1]!} f^{[(n+1)\alpha - 1]}(x) \right],$$

with fixed $\alpha = 1$ or 2 , for every positive x , then $F(x)$ must be of the gamma type

$$F(x) = 0 \text{ for } x < 0 \text{ and } = \int_0^x \Gamma(\alpha)^{-1} \beta^{-\alpha} \omega^{\alpha-1} e^{-\omega/\beta} d\omega \text{ for } x < 0.$$

In the case $\alpha = 1$, the same result was obtained by S. Nabeya without assuming the continuity of $F(x)$. K. Yosida.

Aoyama, Hirojiro: On Midzuno's inequality. Ann. Inst. statist. Math. 3, 65—67 (1952).

Unter der Annahme einer in $(-\infty, \infty)$ stetigen, bis zur 2-ten Ableitung differenzierbaren Wahrscheinlichkeitsintensität $f(x)$, die für große ganze λ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^\lambda f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^\lambda \cdot \frac{df}{dx} = 0$$

erfüllt, und für die $C = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^2 f}{dx^2} \right| e^{x^2/4} dx$ und für jedes reelle $\theta \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} |f(x)| dx$

existiert, beweist Verf. mit Hilfe der Entwicklung nach Hermite'schen Polynomen die Ungleichung

$$\Pr \{|x - E(x)| \geq k \cdot \sigma\} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2\lambda - 1)}{k^\lambda} \cdot [1 + g(\lambda, C)],$$

aus der man sofort durch Anwendung auf den Stichprobenmittelwert \bar{x} die von H. Midzuno [Ann. Inst. statist. Math. 2, 21—33 (1950)] angegebene Ungleichung gewinnt. M.-P. Geppert.

Sverdrup, Erling: The limit distribution of a continuous function of random variables. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 1—10 (1952).

Es bezeichne S eine abgeschlossene (möglicherweise mehrdimensionale) Menge mit ihrer ε -Nachbarschaft S_ε , ferner $(X^{(n)})$ eine Folge von Vektoren mit $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X^{(n)} \in S_\varepsilon\} = 1$ und X einen Vektor mit $P\{X \in S\} = 1$. Ist dann die Grenzfunktion der Verteilungsfunktionen der $X^{(n)}$ die Verteilungsfunktion von X in den Stetigkeitspunkten der letzteren, so gilt, wie Verf. beweist, dasselbe von den Verteilungsfunktionen von $g(X^{(n)})$ und $g(X)$ mit einer in S stetigen skalaren Funktion g . Der Satz wird meistens als selbstverständlich betrachtet. Sätze von Slutsky und Cramér er-

geben sich als Sonderfälle und die bekannten Sätze über die asymptotische Verteilung des Stichproben-Korrelationskoeffizienten sowie der Pearsonschen χ^2 -Summe als leichte Anwendungen des bewiesenen Satzes.

T. Szentmártony.

Lévy, Paul: Convergence des séries aléatoires et loi normale. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2422—2424 (1952).

Let $\{X_n\}$ be a sequence of independent real random variables subject to the same probability law with mean 0 and variance V . In case $V < \infty$, as is well-known, it is necessary and sufficient for $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$, to be almost surely convergent that $\sum a_n^2$ is convergent. But in case $V = \infty$ this condition is only necessary but not sufficient. The author deals with some curious properties in this case and states the following results. There is given an interesting example for which $\sum a_n^2 < \infty$ and S_n is asymptotically normal. Under some natural conditions it is necessary and sufficient for S_n to be asymptotically normal that $\sum a_n X_n$ is almost surely divergent.

K. Itô.

Darling, D. A.: The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. Trans. Amer. math. Soc. **73**, 95—107 (1952).

Bei unabhängigen Zufallsveränderlichen X_i mit derselben Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - G(x)$ sei $\gamma = \sup \varrho \geq 0$ mit $E(|X_i|^e) < \infty$. Die Verteilungsfunktionen geeigneter $a_n S_n + b_n = a_n (X_1 + \dots + X_n) + b_n$ streben dann bei $\gamma > 2$ gegen die Normalverteilung und bei $0 < \gamma < 2$ unter gewissen, von Doeblin 1947 festgestellten Bedingungen noch gegen nicht entartete stabile oder quasistabile Verteilungen. Verf. behandelt nun den Fall $\gamma = 0$, in welchem die $a_n S_n + b_n$ nach P. Lévy (1935) zu einer entarteten Verteilung führen und das größte Glied X_n^* in S_n hierbei ausschlaggebend ist. Es wird zunächst festgestellt, daß in diesem Fall bei $X_i \geq 0$ im Mittel erster Ordnung $S_n/X_n^* \rightarrow 1$, wenn $\lim_{x \rightarrow \infty} [G(\alpha x)/G(x)] = 1$

für jedes $\alpha > 0$ ist. Bei den zuletzt angegebenen Bedingungen ist übrigens $\lim_{x \rightarrow \infty} P\{n G(S_n) < y\} = 1 - e^{-y}$, und als eine unmittelbare Verallgemeinerung des

Doebblinschen gilt folgender Satz. Ist $G(x) = G_1(x) = 1 - F(x)$ bzw. $= G_2(-x) = F(x)$ für $x \geq$ bzw. < 0 und $\lim_{x \rightarrow \infty} [G_i(\alpha x)/G_i(x)] = 1$ bei $i = 1, 2$ sowie

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{G_1(x)/[G_1(x) + G_2(x)]\} = p = 1 - q$, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{n G(S_n) < y\} = 1 - p e^{-y/p} - q e^{-y/q}$. Abschließend werden im Falle $0 < \gamma < 2$ drei Sätze über die asymptotische Verbindung von S_n und X_n^* angegeben.

T. Szentmártony.

Lipschutz, Miriam: Generalization of a theorem of Chung and Feller. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 659—670 (1952).

Gegeben sei eine Folge X_k ($k = 1, \dots, n$) von unabhängigen Zufallsvariablen mit einer gemeinsamen Verteilungsfunktion $F(x)$, die (a) den Mittelwert 0, die Streuung 1 sowie ein endliches viertes Moment und (b) eine Gitterverteilung besitzen, so daß die kleinsten Sprungabstände eine Einheit betragen (die X_k daher nur ganze Zahlen annehmen können). Es sei ferner $S_n = X_1 + \dots + X_n$ und es bezeichne N_n die Anzahl der positiven Glieder in der Folge S_1, S_2, \dots, S_n , wobei ein S_μ als positiv angesprochen wird, wenn entweder $S_\mu > 0$ oder $S_\mu = 0$ aber $S_{\mu-1} > 0$ ist. Dann gilt, wie Verf. in der vorliegenden Arbeit beweist,

$$P(N_n \leq \alpha n | S_n = 0) = \frac{[\alpha n] + 1}{n + 1} + g(n) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

wobei $g(n) = O(\log n/n^{1/30})$ ist, wenn die Zufallsvariablen das dritte Moment 0 besitzen, und $g(n) = O(\log n/n^{1/72})$ ist, wenn sie ein von 0 verschiedenes drittes Moment haben. Der Spezialfall, daß die X_k nur die Werte 1 oder -1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ annehmen können, wurde bereits von Chung und Feller (dies. Zbl **37**, 363) untersucht. Zum Beweise zieht Verf. eine Verallgemeinerung

des Invarianzprinzips von Erdős-Kac (dies. Zbl. 32, 35) und den mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz für Gitterverteilungen von Esseen (Acta math. 77, 1 (1945)) heran.
G. Friede.

Foster, F. G.: A Markov chain derivation of discrete distributions. Ann. math. Statistics 23, 624—627 (1952).

Verf. gibt ein Verfahren an, das gestattet, ausgehend von einer Folge $\{a_i\}$ positiver Zahlen eine unendliche, nicht zerfallende Matrix \mathfrak{A} von Übergangswahrscheinlichkeiten zu konstruieren, die zu einer aperiodischen Markoffschen Kette gehört. $\mathfrak{x} = (x_0, x_1, \dots)$ sei die der Matrizengleichung $\mathfrak{x} \mathfrak{A} = \mathfrak{x}$ genügende stationäre Verteilung. Die x_i sind leicht durch die a_i ausdrückbar. Umgekehrt kann aus einer vorgegebenen Verteilung \mathfrak{x} die Folge $\{a_i\}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor eindeutig berechnet werden. — Als Beispiele werden die a_i berechnet, wenn \mathfrak{x} erstens eine Poissonsche Verteilung, zweitens eine Pascalsche Verteilung (negative Binomialverteilung) ist.
G. Schulz.

Radek, H.: Ein Problem verketteter Wahrscheinlichkeiten. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 208—222 (1952).

Gegeben sind zwei Klassen K_1 und K_2 von n_1 bzw. n_2 Elementen. Bei einem Schritt wählt jedes Element von K_1 unabhängig von den übrigen Elementen der Klasse ein und nur ein Element von K_2 und löscht dieses mit einer Wahrscheinlichkeit w_2 , und jedes Element von K_2 wählt ein und nur ein Element von K_1 und löscht dieses mit einer Wahrscheinlichkeit w_1 . Jedes Element kann dabei von mehreren der anderen Klasse gewählt, aber nur einmal gelöscht werden. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach dem $(n+1)$ -ten Schritt in K_1 genau s_1 und in K_2 genau s_2 Elemente vorhanden sind. Die hierbei auftretende Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten enthält oberhalb der Hauptdiagonale nur Nullen, so daß sich ihre Potenzen leicht berechnen lassen. Schließlich wird noch der kontinuierliche Fall betrachtet, in dem an die Stelle der Schrittnummer n die Zeit t tritt.
G. Schulz.

Blanc-Lapierre, André: Remarques sur un théorème d'interpolation. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1733—1735 (1952).

The author discusses a certain stationary process $X(t)$ satisfying an interpolation formula of the form:

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(t - \lambda n) \varphi(t - t_0 - \lambda n).$$

Under some appropriate conditions the function $\varphi(t)$ is determined, if $X(t - \lambda n)$ be non-correlated. If $X(t - \lambda n)$ be independent, the process becomes Gaussian under the same conditions.
K. Itô.

Gardner, A.: Greenwood's „problem of intervals“: An exact solution for $N=3$. J. Roy. statist. Soc., Ser. B 14, 135—139 (1952).

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte von $S = \sum x_i^2$ bei zufälligen $x_i > 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ gewinnt Verf. durch eine geometrische Betrachtung das folgende genaue Resultat in den durch die Werte $1/4, 1/3, 1/2, 1$ bestimmten drei abgeschlossenen Teilintervallen: $6\pi(S - 1/4)^{1/2}, 2\pi[\sqrt{3} - 3(S - 1/4)^{1/2}]$ und

$$2\pi[\sqrt{3} - 6(S - 1/4)^{1/2}] - 36(S - 1/4)^{1/2} \arcsin \left[\frac{2S - 1/2}{3S - 1} \right]^{1/2} \\ - 6\sqrt{3} \left[\arccos(6S - 2)^{-1/2} + \frac{3S - 5/6}{(6S - 3)^{1/2}(6S - 2)} \right] + \frac{18S - 5}{(2S - 1)^{1/2}(6S - 2)}.$$

T. Szentmártony.

Lauwerier, H. A.: A linear random walk with a partly reflecting partly absorbing barrier. Appl. sci. Research, B 2, 294—300 (1952).

The author deals with a linear random walk with a barrier at which the chance of absorption is p and that of reflection $(1 - p)$. He considers the probabilities of

reaching given points after a number n of steps and derives an asymptotic expression for large n . Hence he makes it plausible that this probability is approximately equal to the mean, with weights p and $1 - p$, of the probabilities with certain absorption ($p = 1$) and certain reflection ($p = 0$), respectively. *S. Vajda.*

Bellman, Richard: On games involving bluffing. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 139—156 (1952).

The author constructs games which may be considered as simplified, continuous, models with two players of such card games as „twenty-one“ or Poker. He finds the optimal strategies, in the sense of the Theory of Games, and finds that they are pure in all cases which he considers. They also contain moves which can be described as „bluffing“, since they mean high bidding on low values of one's own card. One of his games was earlier dealt with in a paper of the same title, by the present author and D. Blackwell (this Zbl. 41, 448). *S. Vajda.*

Page, Chester H.: Instantaneous power spectra. J. appl. Phys. 23, 103—106 (1952).

Es wird die Vorstellung des „momentanen“ Leistungsspektrums einer Funktion der Zeit entwickelt. Die Vorstellung des „normalen“ Frequenzspektrums verlangt die Fourierintegration von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$. Praktisch ist man aber interessiert, was „jetzt“ passiert, und dies muß unabhängig davon sein, was das Signal in der Zukunft tut. Die Energie des Signals in der (t, f) - (Zeit-Frequenz-) Ebene sei durch $\varrho(t, f)$ gegeben. Wenn ein Signal $G(t)$ gegeben ist, das zur Zeit $t = T$ abgeschaltet wird, so läßt sich die „running transform“ von $G(t)$ durch $G_t(x) = G(x)$ für $x < t$, $= 0$ für $x > t$ als $g_t(f) = \int_{-\infty}^t G(x) e^{-2\pi i f x} dx$ definieren. Da für das momentane Leistungsspektrum gelten muß $\int_{-\infty}^t \varrho(x, f) dx = |g_t(f)|^2$, läßt sich daraus

$$\varrho(t, f) = \frac{\partial}{\partial t} |g_t(f)|^2 = 2 G(t) \Re e [e^{2\pi i f t} g_t(f)]$$

bestimmen. Für die Einheitsstufe, d. h. Gleichstrom 1 zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet, wird

$$g_t(f) = -(e^{-2\pi i f t} - 1)/2\pi i f \quad \text{und} \quad \varrho(t, f) = 2(\sin 2\pi f t)/2\pi f.$$

Das Spektrum hat die Form $(\sin x)/x$. Für jedes t ist das größte Maximum bei $f = 0$, und sein Wert $\varrho_m = 2t$ wächst unbegrenzt mit t . Mit wachsender Zeit wird das Spektrum immer mehr zum $f = 0$ konzentriert. — Die eingeschaltete Sinuswelle $G(t) = 0$ für $t < 0$, $= \sin 2\pi f_0 t$ für $t > 0$ ergibt

$$\varrho(f, t) = \frac{2}{\pi} f_0 \sin 2\pi f_0 t \frac{\sin \pi (f + f_0) t}{f + f_0} \cdot \frac{\sin \pi (f - f_0) t}{f - f_0},$$

dassich mit wachsender Zeit einer δ -Funktion bei $f = f_0$ und $f = -f_0$ nähert. — Die Vorstellung wird auch auf eine dauernd laufende Zufallsfunktion $G(t)$ angewendet, die bei $t = 0$ beginnt, und ergibt

$$\langle \varrho(t, f) \rangle_{A_v}^s = 2 \int_0^t \psi(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau,$$

wo $\psi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(t) G(t - \tau) dt$ die Autokorrelationsfunktion ist. $\langle \varrho(t, f) \rangle_{A_v}^s$ ist der stochastische Mittelwert, der bei einem ergodischen Prozeß gleich dem zeitlichen Mittel ist. Wenn die Zeit t_s nach Beginn so groß geworden ist, daß der Vorgang seinen Anfang „vergessen“ hat, d. h. daß $\psi(\tau) = 0$ für $\tau > t_s$ wird, hat das Spektrum seinen endgültigen Wert nahezu erreicht. Man hat dann einen zeitlich genügenden, endlichen Ausschnitt des Prozesses, der die Bestimmung des Leistungsspektrums ermöglicht. *W. O. Schumann.*

Sundström, Mauritz: Some statistical problems in the theory of servomechanisms. Ark. Mat. 2, 139—246 (1952).

The author deals with a number of topics which have their relevance to servomechanisms in common. They concern errors of measurements, inaccuracies introduced through the use of approximate formulae and problems of noise. Remarks are also made about some mathematical techniques in servo-theory and about information theory. *S. Vajda.*

Statistik:

● **Lambe, C. G.:** *Elements of statistics.* London, New York and Toronto: Longmans, Green and Co., Ltd., 1952. VIII, 112 p. 8 s. 6 d.

Das anspruchslose Büchlein gibt, hauptsächlich für Ingenieure gedacht, einen knappen Abriß der Elemente der Statistik: I. Häufigkeitsverteilungen und ihre Darstellung, Mittelwert; II. das Nötigste über Streuungsmaße, höhere Momente; III. kontinuierliche Verteilungen; IV. einfachste Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten; V. binomische und Poisson-Verteilung; VI. Normalverteilung; VII. Korrelationskoeffizient, Regression; VIII. Schätzung von Mittelwert und Varianz aus Stichproben; IX. Fehlerrechnung: Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate; X. Qualitätskontrolle, u. zwar Kontrollkarte für Mittelwert, Spannweite und Ausschußhäufigkeit in Stichproben. Jedem Kapitel sind zahlreiche numerische Übungsaufgaben beigelegt, deren Lösungen im Anhang gegeben werden. Am Ende kleine Tabellen der Flächen der Normalverteilung und der Quadrate von 100 bis 999.

M.-P. Geppert.

● **Waugh, Albert E.:** *Elements of statistical method.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill 1952. XV, 531 p. \$ 3,50.

Das vorliegende Buch ist gedacht für Neulinge, die sich die Anfangsgründe der Statistik aneignen wollen. Unter Verzicht auf jegliche höhere Mathematik und fast alle Beweise und unter starker Einschränkung des Formelapparates, aber desto eingehenderer Erörterung in Worten, wird verhältnismäßig viel Stoff bewältigt: So führt der Abschnitt über Korrelation — allerdings nur kursorisch — bis zu der in derartigen Büchern selten anzutreffenden n -dimensionalen multiplen Korrelation und (linearen und gekrümmten) Regression; und ein in dieser Auflage neu hinzugekommener Abschnitt ist der einfachen Varianzanalyse gewidmet. Besondere Sorgfalt widerfährt der Behandlung des Begriffes „Freiheitsgrade“. Umgestaltet wurden die sehr eingehenden Kapitel über Ausgleichung durch Geraden und andere wichtige Kurventypen im Hinblick auf die folgende Darstellung der Korrelation und Regression. Obwohl das Buch aus der Feder eines Volkswirtschaftlers stammt, liegt die Betonung sowohl in der Darstellung des Stoffes als auch in der Auswahl der zahlreichen Übungsaufgaben doch nicht einseitig auf wirtschaftlichem Gebiet. Mathematisch zu beanstanden sind einige unglückliche Formulierungen: die Abschnitte 7. 2, 8. 5, 8. 11 und 9. 4, die stets die binomische Verteilung als einzige „probability distribution“ hinstellen, könnten irreführen; die Fehlerformeln in 9. 4 setzen fast alle wenigstens approximativ gültige Normalverteilung voraus; ebenso vermißt man in den Abschnitten über Korrelation Hinweise auf die vorauszusetzende Binormalität der Ausgangsgesamtheit. Auch sollte man den Begriff des Korrelationskoeffizienten der Gerechtigkeit halber mit seinem Urheber Bravais in Verbindung bringen! Einwände dürften auch gegen die etwas laxe Behandlung und Interpretation der Begriffe Wahrscheinlichkeit, Fiduzialwahrscheinlichkeit, Fiduzial- und Konfidenzintervall zu erheben sein. Trotzdem wird das Buch — wie es die Auflagenzahl bestätigt (3. Auflage seit 1938) — den beabsichtigten Zweck durchaus erfüllen, da es fraglos einem echten Bedürfnis entspricht.

M.-P. Geppert.

● **Tippett, L. H. C.:** *The methods of statistics.* — 4th rev. ed. London: Williams and Norgate, Ltd.; New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952. 395 p. 38 s. net.

Castellano, Vittorio: *Einige Beiträge der italienischen Schule zur statistischen Methodenlehre.* *Mittel.-Bl. math. Statistik* 4, 87—120 (1952).

Der Aufsatz vermittelt einen klaren prägnanten Einblick in den stattlichen Beitrag, den die italienische Schule im letzten halben Jahrhundert zur Entwicklung der statistischen Methodik, und zwar ganz besonders der beschreibenden Statistik, geliefert hat. In 4 Kapiteln: 1. Mittelwert, 2. Streuungsmaße, 3. Transvariation und Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Rückschlüsse, 4. statistische Beziehungen, werden (1) Ginis allgemeine Mittelwertformel, Ausdehnung des Mittelwertbegriffs auf zyklische und nicht ordnungsfähige Merkmale, (2) Variabilität quantitativer und qualitativer Merkmalsreihen, mittlere Differenz und Konzentrationskurve und -maße, (3) Überlappung von Verteilungskurven, (4) Ginis Unähnlichkeits- und Verknüpfungsindices und deren Zusammenhang mit Korrelationskoeffizienten und -verhältnis dargestellt. In (3) findet Ginis bekannte Kritik an der Berechtigung der Signifikanzteste Erwähnung. Weitere wichtige Verfahren der italienischen Statistiker werden mit kurzen Hinweisen bedacht.

Sehr wertvoll ist das 179 Titel umfassende, entsprechend den Kapiteln 1—4 eingeteilte Literaturverzeichnis.

M.-P. Geppert.

● **Duncan, Acheson J.:** *Quality control and industrial statistics.* Chicago: Richard D. Irwin, Inc., 1952. XXVII, 400 p. \$ 8,00.

Cavé, René: *Contrôle statistique par calibres modifiés d'efficacité optima.* C. r. Acad. Sci., Paris **235**, 935—937 (1952).

Verf. dehnt seine früheren (dies. Zbl. **46**, 365), für Meßgrößen geltenden Gedankengänge aus auf den Fall, in welchem die Güte des Fabrikationsartikels nicht auf Grund des genauen Wertes einer Meßgröße beurteilt wird, sondern nur auf Grund des Über- oder Unterschreitens einer festen Schranke L derselben. Bei gegebenen Risiken 1-ter und 2-ter Art werden aus der Operationscharakteristik Stichprobenumfang n , Höchstanzahl k der zulässigen Ausschußstücke und L optimal bestimmt. Verf. vergleicht ferner die Wirksamkeit des hier untersuchten „Kaliber“-Vorgehens mit dem auf den genauen Meßwerten beruhenden und zeigt, daß zur Erzielung gleicher Operationscharakteristik das letztere Verfahren statt n Proben näherungsweise nur $n_m \sim 2n/\pi$ Proben erfordert.

M.-P. Geppert.

Fabbri, Evelio O.: *Zeitreihen und ihre methodologische Behandlung.* An. Soc. ci. Argentina **154**, 131—136 (1952) [Spanisch].

Loraine, Phyllis K.: *On a useful set of orthogonal comparisons.* J. Roy. statist. Soc., Ser. B **14**, 234—237 (1952).

Cox, D. R.: *Some recent work on systematic experimental designs.* J. Roy. statist. Soc., Ser. B **14**, 211—219 (1952).

Tocher, K. D.: *The design and analysis of block experiments.* J. Roy. statist. Soc., Ser. B **14**, 45—100 (1952).

The author states that his paper has a threefold purpose. (1). Matrix methods are used to give a systematic derivation of the analysis of block experiments. It is shown how a given design can be described in matrix notation and how the variance matrix of the parameter estimates can be computed. This is illustrated by a variety of designs, though factorial arrangements (which consider interactions of various orders) and confounding are not considered. (2). The computations are exhibited in a form suitable for automatic computers. The author aims at a general purpose programme, so devised that the complications necessary in complex design are automatically avoided in the case of simpler designs. This is illustrated by an analysis of spoiled trials. (3). His method is capable of determining conditions which must be satisfied so that a design should have given characteristics. This is illustrated, in particular, by some new designs which he calls Ternary, Equigroup and Mixed Group Balanced Designs.

S. Vajda.

Hyrenius, Hannes: *Sampling from bivariate non-normal universes by means of compound normal distributions.* Biometrika **39**, 238—246 (1952).

Verf. dehnt seine früheren Untersuchungen (dies. Zbl. **39**, 145) über Stichprobenentnahme aus nicht normal verteilten eindimensionalen Gesamtheiten aus auf zweidimensionale. Er betrachtet eine aus mehreren Binormalverteilungen Φ_i mit Mittelwerten α_{1i}, α_{2i} , Streuungen σ_{1i}, σ_{2i} und Korrelationskoeffizienten ρ_i zusammengesetzte Ausgangsgesamtheit mit der Verteilung

$$f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum p_i \Phi_i(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (\sum p_i = 1)$$

und bestimmt die charakteristische Funktion der Simultanverteilung der ersten 5 Momente (d. h. 2 Mittelwerte und 3 Schwerpunktsmomente) $\bar{x}_1, \bar{x}_2, m_{20}, m_{02}, m_{11}$. Für den Spezialfall der Homogenität der Ausgangsgesamtheit bezüglich der 2-ten Momente ($\sigma_{1i} = \sigma_1, \sigma_{2i} = \sigma_2, \rho_i = \rho$) wird hieraus die genannte Simultanverteilung explizit gewonnen, und hieraus die Verteilung des Stichproben-Korrelationskoeffizienten r und -Regressionskoeffizienten b .

M.-P. Geppert.

Dalenius, Tore: Eine einfache geometrische Veranschaulichung der Theorie des geschichteten Stichprobenverfahrens. *Mittel.-Bl. math. Statistik* 4, 121—128 (1952).

Zur Schätzung des arithmetischen Mittels

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^k p_i \bar{Y}_i$$

einer k -schichtigen Gesamtheit durch dasjenige \bar{y} einer geschichteten n -gliedrigen Stichprobe wird die Aufteilung von n auf die k Schichten beim Bowley-Schema nach $n_i:n_j = p_i:p_j$, beim Neyman-Schema, welches die Varianz von \bar{y} ,

$$V(\bar{y}) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i^2 \sigma_i^2}{n_i},$$

zum Minimum macht, nach $n_i:n_j = p_i \sigma_i:p_j \sigma_j$ vorgenommen. Verf. deutet die Situation für $k=2$ geometrisch durch Veranschaulichung in einem rechtwinkligen (n_1, n_2) -Achsensystem. Anschließend wird auf Grund dieser Darstellung bzw. einer entsprechenden Deutung von n_1^{-1}, n_2^{-1} als Cartesische Koordinaten das optimale Wertepaar n_1, n_2 bestimmt, welches gleichzeitig die Varianzen $V(\bar{x}), V(\bar{y})$ zweier Stichprobenmittelwerte \bar{x}, \bar{y} auf Grund der gleichen Stichprobenschichtung $n_1 + n_2 = n$ zum Minimum macht. M.-P. Geppert.

Woodruff, Ralph S.: Confidence intervals for medians and other position measures. *J. Amer. statist. Assoc.* 47, 635—646 (1952).

Fraser, D. A. S.: Confidence bounds for a set of means. *Ann. math. Statistics* 23, 575—585 (1952).

Given n normally and independently distributed variables x_i with means μ_i and known variance, the author finds the confidence interval of the form $g(x_1, \dots, x_n) \geq \mu_1, \dots, \mu_n \geq h(x_1, \dots, x_n)$ with level $\geq \beta$ (a given constant) and also an interval where h is replaced by $-\infty$. He shows that it is in general, not possible to find an interval with level precisely $= \beta$ if certain mild and reasonable conditions are satisfied. Non-normal variables are also briefly considered. S. Vajda.

Linnik, Ju. V.: Lineare Statistiken und normales Verteilungsgesetz. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 83, 353—355 (1952) [Russisch].

Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ die Werte von unabhängigen Beobachtungen bezüglich einer Zufallsveränderlichen ξ ; es seien $L_1(\xi) = \sum_{i=1}^r a_i \xi_i$ und $L_2(\xi) = \sum_{i=1}^r b_i \xi_i$, „lineare Statistiken“,

gebildet aus diesen Beobachtungswerten, wo a_i und b_i Konstanten mit 1. $\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{i=1}^r b_i$

und 2. $\sum_{i=1}^r |a_i|^2 = \sum_{i=1}^r |b_i|^2$ sind. Dann haben $L_1(\xi)$ und $L_2(\xi)$ immer denselben Erwartungswert und dieselbe Streuung. Wenn das Verteilungsgesetz von ξ ein normales ist, so sind $L_1(\xi)$, und $L_2(\xi)$ auch normal verteilt, und so haben sie wegen 1. und 2. das gleiche (normale) Verteilungsgesetz. Verf. zeigt, daß auch umgekehrt aus der Voraussetzung, daß $L_1(\xi)$ und $L_2(\xi)$ dieselbe Verteilung besitzen, die normale Verteilung von ξ folgt, vorausgesetzt, daß die Koeffizienten a_i und b_i den folgenden Bedingungen genügen: Alle Wurzeln von

$$(1) \quad \sigma(z) = \sum_{i=1}^r (|a_i|^z - |b_i|^z) = 0,$$

die durch 4 teilbare ganze Zahlen sind, sind einfach; alle Wurzeln von (1), die ganze Zahlen der Form $4k+2$ sind, sind höchstens zweifache Wurzeln; wenn eine dieser Wurzeln wirklich zweifach ist, so ist nur eine solche vorhanden und dann ist es die größte positive Wurzel von (1). Endlich, wenn (1) eine solche positive Wurzel γ besitzt, welche keine gerade ganze Zahl ist, so ist γ die einzige solche Wurzel, ferner ist γ zugleich die größte positive Wurzel von (1) und der ganze Teil von γ ist ungerade. Diese Bedingungen sind nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, wenn nicht alle Momente von ξ existieren. Damit gibt Verf. die Antwort auf eine Frage, die J. Marcinkiewicz gestellt hat (dies. Zbl. 19, 317). — Obiger Satz kann angewendet werden, um ein Kriterium für die Normalität der Verteilung von ξ zu gewinnen; man kann in der Tat aus den Werten einer Stichprobe von n Beobachtungen n lineare Formeln vom Typ $L_1(\xi)$ bzw.

$L_2(\xi)$ bilden und die so erhaltenen Werte einer Homogenitätsprüfung unterwerfen, z. B. dem bekannten Kriterium von N. V. Smirnov (dies. Zbl. 22, 245) betreffend den Vergleich von zwei empirischen Verteilungsfunktionen, bzw. die für endliche n gültige Form dieses Kriteriums, welches von B. V. Gnedenko und V. S. Koroljuk (dies. Zbl. 44, 136) gegeben wurde, oder auch ein anderes ähnliches Kriterium anwenden. Dazu muß man passende Koeffizienten a_i und b_i wählen, für welche die obengenannten Bedingungen gültig sind; solche Koeffizientenfolgen werden in der Arbeit angegeben.

A. Rényi.

Schmetterer, L.: Über ein Beispiel aus der Statistik. Z. angew. Math. Mech. 32, 281—284 (1952).

Es seien X_1, X_2, \dots , unabhängig nach einer Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Streuung σ^2 verteilt. Verf. betrachtet Summen $x^{(1)} = \sum_{i=1}^n X_i$ und $x^{(2)} = \sum_{i=1}^n X_i^2$, wenn n unabhängig von den X_i geometrisch verteilt ist. Aufgaben dieser Art sind früher u. a. von Feller und Robbins behandelt. Die Verteilungsfunktionen von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ werden berechnet. Es wird für $x^{(2)}$ auch der Fall betrachtet, daß n die Bedingung erfüllt, immer gerade zu sein. Die Verteilungsfunktion wird dann besonders einfach. Die Prüfung von Mittelwerten der Beobachtungen von $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ wird in gewöhnlicher Weise durchgeführt. Es werden Schätzungsfunktionen und zugehörige Vertrauensintervalle für die Größe q angegeben, die gemäß $W(n=N) = p^{N-1} q$, die Wahrscheinlichkeit von n bestimmt.

H. Bergström.

Lukacs, Eugene: The stochastic independence of symmetric and homogeneous linear and quadratic statistics. Ann. math. Statistics 23, 442—449 (1952).

Die Mittelwerte und Streuungsquadrate der n -gliedrigen Stichproben x_1, \dots, x_n sind bekanntlich unter den stetig verteilten Gesamtheiten nur bei der Normalverteilung voneinander unabhängig verteilt. Verf. zeigt allgemeiner, daß die Mittelwerte $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ der Stichproben dann und nur dann unabhängig von den symme-

trischen homogenen, quadratischen Statistiken $Q = a \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^2$ verteilt sind, wenn die Gesamtheit eine a) normale, b) entartete oder schließlich c) treppentartige Verteilungsfunktion mit nur zwei um den Erwartungswert symmetrischen Sprungstellen besitzt. Im ersten Fall ist Q dem Streuungsquadrat der Stichprobe proportional und im letzten ist $a = 0$, $b = 1$.

T. Szentmártony.

Birnbaum, Z. W.: Numerical tabulation of the distribution of Kolmogorov's statistic for finite sample size. J. Amer. statist. Assoc. 47, 425—441 (1952).

Verf. tabuliert die aus dem Jahre 1933 stammende, wenig bekannte Kolmogorovsche Angabe $P \{ \sup |F(x) - F_n(x)| < c/n \} = n! (e/n)^n R_{0,n}(c)$ über die stetige Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Gesamtheit auf Grund der Verteilungsfunktion $F_n(x)$ einer aus ihr entnommenen n -gliedrigen Stichprobe. Dabei ist $R_{0,0}(c) = 1$, $R_{i,0}(c) = 0$ für $i \neq 0$, $R_{i,k}(c) = 0$ für $|i| \geq c$ und $R_{i,k+1}(c) = \frac{1}{c} \sum_{s=0}^{2c-1} R_{i+1-s,k}(c) \frac{1}{s!}$ für $|i| \leq c-1$. Es wird zu diesem Zweck die letzte Summe auf $r < 2c-1$ verstümmelt, und die teils dadurch, teils durch Abrundung entstehenden Fehler werden abgeschätzt. Die für $n = 1$ bis 100 sowie $c = 1$ bis 8 bzw. 15 so berechnete Tabelle ist von grundlegender Bedeutung für die statistische Praxis, da die von F. J. Massey unlängst berechnete weder diese Vollständigkeit noch dieselbe Genauigkeit besitzt. Eine gekürzte Tabelle gibt die 95 bzw. 99 Prozentpunkte der Verteilung an. Es ergibt sich z. B., daß erst $n = 65$ eine 0,9 übertreffende Wahrscheinlichkeit eines Vertrauensstreifens von der Halbbreite $c/n = 0,15$ sichert. Für die Halbbreite 0,05 mit der Wahrscheinlichkeit 0,99 muß und kann schon die Smirnovsche Tabelle für den asymptotischen Kolmogorovschen Satz

$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ \sup |F(x) - F_n(x)| < \frac{c}{\sqrt{n}} \} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2 c^2}$ angewendet werden, was

$n = 1060$ ergibt. — Ein Überblick über andere bekannte Verfahren zeigt den entscheidenden Vorteil der Kolmogorovschen Statistik. T. Szentmártony.

Salvemini, T.: L'indice di dissomiglianza fra distribuzioni continue. *Metron* 16, Nr. 3—4, 75—100 (1952).

L'A. fa una trattazione nel continuo degli indici di dissomiglianza del Gini, indici che vengono adoperati, tra l'altro, per lo studio della connessione, della asimmetria, della anormalità, e di vari altri aspetti. — In particolare calcola l'espressione degli indici di dissomiglianza fra distribuzioni normali aventi media e varianza diversa. — Perfeziona infine il metodo di calcolo di tali indici per distribuzioni discontinue. E. Pizzetti.

Drion, E. F.: Some distribution-free tests for the difference between two empirical cumulative distribution functions. *Ann. math. Statistics* 23, 563—574 (1952).

Verf. untersucht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die empirischen Kumulativverteilungskurven zweier Stichproben vom Umfang n_1 bzw. n_2 aus derselben kontinuierlich verteilten Gesamtheit sich zwischen Anfangs- und Endpunkt nicht schneiden. Im Falle $n_1 = n_2 = n$ ist sie $1/(2n-1)$, im Falle teilerfremder n_1, n_2 hingegen $2/(n_1 + n_2)$ und im Falle eines größten gemeinsamen Teilers $d > 1$ von n_1, n_2 kleiner als $2/(n_1 + n_2)$. Ferner leitet Verf. im Falle $n_1 = n_2 = n$ die exakte Wahrscheinlichkeit

$$2 \cdot \left\{ \binom{2n}{n-h} - \binom{2n}{n-2h} \pm \dots \right\} / \binom{2n}{n}$$

dafür her, daß die maximale Differenz der beiden Kumulativ-Verteilungskurven mindestens h/n sei. Mittels der Stirlingschen Formel läßt sich hieraus die von N. Smirnov selbst (dies. Zbl. 31, 370) seinem Test zugrunde gelegte asymptotische Verteilungsformel gewinnen. M.-P. Geppert.

Goodman, Leo A.: On the analysis of samples from k lists. *Ann. math. Statistics* 23, 632—634 (1952).

Let lists L_i ($i = 1, \dots, k$) of names be given, containing N_i names so that no name appears more than once on any single list, and let $[t]$ be a set of t given lists. Suppose then a random sample of size N_i/g_i to be drawn from every list L_i contained by $[t]$. If $e_{[t]}$ is the number of names which occur in common in all t samples, then the author shows that $\prod_i g_i e_{[t]}$ is an unbiased (though not a sufficient) estimator of the

number of names common to all those lists. He also derives an unbiased estimator of the number of names which appear in t lists and proves that these estimators are the only unbiased ones. S. Vajda.

Paulson, Edward: An optimum solution to the k -sample slippage problem for the normal distribution. *Ann. math. Statistics* 23, 610—616 (1952).

Den k mit unbekannten Mittelwerten m_i und gemeinsamer unbekannter Varianz σ^2 normal verteilten Gesamtheiten Π_i ($i = 1, \dots, k$) sei je eine n -gliedrige Stichprobe mit dem Mittelwert \bar{x}_i entnommen, wobei $\bar{x}_M = \max(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$. D_0 bedeute die Entscheidung $m_1 = \dots = m_k$, D_j die Entscheidung $m_j = \max(m_1, \dots, m_k)$. Verf. beweist, daß die Entscheidungsregel: D_M bzw. D_0 zu wählen, je nachdem

$$\frac{n \cdot (\bar{x}_M - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=1}^n (x_{i\alpha} - \bar{x})^2}} > \text{bzw.} \leq \lambda_\alpha \quad \left(\text{mit } \bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \right),$$

„optimal“ ist, d. h. die Wahrscheinlichkeit einer richtigen Entscheidung im Falle $m_1 = \dots = m_{i-1} = m_{i+1} = \dots = m_k$, $m_i = m_1 + \Delta$ zum Maximum macht, unter der Einschränkung, daß a) die Wahrscheinlichkeit für D_0 , wenn in Wahrheit $m_1 = \dots = m_k$ ist, $1 - \alpha$ betrage, ferner die Entscheidungsregel invariant sei gegenüber b) Addition der gleichen Konstanten und c) Multiplikation mit der gleichen positiven Konstanten, ausgeführt für alle Beobachtungen, d) symmetrisch

bezüglich der Gesamtheiten Π_i . Die von $\Delta > 0$ und σ nicht abhängige Konstante λ_α ist aus Bedingung a) zu bestimmen und wird von Verf. durch

$$\lambda_\alpha \sim \sqrt{n \cdot (k-1) \cdot F_0 / k \cdot (n'' + F_0)}$$

mit $n'' = k \cdot (n-1) + k-2$ approximiert, wo F_0 auf Grund der F -Verteilung mit n_1 und n'' Freiheitsgeraden der mit Wahrscheinlichkeit $2\alpha/k$ überschrittene F -Wert ist.

M.-P. Geppert.

Horvitz, D. G. and D. J. Thompson: A generalization of sampling without replacement from a finite universe. *J. Amer. statist. Assoc.* **47**, 663—685 (1952).

The authors consider sampling schemes without replacement from finite populations in which the items have unequal probabilities of being selected. They deduce general formulae for the estimator of the population total of a variable x and for the variance of that estimator. They show, in particular, that there is only one linear unbiased estimator of the form $\sum \beta_i x_i$ where the β_i are constants to be used for the i -th element in the population, whenever it is selected for the sample. After applying their formulae to known sampling schemes they consider two designs for determining optimal selection probabilities when information is available from an ancillary variable.

S. Vajda.

Chandler, K. N.: The distribution and frequency of record values. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **14**, 220—228 (1952).

Let x_u ($u = 1, 2, \dots$) be independent sample values from a continuous universe. Let $X_1 = x_1$ and, if $X_i = x_{u_i}$, let X_{i+1} equal the first x_u after x_{u_i} which is smaller. The author derives the distribution of X_n (involving terms of the incomplete gamma-function), the distribution of u_n (this distribution has no finite mean for $n \geq 2$), and the distribution of $u_n - u_{n-1}$ (this distribution has its mode at 1). Some further properties of these distributions are demonstrated and fairly extensive tables are given.

S. Vajda.

Smith, C. A. B.: A simplified heterogeneity test. *Ann. Eugenics* **17**, 35—36 (1952).

A previously proposed test of heterogeneity of proportions [*Ann. Eugenics* **16**, 16—25 (1951)] which is expected to be more powerful than chi square, and at any rate can be used also when the proportions expected in some cells are low, is further simplified, and easier formulae are given together with a fully worked out numerical example.

L. Cavalli.

Wilson, Edwin B.: Barnard's CSM test of significance. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 899—905 (1952).

Erörterungen über G. A. Barnards (dies. Zbl. **29**, 156) Methode des Häufigkeitenvergleichs und Gegenüberstellung derselben mit R. A. Fishers exaktem Test. Illustration an Zahlenbeispielen.

M.-P. Geppert.

David, F. N. and N. L. Johnson: Extension of a method of investigating the properties of analysis of variance tests to the case of random and mixed models. *Ann. math. Statistics* **23**, 594—601 (1952).

The linear hypothesis which the authors considered in an earlier paper (this Zbl. **43**, 345) is extended by replacing the parameters by random variables with expected values zero. The power function is approximated by finding a frequency curve which has the same first four moments as the relevant linear form of sums of squares. The special cases of normality and of correlated variables are considered in some detail.

S. Vajda.

Hodges, jr., J. L. and E. L. Lehmann: The use of previous experience in reaching statistical decisions. *Ann. math. Statistics* **23**, 396—407 (1952).

Consider a decision problem with parameter θ , decision function δ , and risk function $R_\delta(\theta)$. The minimax principle forces us to act as if θ were following the least favorable apriori distribution. In practice, we may from previous experience have

a quite different idea about θ , e. g., that θ is distributed according to a certain distribution λ . Under such circumstances, a reasonable compromise seems to be to choose δ so as to minimize the Bayes risk $\int R_\delta(\theta) d\lambda$ subject to a safeguarding restriction $\sup_{\theta} R_\delta(\theta) \leq C_0$, where C_0 is a number somewhat larger than the minimax risk. Following up this very promising approach, the author proves three theorems of which we quote Theor. 1: Let λ, μ be apriori distributions, form their weighted mean $\nu = \varrho \lambda + (1 - \varrho) \mu$ ($0 < \varrho \leq 1$), and let δ be a Bayes solution corresponding to ν . If

$$(1) \quad \int R_\delta(\theta) d\mu = \sup_{\theta} R_\delta(\theta),$$

then δ is a restricted Bayes solution in the sense explained above, corresponding to the „guessed“ apriori distribution λ and the „allowed“ maximum risk $C_0 = \sup_{\theta} R_\delta(\theta)$. By means of this theorem it is sometimes possible to find the restricted solution by varying μ over an appropriate family of distributions and picking the one for which (1) is satisfied. — Several extensions and examples are given.

G. Elfving.

Lehmann, E. L.: On the existence of least favorable distributions. *Ann. math. Statistics* **23**, 408—416 (1952).

In his general existence theorems for least favorable apriori distributions, Wald has imposed a compactness assumption on the parameter space. The author shows that this assumption can be dispensed with for certain classes of problems. This is the case, e. g., when a hypothesis is tested on a given level α , the alternative hypothesis being that the observed variable has a density function $g_\theta(x)$, $\theta \in \Omega \subset R_s$, continuous in θ and fulfilling a certain condition which prevents the far-off parts of Ω from influencing the game. The results are extended to variable loss functions and multiple decision problems.

G. Elfving.

May, Kenneth O.: A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision. *Econometrica* **20**, 680—684 (1952).

Eine Gruppe von n Individuen habe zwischen 2 Alternativen x, y zu entscheiden. Die Entscheidungsfunktion D_i des Individuums i hat die Werte $+1, -1, 0$ je nachdem letzteres x oder y bevorzugt oder indifferent bleibt. Die Entscheidung der Gesamtgruppe lautet für x , für y oder Indifferenz je nachdem die aus den n einzelnen D_i bestimmte Gruppenentscheidungsfunktion

$$D = f(D_1, D_2, \dots, D_n)$$

den Wert $+1, -1$ oder 0 annimmt. Verf. beweist, daß dafür, daß D der einfachen Mehrheitsentscheidung entspreche, folgende Bedingungen notwendig und hinreichend sind: I. D immer entscheidend, d. h. D ist definiert und eindeutig für jedes mögliche n -Tupel (D_1, \dots, D_n) ; II. Anonymität, d. h. Symmetrie von D bezüglich aller Argumente; III. Neutralität, d. h.

$$f(-D_1, \dots, -D_n) = -f(D_1, \dots, D_n);$$

IV. Wenn $D = f(D_1, \dots, D_n) = 0$ oder 1 und

$$D_i' \begin{cases} = D_i & \text{für } i \neq i_0, \\ > D_i & \text{für } i = i_0, \end{cases}$$

dann folgt

$$D' = f(D_1', \dots, D_n') = 1.$$

Verf. untersucht den Zusammenhang dieser Bedingungen mit den schwächeren, von K. J. Arrow (*Social choice and individual values*. New York 1951) angegebenen. Erfüllt eine Entscheidungsfunktion im Falle mehrerer Alternativen für jedes Paar derselben die Bedingungen I—IV, so kann sie in der Gruppe zu Nicht-Transitivität der Entscheidungen führen.

M.-P. Geppert.

Williams, E. J.: Use of scores for the analysis of association in contingency tables. *Biometrika* 39, 274—289 (1952).

Da bei Unabhängigkeit der Einteilungsmerkmale die Erwartungswerte der $p \times q$ -Kontingenztafel eine $p \times q$ -Matrix vom Range 1 bilden, prüft man die Hypothese der Unabhängigkeit, indem man untersucht, ob die — eine Matrix vom Range $\leq q - 1$ bildenden — Abweichungen der beobachteten Kontingenztafel von der Erwartungsmatrix überzufällig seien. Verf. diskutiert zunächst eingehend die von F. Yates bzw. R. A. Fisher zur Analyse des Zusammenhanges in einer $p \times q$ -Kontingenztafel angegebenen Methoden, den beiden Merkmalseinteilungen Varianten zweier Variablen zuzuordnen derart, daß die Korrelation zwischen denselben maximal sei. Prüfung des Abhängigkeitsgrades erfolgt dann mittels F -Testen bzw. mittels Kriterien für einfache bzw. multiple Korrelationskoeffizienten. Anknüpfend an H. O. Lancaster (dies. Zbl. 33, 74) erfolgt χ^2 -Zerlegung in $p - 1$ einzelne χ^2 -Werte. In formaler Analogie zu der vom Verf. (dies. Zbl. 46, 361) für die Interpretation von Wechselwirkungen entwickelten Methode leitet Verf. Signifikanzteste für die Eignung der hypothetischen Varianten, deren Schätzung aus der empirischen Kontingenztafel $\{n_{ij}\}$ auf Grund der Forderung maximaler Korrelation auf die $q - 1$ charakteristischen Wurzeln $R_1^2 \geq R_2^2 \geq \dots \geq R_{q-1}^2$ der $p \times p$ -Matrix

$$\{t_{hi}\} = \left\{ \sum_j \frac{n_{hi} n_{ij}}{(n_{h.} n_{i.})^{1/2} n_{.j}} \right\}$$

führt, her und führt Varianzanalysen durch, die auf den R_i^2 usw. beruhen und für große n mit der entsprechenden, auf χ^2 -Zerlegung fußenden Varianzanalyse im wesentlichen übereinstimmen. Wesentliche Grundlage für das Verfahren bilden die Erwartungswerte der elementarsymmetrischen Funktionen der charakteristischen Wurzeln.

M.-P. Geppert.

Tintner, Gerhard: Die Anwendung der Variate-Difference-Methode auf die Probleme der gewogenen Regression und der Multikollinearität. *Mittel.-Bl. math. Statistik* 4, 159—162 (1952).

Über p Variablen X_i liegen N Beobachtungen

$$X_{it} = M_{it} + y_{it} \quad (i = 1, 2, \dots, p; t = 1, 2, \dots, N)$$

vor, wo M_{it} die mathematischen Erwartungen und y_{it} zufällige Abweichungen von denselben seien. Die Matrix der Kovarianzen

$$V_{ij} = E(y_{it} \cdot y_{jt}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, p)$$

wird mit Hilfe der Variate-Difference-Methode geschätzt. Die mit den beobachteten Kovarianzen

$$a_{ij} = \sum_{t=1}^N \frac{(X_{it} - \bar{X}_i)(X_{jt} - \bar{X}_j)}{(N-1)}, \quad \bar{X}_i = \sum_{t=1}^N \frac{X_{it}}{N}$$

gebildete Determinantengleichung

$$|a_{ij} - \lambda \cdot V_{ij}| = 0$$

habe die Wurzeln:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

Sind die M_{it} durch genau R unabhängige lineare Gleichungen

$$k_{v0} + \sum_{j=1}^p k_{vj} M_{jt} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, R; t = 1, 2, \dots, N)$$

verknüpft, so ist

$$\Lambda_r = (N-1) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r)$$

nach Hsu für großes N asymptotisch χ^2 -verteilt mit $r \cdot (N - p - 1 + r)$ F. G. Als Schätzung der unbekannten Anzahl R empfiehlt Verf. das kleinste R , für welches Λ_{R+1} signifikant, aber $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_R$ nicht signifikant sind. Die gewogenen Regressionskoeffizienten k_{vj} werden dann auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips durch Lösung des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^p (a_{ij} - \lambda_v \cdot V_{ij}) k_{vi} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, R)$$

bestimmt.

M.-P. Geppert.

Hartley, H. O.: Second order autoregressive schemes with time-trending coefficients. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* 14, 229—233 (1952).

The author solves the stochastic differential equation $\ddot{u} + (b_0 + b_1 t) u = \varepsilon(t)$, where b_0 and b_1 are constants and $\varepsilon(t)$ is a random impulse function with zero mean. He then derives the autocorrelation function of this solution in terms of Airy integrals and shows that, for increasing range of observations, its form approximates to $s^{-1} \sin s$, where s is proportional to the lag. S. Vajda.

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

● Rao, C. R.: Advanced statistical methods in biometric research. New York: John Wiley and Sons 1952. XVII, 390 p. \$ 7,50.

Skellam, J. G.: Studies in statistical ecology. I. Spatial pattern. *Biometrika* 39, 346—362 (1952).

Die räumliche Anordnung und Dichte einer Population wird in der Ökologie zumeist mittels empirischer Census-Verteilungen, d. h. Beobachtung der Besetzungszahlen von untereinander gleich großen Teilflächen untersucht. Verf. vereinheitlicht, vereinfacht und ergänzt die bestehenden Modelle und Erklärungsversuche durch systematische Verwendung Momente- und Kumulanten-erzeugender Funktionen. Er diskutiert das für die Prüfung auf Poisson-Verteilung vielfach empfohlene Maß $\Sigma(x_j - \bar{x})^2/\bar{x}$ als Schätzung von μ_2/μ'_1 und stellt fest, daß verschiedene Modelle zu den gleichen resultierenden Verteilungen führen können. Verf. untersucht ferner die Verteilungen der Abstände je zweier benachbarter Individuen sowie der Differenzen der Besetzungszahlen verschiedener Teilflächen. Betrachtung verschiedener Ausgangsverteilungen und Heranziehung verschiedener Modelle führt zu Neyman-Typ-A-, doppelten Poisson-, verallgemeinerten Polya-Aeppli- und Pascal-Verteilungen. M.-P. Geppert.

Marchand, Henri: Analogie entre une loi d'union sélective et une loi de fécondité ou de survivance différentielles. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 863—864 (1952).

A given model of differential fertility, and a given model of differential survival, give results identical or closely related to those obtained assuming a previously discussed model of selective mating (this *Zbl.* 40, 227). L. Cavalli.

Komatu, Yūsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. VI. Rate of danger in random blood transfusion. *Proc. Japan Acad.* 28, 54—58 (1952).

The problem of blood transfusion is considered if the donor is chosen at random or with some but incomplete information regarding his blood groups. H. Geiringer.

Komatu, Yūsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. VII₁—VII₆. Non-paternity problems. *Proc. Japan Acad.* 28, 102—104, 105—108, 109—111, 112—115, 116—120, 121—125 (1952).

Consider a mother child combination. Is it possible, and under what circumstances, and with what probability, to disprove paternity of a „suspected father“ (VII 1)? The corresponding formulas are given in VII 2, 3. — In the following as far as referee can see the generalization is considered that the mother belongs to one, the „suspected“ as well as the „true“ father to an other population (VII 4). — In case the proof of non-paternity is based on the consideration of recessive genes there arises a certain discontinuity regarding the probability of non-paternity (VII 5). — One seeks cases where and conditions such that then various above mentioned probabilities reach a maximum (VII 6). H. Geiringer.

Komatu, Yūsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. VIII₁—VIII₃. Further discussions on non-paternity problems. *Proc. Japan Acad.* 28, 162—164, 164—168, 169—171 (1952).

The case is considered in VIII 1, 2, 3, where a husband wishes to prove — always by means of genetical facts — that a child born by his wife is not his child but rather that of an other man. This is, of course, essentially the same problem as one previously (VII) discussed. In the present discussion simplified derivations are given. H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. IX₁, IX₂, IX₃, IX₄. Non-paternity concerning mother-children combinations. Proc. Japan Acad. 28, 207—212, 213—217, 218—223, 224—229 (1952).

Various problems similar to those previously discussed arise in case of a mother and her two (or more) children. For example: Two children have the same mother. A „suspected“ man wishes to prove his non-paternity against one of the two children (IX 1) or against both (IX 2). Or: a man who recognizes to be the father of the first child wishes to disprove paternity of the second child. — Of course in each case merely probabilities for non-paternity exist — and are computed; (in particular in IX 3, 4).

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. X₁, X₂, X₃. Non-paternity concerning mother-child-child combinations. Proc. Japan Acad. 28, 249—253, 254—258, 259—264 (1952).

A woman has two children from different fathers. A husband wishes to prove that one or both of the children are not his own. Or (X 2) an other combination: What is the probability rate for the true father of one child to assert his non-paternity against the second child? In X 3 examples are considered, particularly in case of the presence of recessive genes.

H. Geiringer.

Komatu, Yûsaku: Probability-theoretic investigations on inheritance. XI₁, XI₂. Proc. Japan Acad. 28, 311—316, 317—322 (1952).

Here a new type of problems is studied: We assume that ignoring the genetical traits of the mother a man tries to prove — considering merely the child (or the children) — that it cannot be his child. Under what circumstances and with what probability can a man prove this „absolute“ non-paternity? — Finally (XI 2) consider two brothers; we know that they are from the same mother but from different fathers. Under what circumstances and with what probability can a man prove that neither is his child?

H. Geiringer.

Finetti, Bruno de: Une méthode de représentation graphique pour les grands actuarielles. Bull. trimestr. Inst. Actuaries Français 63, 307—314 (1952).

Steffensen, J. F.: Inequalities in Makeham-graduated tables. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 36—47 (1952).

Verf. beweist die folgende Ungleichung: Wenn eine Absterbeordnung das Makehamsche Gesetz erfüllt

$$\mu_x = A + B e^{\gamma x} \text{ und } \zeta = (\mu_x - A)/\gamma,$$

so gilt die folgende Abschätzung, wenn $0 < A + \delta \leq \gamma$.

$$\bar{a}_x = \ddot{a}_x - 1/2 - (\mu_x + \delta)/12 + R,$$

wobei $|R| < (\gamma^3/384) (11 + 9\zeta + \zeta^2 + \zeta^3)$. Verf. beweist diese Abschätzung im wesentlichen mit Hilfe der Polynome $G_n(\zeta)$. (Vgl. Verf., Some recent researches in the theory of statistics and actuarial science, Cambridge 1930, S. 26 und 27.)

W. Saxer.

Hochart, M.: Bénéfices de mortalité dus à l'emploi de la table AF. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 63, 291—305 (1952).

Arfwedson, G.: A semi-convergent series with application to the collective theory of risk. Skand. Aktuarietidskr. 1952, 16—35 (1952).

Fortführung der Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. 41, 470) durch genaue, numerische Diskussion der Ruin-Wahrscheinlichkeitsfunktion $G(x, n)$. Die numerische Darstellung und Auswertung dieser Funktion gelingt mit Hilfe asymptotischer Entwicklungen der Integrale

$$J_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-z^2 t^2} dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad J_p = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-z^2 t^{2p}} dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

W. Saxer.

Poudevigne, J.: Détermination des annuités certaines par un procédé optique. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français 63, 315—324 (1952).

Santoboni, Luigi: Sconto razionale e sconto commerciale. Archimede 4, 245—248 (1952).

Maurice, H.: Sur le calcul du taux dans les opérations financières et viagères. Assoc. roy. Actuaires Belges, Bull. 56, 49—59 (1952).

Debreu, Gerard: A social equilibrium existence theorem. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 886—893 (1952).

Let a set of points $(a) = (a_1, \dots, a_n)$, real valued functions $f_i(a)$ ($i = 1, \dots, n$), and sets $A_i(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) = A_i(\bar{a}_i)$ be given. A point (a^+) is an „equilibrium point“ if, for all i , we have $a_i^+ \in A_i(\bar{a}_i^+)$ and $f_i(a^+) = \max_{a_i \in A_i(\bar{a}_i^+)} f_i(\bar{a}_i^+, a_i)$.

Using a special case of a fixed point theorem due to Eilenberg and Montgomery [Amer. J. Math. 68, 214—222 (1946)], the author derives conditions for the existence of such a point. [It is perhaps useful to give here an interpretation of the concepts used. One might imagine that n persons choose actions a_i respectively, maximising their preference functions f_i , which depend on the choices of all the other persons, but that, given those choices, that of the i -th person is restricted to a set $A_i(\bar{a}_i)$. An equilibrium is then a situation where no person has an incentive to alter his choice.] Saddle points are particular cases of equilibrium points, for $n = 2$. S. Vajda.

Roy, A. D.: Safety first and the holding of assets. Econometrica 20, 431—449 (1952).

Verf. legt dar, daß die Verteilung eines Vermögens k auf n Anlagemöglichkeiten mit zufallsabhängigen Erfolgsaussichten in der überwiegenden Zahl der Fälle nicht nach dem bisher in der Literatur als dafür maßgebend behandelten Prinzip der Maximierung des zu erwartenden Gewinns erfolgt, sondern vielmehr durch das Streben bestimmt wird, die Wahrscheinlichkeit eines über ein bestimmtes Maß hinausgehenden Verlustes (Ruins) zum Minimum zu machen. Unter der Voraussetzung, daß sich die Erwartungswerte p_i und die Streuungen α_i der Erfolgsverteilungen sowie die Korrelationskoeffizienten r_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) für die n Anlagearten hinreichend gut schätzen lassen, gewinnt Verf. mit Hilfe der Ungleichung von Bienaymé-Tschebyscheff für den Teil x_i des Vermögens k , der auf die Anlageart i entfallen muß, wenn die obere Grenze der Wahrscheinlichkeit für einen Ertrag, der gleich oder kleiner einem vorgegebenen Betrag d ist, ein Minimum werden soll, die Formel:

$$x_i = \frac{\lambda}{\alpha_i} \sum_{j=1}^n \frac{(p_j - d/k)}{\alpha_j} \cdot \frac{W_{ij}}{|W|} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Darin bezeichnet W die Korrelationsmatrix und W_{ij} die Adjunkte von r_{ij} in dieser Matrix. λ ist so zu wählen, daß $\sum_{i=1}^n x_i = k$ wird. — Die Anwendung dieses Prinzips der Sicherheit und die Rolle, die eine Bewertung des Vermögens und der Erträge in Geld dabei spielt, werden insbesondere für den Spezialfall $n = 2$ eingehend erörtert. G. Friede.

Geometrie.

● Hilbert, D. and S. Cohn-Vossen: Geometry and the imagination. — Transl. by P. Nemenyi. New York: Chelsea Publishing Co. 1952. IX, 357 p. \$ 5,00.

● Cundy, H. M. and A. P. Rollett: Mathematical models. Oxford: Clarendon Press 1952. 240 p. \$ 5,50.

In unterhaltsamer Weise werden ausführliche Anleitungen zur Herstellung mathematischer Modelle und Geräte gegeben und hierbei Streifzüge durch viele Gebiete der Mathematik unternommen, meist ohne auf längere Beweisführungen einzugehen. Im Vordergrund steht die Verwendung einfachster (und billigster) Hilfsmittel und Fertigungsmethoden, sowie das Bestreben

der Verff., die Gegenstände der Mathematik und ihre vielfachen Beziehungen möglichst anschaulich darzustellen und Freude an ihnen zu erwecken. Jahrzehntelange praktische Schulerfahrung in der Herstellung solcher Modelle (auch durch Schüler) ermöglichte den Verff., eine Unmenge kleiner praktischer Kniffe und Hinweise mitzuteilen, die für die Selbstanfertigung von Modellen gewiß vorteilhaft sind. Diese rein technische Seite des Modellbaues wird in so geschickter Weise mit mathematischen Überlegungen und Hinweisen durchflochten, daß an diesem mit zahlreichen Bildern schön ausgestatteten Buch auch ein Leser seine Freude haben wird, der nicht die Absicht hat, die beschriebenen Modelle nachzubauen. Naturgemäß werden in erster Linie geometrische Objekte und Zusammenhänge veranschaulicht, obwohl auch einzelne Fragen aus anderen Gebieten (wie z. B. hydrostatische oder elektrische Auflösung von linearen Gleichungen) behandelt werden. Auf Fragen der „Unterhaltungsmathematik“ wird nur gelegentlich eingegangen. Für die Lektüre ist eine gewisse Vertrautheit mit den behandelten Dingen am Platze. — In der ebenen Geometrie werden Modelle für Flächenteilungen, Winkelfunktionen, kinematisch erzeugte Kurven sowie Darstellungen von Verknotungen (durch Papierfaltungen), Parkettierungen und Kurven als Grenzlagen von Polygonfolgen (Schneeflockenkurve usw.) betrachtet. Breiten Raum nehmen die Polyeder ein: Die regulären Platonischen, die Kepler-Poinsotschen, die Archimedischen Polyeder, sowie die dualen Körper, die Archimedischen Sternpolyeder, regulär zusammengesetzte Körper, die Deltaeder werden in Form eines Tafelwerkes mit Bildern, Netzen, zahlreichen Maßverhältnissen und näheren Hinweisen behandelt. — Regelflächen werden durch Draht- und Fadenmodelle anschaulich gemacht. Topologisch interessante Fragen, wie 7-Farbeneinteilung des Torus, einseitige Flächen, Kleinsche Flasche usw. werden ebenso gestreift, wie die Herstellung von Kugelpackungen, die Kurven fester Breite usw. Die Beschreibung einiger Integrphen leitet zu einer ausführlicheren Besprechung ebener und räumlicher Gelenksketten über: Näherungsweise und exakte Geradföhrungen, Inversoren, Mechanismen für spezielle Zwecke, Bennetts windschiefes Isogramm usw. Schließlich werden noch Geräte zum Aufzeichnen von Bahnkurven beschrieben, die durch Zusammensetzung harmonischer Schwingungen entstehen (Lissajousche Figuren).

H. R. Müller.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Seidel, J.: Distance-geometric development of two-dimensional Euclidean, hyperbolic and spherical geometry. I. II. Simon Stevin 29, 32—50, 65—76 (1952).

I. Mit D_n werde die symmetrische Matrix $(d_{ik})_{i,k=0,1,\dots,n}$ bezeichnet, in welcher $d_{0i} = 1$ ($i = 1, \dots, n$) und $d_{ii} = 0$ ($i = 0, \dots, n$) gilt. Ausgehend von der Bemerkung, daß mit d_{ik} als Abstandsquadrat der Punkte p_i, p_k ($i, k = 1, \dots, n$) $|D_3|$ das (-16) -fache Inhaltsquadrat des Dreiecks $p_1 p_2 p_3$ und $|D_4|$ das 288-fache Inhaltsquadrat des Tetraeders $p_1 p_2 p_3 p_4$ ist, wird die ebene euklidische Geometrie in der folgenden Weise begründet. d_{12}, d_{23}, d_{31} seien feste reelle Zahlen mit $|D_3| < 0$. Jedes Tripel (d_{41}, d_{42}, d_{43}) reeller Zahlen mit $|D_4| = 0$ wird als Punkt bezeichnet. Zu zwei Punkten $p = (d_{41}, d_{42}, d_{43})$, $q = (d_{51}, d_{52}, d_{53})$ gibt es genau eine reelle Zahl $d_{45} = (pq)$ mit $|D_5| = 0$, und es ist $(pq) \geq 0$. $\sqrt{(pq)}$ wird als Abstand von p und q bezeichnet. Die Verbindungsgerade von p und q im Falle $p \neq q$ ist die Menge derjenigen Punkte x , für welche $|D_3| = 0$ ist, falls dabei d_{12}, d_{23}, d_{31} durch $(pq), (qx), (xp)$ ersetzt werden. Die Richtung einer Geraden wird durch ein Punktepaar (p, q) mit $p \neq q$ angegeben, wobei die Punktepaare (p, q) , (r, s) einer Geraden genau dann dieselbe Richtung bestimmen, wenn $(ps) - (qs) + (qr) - (pr) = (pq, rs) > 0$ ist. Der Winkel φ zweier durch die Punktepaare (p, q) und (r, s) bestimmter gerichteter Geraden wird durch $\cos \varphi = (pq, rs) (2\sqrt{(pq)(rs)})^{-1}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ definiert. Die Zwischenbeziehung für die Punkte einer Geraden wird in der üblichen Weise mittels der durch die Punktepaare bestimmten Richtungen eingeföhrt. Mit diesen Begriffen ist die Menge der Punkte gerade die euklidische Ebene.

II. Die zweidimensionale hyperbolische Geometrie und die Geometrie auf der Kugelfläche werden in der folgenden Weise dargestellt, wobei die für die letzte erforderlichen Änderungen und Zusätze in eckige Klammern gesetzt sind. Unter C_n sei verstanden die Determinante der symmetrischen Matrix $(c_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$ mit $c_{ii} = 1$. Es seien c_{12}, c_{23}, c_{31} reelle Zahlen > 1 [vom Betrag < 1] mit

$C_3 > 0$. Als Punkte werden die Tripel (c_{14}, c_{24}, c_{34}) mit $C_4 = 0$ und $c_{i4} \geq 1$ [$-1 \leq c_{i4} \leq 1$] bezeichnet. [$(-c_1, -c_2, -c_3)$ heißt der zu (c_1, c_2, c_3) diametrale Punkt.] Zu zwei Punkten $p = (c_{14}, c_{24}, c_{34})$, $q = (c_{15}, c_{25}, c_{35})$ gibt es genau eine Zahl $(pq) = c_{45} \geq 1$ [vom Betrag ≤ 1] mit $C_5 = 0$, und $\log((pq) + \sqrt{(pq)^2 - 1})$ [$\arccos(pq)$ ($\leq \pi, \geq 0$)] wird als der Abstand von p und q bezeichnet. Für zwei verschiedene [und nicht diametrale] Punkte p, q wird die Menge der Punkte x mit $C_3 = 0$, wobei c_{12}, c_{23}, c_{31} durch $(pq), (qx), (xp)$ ersetzt sind, als die Verbindungsgerade von p und q eingeführt. Zwei geordnete Paare $(p, q), (r, s)$ von verschiedenen [und nicht diametralen] Punkten einer Geraden bestimmen auf ihr genau dann dieselbe Richtung, wenn $C(pq, rs) = (pr)(qs) - (ps)(rq) < 0$ [> 0] gilt. Der Winkel φ zwischen den durch die Punktepaare $(p, q), (r, s)$ gegebenen gerichteten Geraden wird durch $\cos \varphi = -C(pq, rs) / \sqrt{(1 - (pq)^2)(1 - (rs)^2)}$ [$= + \dots$], $0 \leq \varphi \leq \pi$ definiert. Die nicht auf der Verbindungsgeraden von p und q liegenden Punkte r, s liegen genau dann auf derselben Seite dieser Geraden, wenn

$$\begin{vmatrix} 1 & (pq) & (ps) \\ (qp) & 1 & (qs) \\ (rp) & (rq) & (rs) \end{vmatrix} > 0 \text{ ist.}$$

G. Pickert.

Norden, A. P.: Über die Darstellung der Hauptsätze der Lobačevskijschen Geometrie. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 117—128 (1952) [Russisch].

In der vorliegenden Note wird ein Aufbau der nichteuklidischen Geometrie skizziert, bei dem zu Beginn einige Sätze über Parallelen gebracht werden, die für den euklidischen und hyperbolischen Parallelismus in gleicher Weise gelten; dazu gehört z. B. der Satz, daß der Parallelwinkel nicht stumpf sein kann. Die Lobačevskijsche Geometrie wird im § 2 darauf durch das Axiom ausgesondert, daß zu einer beliebigen bestimmten Strecke ein spitzer Parallelenwinkel gehört. Zum Zweck der analytischen Behandlung wird eine elementare Einführung der hyperbolischen Funktionen gegeben und darauf die Trigonometrie in bekannter Weise aus dem Logarithmus des Doppelverhältnisses entwickelt.

W. Burau.

Skopec, Z. A.: Die zyklographischen Abbildungen des Lobačevskijschen Raumes. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 129—150 (1952) [Russisch].

Die Fußpunkte der Lote, die man von den Punkten einer zu einer festen Ebene π des hyperbolischen Raumes überparallelen Ebene σ auf π fallen kann, fallen ins Innere eines Kreises K auf π . K und σ bestimmen sich eineindeutig, wenn man noch K orientiert und dadurch die beiden auf verschiedenen Seiten von π liegenden Ebenen unterscheidet, die sich auf denselben Kreis projizieren. Ebenso lassen sich die π schneidenden und die dazu parallelen Ebenen den orientierten Abstandslinien und Grenzkreisen in π eineindeutig zuordnen. Eine Gerade g projiziert sich auf eine Strecke AB in π , wovon aber auch ein Endpunkt unendlich fern sein kann. Umgekehrt gehört AB zu 2 Geraden, einer schneidenden und einer überparallelen, entsprechend den beiden Typen von Zyklenbüscheln durch AB . Analog sind Raumpunkte durch 3 Zykeln in π festzulegen, und die Fernpunkte des Raumes lassen sich den orientierten Punkten in π zuordnen. Mit dieser zyklographischen Abbildung kann Verf. die gesamte hyperbolische Raumgeometrie in π deuten und findet z. B. Winkel zwischen Ebenen und Geraden, Orthogonalitätsbeziehungen und räumliche Abstände leicht in π wieder. Gibt man noch eine weitere feste Ebene π' vor und bildet die Fernpunkte des Raumes sowohl auf die orientierten Punkte von π als auch auf die von π' ab, so definiert dies eine zyklentreue, konforme Abbildung zwischen π und π' .

W. Burau.

Rozenfel'd, B. A.: Nichteuklidische Geometrien über den komplexen und hyperkomplexen Zahlen und ihre Anwendung auf reelle Geometrien. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 151—166 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die n -dimensionalen, projektiven Geometrien über folgenden 4 Systemen: 1. den gewöhnlichen komplexen Zahlen, 2. den Zahlen $\alpha = a + b e$ mit $e^2 = 1$, 3. den gewöhnlichen, reellen Quaternionen, 4. den sog. Pseudoquaternionen $\alpha = a + b i + c e + d f$ ($i^2 = -1$, $e^2 = +1$, $i e = -e i = f$). Die 4 Geometrien heißen $P_n(i)$, $P_n(e)$, $P_n(i, j)$, $P_n(i, e)$. Die $P_n(e)$ und die $P_n(i, e)$ gestatten reelle Deutungen: Die Punkte von $P_n(e)$ als Paare von Punkten des P_n und die Punkte von $P_n(i, e)$ als Geraden des P_{2n+1} . Es geht jedoch bei diesen Geometrien nicht immer durch 2 Punkte nur eine Gerade. Da man ferner in allen 4 Systemen in naheliegender Weise Konjugierte und Normen bilden kann, lassen sich mit Hilfe der zugehörigen Hermiteschen Form $\{x, y\} = \bar{x}^0 y^0 + \dots + \bar{x}^n y^n$ Metriken einführen und Bewegungen erklären, wodurch die sog. unitären NE -Räume $K_n(i)$, usw. entstehen. $K_n(i)$ ist seit Study-Fubini bekannt. Verf. gibt nun hier eine wichtige Deutung für $K_n(e)$ und $K_n(i, e)$. $K_n(e)$ kann als Geometrie der Paare „Punkt X^i —Hyperebene U_i “ des P_n gedeutet werden, wenn man die Koordinaten von $P_n(e)$ in der Gestalt $x^i = X^i (1 - e)/2 + U_i (1 + e)/2$ schreibt und als Abstand zweier Paare das leicht zu definierende Doppelverhältnis (DV) derselben nimmt. Zur Deutung von $K_n(i, e)$ hat man im P_{2n+1} eine Nullkorrelation auszuzeichnen; dann gehören bei $n = 1$ zwei Geraden g, g' und ihre korrelativ entsprechenden einem regulus an, wodurch ein ausgezeichnetes DV für g, g' und auf ähnliche Weise für allgemeines n vermöge der Nullkorrelation erklärt werden kann.

W. Baur.

Hesselbach, Benno: Konstruktion eines euklidischen E^3 in einem konformen C^4 . Math. Nachr. 8, 171—178 (1952).

C^4 sei ein Raum der 4 reellen Koordinaten w^0, w^1, w^2, w^3 , P^3 der von den Vektoren \dot{w} eines Punktes des C^4 aufgespannte projektive Raum; darin bestimme die Gleichung $(\dot{w} \dot{w}) = \Sigma g_{ik} \dot{w}^i \dot{w}^k = 0$ ein Ellipsoid als das an dem Punkt des C^4 vorgegebene Grundgebilde, entsprechend der Struktur der Einsteinschen Gravitationstheorie. Verf. versucht ausgezeichnete Koordinatensysteme zu bestimmen analog denen, welche den ruhenden euklidischen Raum und die absolute Zeit in der klassischen Mechanik liefern. Es existiert ein E^3 im C^4 , dessen Metrik euklidisch ist, wenn man die durch $(\dot{w} \dot{w})$ bestimmte Weltmetrik zugrunde legt; die Zeitmessung ist dann i. a. nicht integrierbar. „Punkte“ des E^3 sind Weltlinien $w(s)$ (s reell) mit zeitartiger Richtung, d. h. $\{w_s, w_s\} < 0$ für den Vektor w_s mit den Komponenten $\partial w^i / \partial s$. Die Schar der $w(s)$ in C^4 hängt von 3 reellen Parametern (x, y, z) ab. Auf zwei benachbarten Kurven mit den Parametern (x, y, z) und $(x + \dot{x}, y + \dot{y}, z + \dot{z})$ wird durch eine lineare Gleichung $(\dot{w} u) = 0$ eine die Gleichzeitigkeit definierende Zuordnung der Punkte bestimmt. Die ausgezeichneten Parameter s, x, y, z müssen dann in einem Raum $(\dot{w} \dot{u}) = 0$ die Gleichung erfüllen:

$$(\dot{w} \dot{w}) = \Sigma g_{ik} \dot{w}^i \dot{w}^k = m (\dot{x} \dot{x} + \dot{y} \dot{y} + \dot{z} \dot{z}),$$

oder in der vollen Umgebung eines Punktes (w):

$$\frac{(\dot{w} \dot{w})}{m} = \dot{x} \dot{x} + \dot{y} \dot{y} + \dot{z} \dot{z} + (\dot{w} u) (\dot{w} v).$$

Betrachtet man hierin die linke Seite für $(\dot{w} u) = 0$ als Quadrat des Abstandes zweier benachbarter Kurven $w(s)$ und $w(s) + \dot{w}(s)$, so gilt im E^3 die euklidische Metrik. Die Bestimmung solcher Parameter führt auf ein System von Differentialgleichungen für s, x, y, z in der Form eines Anfangswertproblems, bei dem sich $\partial w / \partial s$ für $s = \text{const}$ gewinnen läßt, wenn für dieses s eine gewisse partielle Differentialgleichung für $\partial m / \partial s$ erfüllt ist. Die Differentialgleichungen des E^3 werden aufgestellt und der Weg ihrer Integration angegeben.

W. Süss.

Elementargeometrie:

• Kožuev, P. Ja.: Lehrgang der Trigonometrie für das Technikum. Redigiert von P. S. Modenov. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 296 S. R. 6,10. [Russisch.]

Bottema, O.: Euklid im Wunderland. Euclides, Groningen 27, 98—118 (1952) [Holländisch].

Andersson, Josef: Ein Flächensatz. Elementa 35, 257—258 (1952) [Schwedisch].

$A_0 B_0 C_0$ und ABC seien gegebene Dreiecke, A_1, B_1, C_1 symmetrisch zu A_0, B_0, C_0 in bezug auf die Mittelpunkte der Seiten BC, CA, AB und T_0, T, T_1 und Y die Flächen der Dreiecke $A_0 B_0 C_0, ABC, A_1 B_1 C_1$ und des Sechsecks $A_0 C B_0 A C_0 B$. Dann ist $T_1 = T_0 + T - Y$.

H. L. Schmid.

Guillotin, R.: Sur une cubique et deux familles de triangles associés. Mathesis 61, 269—277 (1952).

In einem Dreieck ABC trifft jeder Durchmesser des Umkreises (O) den seinen

Orthopol tragenden Durchmesser des Neunpunktekreises (O_9) in einem Punkt einer Kubik Γ . Diese ist ∞^1 Dreiecken umschrieben, deren Steinersche Inellipsen sämtlich die Brennpunkte O und G haben (G = Schwerpunkt von ABC). Γ geht durch die Mittelpunkte der Berührungskreise von ABC und durch die Ecken A_m, B_m, C_m des komplementären Dreiecks. Die Tangente an Γ durch O_9 geht durch den Mittelpunkt der Jerabekschen Hyperbel, und die Tangenten durch O sind den Asymptoten dieser Hyperbel parallel. In jedem dem Umkreis konzentrischen Kreis gibt es zwei Dreiecke, die mit ABC die Kubik Γ gemein haben. Die Ecken dieser Dreiecke liegen auf einer Kubik Γ' , die aus Γ durch die Homothetie ($G, -2$) entsteht. *M. Zacharias.*

Goormaghtigh, M. R.: Sur le quadrilatère complet. *Mathesis*, Suppl. 61, 1—16 (1952).

Die Seiten $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ eines vollständigen Vierseits werden als vier Tangenten einer dreispitzigen Hypozykloide betrachtet. Diese Annahme führt zu einigen neuen Sätzen. O_i sei der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $T_i \equiv (\Delta_i \Delta_k \Delta_m)$. — Nach einem Satz von Thébault liegen die Orthopole der den Seiten Δ_i parallelen Durchmesser der Kreise (O_i) bezüglich der Dreiecke T_i auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt die Strecke zwischen dem Herveyschen Punkt und dem Mittelpunkt des Miquelschen Kreises halbiert. (Der Herveysche Punkt ist der Schnittpunkt der auf den Eulerschen Geraden der Dreiecke T_i in den Mittelpunkten der Neunpunktkreise dieser Dreiecke errichteten Lote. Der Miquelsche Kreis geht durch die vier Punkte O_i .) Dieser Satz wird verallgemeinert für die Isopole für einen Winkel ϑ . — Nach einem Satz von Minois schneiden sich die gleichseitigen Umhyperbeln der Dreiecke T_i mit gemeinsamen Asymptotenrichtungen in einem Punkt. Dieser Punkt liegt, wie hier bewiesen wird, auf der orthozentrischen Geraden, d. h. der Geraden, auf der die Höhenschnittpunkte der Dreiecke T_i liegen. *M. Zacharias.*

Toscano, Letterio: Sulla distanza dei punti di Brocard di un triangolo. *Archimede* 4, 257—258 (1952).

Court, N. A.: Orthological triangles. *Math. Student* 20, 51—57 (1952).

Verf. entwickelt folgende Verallgemeinerung eines 1825 von J. B. Durrande veröffentlichten Satzes: Gegeben 3 Kreise (A), (B), (C) mit nicht kollinearen Mittelpunkten und ein Punkt M . $A'B'C'$ sei das Dreieck aus den Polaren von M für die drei Kreise. Die Lote von A' auf BC , B' auf CA , C' auf AB treffen sich in einem Punkt M' , dem Spiegelbild von M bezüglich des Potenzpunktes der drei Kreise. Aus diesem Satz ergibt sich eine Lösung der Aufgabe: Zu einem gegebenen Dreieck (T) $\equiv ABC$ ein orthologes Dreieck (T') $\equiv A'B'C'$ zu konstruieren derart, daß die Orthologiepunkte von (T) für (T') und von (T') für (T) mit zwei gegebenen Punkten M, M' zusammenfallen. Anwendungen und Folgerungen. *M. Zacharias.*

Court, Nathan Altshiller: Sur les tétraèdres orthologiques. *Mathesis* 61, 249—256 (1952).

Die Arbeit läuft bis ins Einzelne parallel zu den Untersuchungen der vorstehend besprochenen Abhandlung. — Gegeben seien vier Kugeln (A), (B), (C), (D), deren Mittelpunkte ein Tetraeder (T) $\equiv ABCD$ bilden. (T') $\equiv A'B'C'D'$ sei das Tetraeder, das von den Polarebenen eines Punktes M bezüglich der vier Kugeln gebildet wird. Die Lote von A', B', C', D' auf die Ebenen BCD, CDA, DAB, ABC treffen sich in einem Punkt M' , dem Spiegelbild von M bezüglich des Potenzpunktes der vier Kugeln. Aus diesem Satz folgt eine Lösung der Aufgabe: Zu einem gegebenen Tetraeder (T) $\equiv ABCD$ ein orthologes Tetraeder (T') $\equiv A'B'C'D'$ zu konstruieren derart, daß die Orthologiezentren von (T) für (T') und von (T') für (T) mit zwei gegebenen Punkten M, M' zusammenfallen. Folgerungen, Anwendungen. *M. Zacharias.*

Court, N. A.: Isogonal points for a tetrahedron. *Duke math. J.* 19, 71—74 (1952).

Konstruiert man um die Ecken eines Tetraeders (T) Kugeln orthogonal zu der Fußpunktkugel eines Punktes M bezüglich (T), so fallen die Polarebenen von M für diese vier Kugeln mit den Flächen des Fußpunkttetraeders bezüglich (T) des zu M isogonal konjugierten („i. k.“) Punktes M' zusammen. Die vier kopedalen Linien zweier i. k. Punkte M, M' (d. h. die Schnittgeraden der entsprechenden Flächen der Fußpunkttetraeder von M, M') liegen in parallelen Ebenen durch die entsprechenden Ecken von (T), und die Lote von diesen Ecken auf die entsprechenden kopedalen Linien schneiden die Gerade MM' . Diese Gerade trifft auch die reziproken Polargeraden der kopedalen Linien bezüglich der Fußpunktkugel von M, M' . Die Ebenen der Fußpunkttetraeder von M, M' treffen MM' in zwei Würfeln gleichen Doppelverhältnisses. In Würfeln desselben Doppelverhältnisses wird MM' auch getroffen von den Tangentialebenen der Fußpunktkugel von M, M' in den Ecken der Fußpunkttetraeder von M, M' . Dies sind die hauptsächlichsten Sätze der Arbeit.

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Sur le point de Monge d'un tétraèdre. *Mathesis* 61, 281—287 (1952).

Der Mongesche Punkt M des Tetraeders $T \equiv ABCD$ ist das Spiegelbild des Umkugelmittelpunkts O bezüglich des Schwerpunkts G . — Satz I: M ist Potenzpunkt der Kugeln über den Durchmessern $A g_a, B g_b, C g_c, D g_d$ (g_a, \dots Schwerpunkte der Tetraeder $MBCD, \dots$). Satz II: M ist Potenzpunkt der orthozentroidalen Kugeln der Tetraeder $MBCD, \dots$ (das sind die Kugeln über den Durchmessern $M g_a, \dots$). Satz III: Der Kantorsche Punkt Ω eines einer Kugel eingeschriebenen windschiefen n -Ecks (P) ist Potenzpunkt der Kugeln ω_i über den Strecken, die die Ecken A_i von (P) mit den Eckenschwerpunkten G_i der n -Ecke Ω_i verbinden, deren Ecken Ω und $n - 1$ Ecken von (P) sind. [Der Kantorsche Punkt Ω des Polygons (P) liegt auf OG derart, daß $OG:G\Omega = (n - 2):2$ ist. O Umkugelmittelpunkt, G Eckenschwerpunkt von (P)]. Satz IV: Liegt Ω auf der Umkugel von (P), so sind die Kugeln ω_i und die Kugeln über den Durchmessern $G_i \Omega$ orthogonal zu einer auf den Mittelpunkt Ω reduzierten Kugel.

M. Zacharias.

Thébault, Victor: Sur des plans associés à un tétraèdre. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér.* 66, 111—118 (1952).

Verf. hat früher [*Mathesis* 39, 459 (1925)] bewiesen: Eine Ebene π schneide die Kanten eines Tetraeders $ABCD$ in den Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$. Die Spiegelbilder $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu', \nu'$ dieser Punkte bezüglich der Mitten der entsprechenden Kanten liegen in einer Ebene π' (der „reziproken Transversalebene von π “). Verf. gibt weitere Sätze über die reziproken Transversalebenen („r. T.“) an: Wenn zwei Tetraeder T, T' bezüglich eines Punktes P homothetisch mit dem Verhältnis k sind, so ist das Tetraeder T_1 , dessen Flächen die r. T. der Flächen von T' bezüglich T sind, homothetisch zu T mit dem Verhältnis $-(2 + k)$ bezüglich des Punktes ω , der durch die Gleichung $P\omega = 4PG/(3 + k)$ definiert ist (G Schwerpunkt von T). — Die r. T. jeder von fünf Ebenen bezüglich des von den vier anderen gebildeten Tetraeders sind parallel. — Wenn eine veränderliche Ebene π durch einen festen Punkt Q geht, so umhüllen ihre r. T. bezüglich eines Tetraeders T eine Fläche dritter Klasse und vierter Ordnung, die die Flächen von T in (doppelt zählenden) Kegelschnitten schneidet, die die Kanten (doppelt) berühren. Ist Q ein Fernpunkt, so berührt die Fläche die Fernebene in Q .

M. Zacharias.

Niže, Vilko: Contribution à la géométrie du tétraèdre. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser.* 7, 228—239 und französ. Zusammenfassg. 239—243 (1952) [Kroatisch].

K_3 sei eins der ∞^1 Ellipsoide, die durch den Feuerbachschen Kreis einer Fläche ABC eines gegebenen Tetraeders $ABCD$ gehen und deren Mittelpunkte mit dem Tetraederschwerpunkt zusammenfallen. K_3 geht durch die Mitten der Kanten DA, DB, DC . K_1 sei ein dem Tetraeder umschriebenes und zu K_3 homothetisches

Ellipsoid, dessen Mittelpunkt auf der durch den Umkreismittelpunkt von ABC gehenden Geraden liegt, die zu der Verbindungsgeraden von D mit dem Höhenschnittpunkt von ABC parallel ist. Dann gibt es ∞^3 dem Ellipsoid K_1 einbeschriebene Tetraeder, zu denen auch $ABCD$ gehört, die autopolar sind zu einem (reellen oder imaginären) Ellipsoid K , das zu K_3 und K_1 homothetisch ist. Alle diese ∞^3 Tetraeder haben denselben Schwerpunkt. Die Kantenmitten dieser Tetraeder liegen auf K_3 . Die Schwerpunkte ihrer Flächen liegen auf einem zu K , K_1 und K_3 homothetischen Ellipsoid K_2 . Die Mittelpunkte O , O_1 , O_2 , O_3 von K , K_1 , K_2 , K_3 liegen auf einer Geraden derart verteilt, daß das Doppelverhältnis $(OO_3O_2O_1) = -1$ ist, O_3 in der Mitte der Strecke OO_1 liegt und O_2 die Strecke OO_1 im Verhältnis 1:2 teilt. Zu jeder Fläche des Tetraeders gibt es eine solche Gruppe von Ellipsoiden. (Nach der französischen Zusammenfassung.)

M. Zacharias.

Bowman, F.: *Cyclic pentagons.* Math. Gaz. 36, 244—250 (1952).

Die Note befaßt sich mit dem Problem, fünf Strecken a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) zu einem Polygon anzuordnen, dem ein Kreis umschrieben werden kann („Kreisfünfeck“). Durch Permutation der Seiten erhält man aus einem solchen Kreisfünfeck insgesamt zwölf Kreisfünfecke, deren 60 Diagonalen aber nur 10 verschiedene Längen x_i , y_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) aufweisen; x_i sind dabei die Diagonalen des Kreisfünfecks $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, y_i jene von $(a_1, a_3, a_5, a_2, a_4)$. Der Ptolemäische Satz liefert dann 30 Gleichungen zwischen den a , x , y , aus denen ein Satz von 10 linear unabhängigen ausgesondert wird, der schließlich zu einer algebraischen Gleichung 7. Ordnung (mit Koeffizienten, die ganz rational von den Seiten a_i abhängen) für die Länge der Diagonale x_1 führt. Alle anderen Diagonalen x und y sind dann rational durch x_1 und die Seiten a_i ausdrückbar, wenn $x_1 \neq 0$ ist. Dasselbe gilt für r^2 (= Quadrat des Umkreisradius r) und das Produkt $r \cdot S$ (S = Fläche des Kreisfünfecks). Wenn die sieben Werte r^2 alle reell und positiv sind, kann man also aus den fünf Seiten a_i insgesamt $7 \cdot 12 = 84$ verschiedene Kreisfünfecke bilden. Auf jeden Fall gibt es wenigstens einen reellen Umkreis und damit 12 reelle Kreisfünfecke, das Bestehen gewisser einfacher Ungleichungen zwischen den Seitenlängen a_i vorausgesetzt, die garantieren, daß man aus den a_i ein konvexes Fünfeck bilden kann. Ist dieses in den Ecken gelenkig und wird es einem gleichmäßigen inneren Druck ausgesetzt, so ist seine Gleichgewichtslage ein Kreisfünfeck. — Mit dem Problem, die Gleichung zu finden, welcher r^2 genügt, hat sich schon A. F. Möbius, J. reine angew. Math. 3, 5—34 (1828) befaßt, sogar für beliebige Kreispolygone mit $n = (2m + 1)$ Seiten. Es gelang ihm aber nur, die Ordnung dieser Gleichung festzustellen und das Produkt ihrer Wurzeln.

K. Strubecker.

Lowry, H. V.: *Polygons inscribed in polygons.* Math. Gaz. 36, 256—262 (1952).

Verf. untersucht, unter welchen Bedingungen ein einem n -Eck einbeschriebenes n -Eck oder $2n$ -Eck bei gegebenen Winkeln und gegebener Orientierung sich schließt, und gibt mehrere Beispiele an.

M. Zacharias.

Locher-Ernst, L.: *Wie viele regelmäßige Polyeder gibt es?* Arch. der Math. 3, 193—197 (1952).

Es wird eine Erklärung der regulären Polyeder gegeben, mit der außer den fünf Platonischen Körpern auch die vier Kepler-Poinsotschen Sternpolyeder sowie die drei aus Tetraedern bestehenden regulären Komplexe (wie Keplers stella octangula) erfaßt werden. Die Definition erfordert, daß das Polyeder eine ihrer zweifachen Kantenzahl gleiche Anzahl von Deckbewegungen aufweisen soll.

L. Fejes Tóth.

Algebraische Geometrie:

Muracchini, Luigi: *Sulle trasformazioni cremoniane che conservano le aree od i volumi.* Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 388—392 (1952).

L'A. dimostra che affinché in una trasformazione cremoniana tra piani affini le aree corrispondenti siano in un rapporto costante è necessario e sufficiente che i punti impropri si corrispondano (cioè che non vi siano coppie regolari di punti corrispondenti dei quali uno solo è improprio) e che la curva jacobiana sia composta in ogni piano da una curva Γ contata tre volte la quale, insieme con la retta impropria, costituisca una curva della rete omaloidica. — L'A. osserva inoltre che le trasformazioni tra piani affini che conservano le aree costituiscono un gruppo G_A

e dimostra con un esempio che tale gruppo non è generato dalle trasformazioni quadratiche in esso contenute. — L'A. estende infine il teorema sopra enunciato alle trasformazioni cremoniane tra spazii affini ad n dimensioni. *C. F. Manara.*

Baldassarri, Mario: Le involuzioni ∞^d dello S_h e le loro proiezioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 530-536 (1952).

L'A. studia le involuzioni d volte infinite di gruppi di n punti appartenenti ad uno spazio lineare S_h di dimensione h ; una tale involuzione (la cui definizione si deve a B. Segre) viene indicata col simbolo $I_{n,h}^d$. Precisamente l'A. considera l'insieme dei gruppi di punti che si ottengono proiettando una $I_{n,h}^d$ su di un S'_{h-1} da un punto generico dello S_h che la contiene e determina le condizioni sotto le quali avviene che tale insieme di gruppi proiezioni è una $I_{n,h-1}^d$ dello S'_{h-1} semplice. — Posto poi $\delta = [d/2]$ l'A. dimostra che, quando è $2 < h \leq d < 2h - 2$, una $I_{n,h}^d$ si proietta da un generico spazio $S_{h-\delta-2}$ in una $I_{n,\delta+1}^d$ di un $S'_{\delta+1}$ semplice, purchè non vi sia una S_{l-1} -stella di spazii S_l uniti per la involuzione. Di qui l'A. trae la rappresentazione di una $I_{n,h}^d$ come trasformata birazionale di una generica proiezione $I_{n,\delta+1}^d$ su di un $S'_{\delta+1}$ semplice, rappresentazione che è analoga a quella di Cayley-Halphen per le varietà. — Infine l'A. dà la definizione di spazio normale per una $I_{n,h}^d$, definizione che si presenta spontanea dopo la trattazione svolta; Egli chiama così uno spazio S_H (con $H \leq d$) tale che esista una $I_{n,H}^d$ che si proietti da un S_{H-h-1} dello S_H nella $I_{n,h}^d$ semplice, senza che esista uno spazio $S_{h'}$ con $d \geq h' > H$ per cui accada l'analogo fatto. *C. F. Manara.*

Baldassarri, Mario: Sugli insiemi di gruppi di punti generati da serie razionali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 21, 124-135 (1952).

L'A. prosegue lo studio delle $I_{n,h}^d$ (involuzioni d volte infinite di gruppi di n punti negli spazii ad h dimensioni); in particolare Egli determina qui le condizioni necessarie e sufficienti perchè una $I_{n,2}^3$ (con $n > 2$) sia normale nello S_3 , cioè sia proiezione di una $I_{n,3}^3$. — A tal fine Egli studia gli insiemi di gruppi di punti del piano (insiemi che Egli chiama G_3) generati da ∞^2 serie razionali σ semplicemente infinite; Egli determina le condizioni perchè un tale insieme G_3 sia linearmente razionale rispetto alle sue serie σ ed in particolare dimostra che ciò avviene se le serie razionali σ suddette sono serie di equivalenza e tra le ∞^2 curve γ' (ognuna delle quali è luogo dei gruppi di una serie) non ve ne sono infinite di spezzate. — Di qui Egli trae che la condizione necessaria e sufficiente perchè una $I_{n,2}^3$ sia normale in uno S_3 è che l'insieme G_3 dei suoi resti rispetto ai punti del piano sia linearmente birazionale rispetto alle sue ∞^2 serie g_{n-1}^1 , cioè che la varietà G_3 sia birazionalmente riferibile ad un S_3 in modo che le sue serie si rappresentino con le rette di una stella. *C. F. Manara.*

Turri, Tullio: Quartiche di diramazione riducibili relative ad involuzioni di Geiser. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 21, 116-121 (1952).

L'A. examine les cas où une involution de Geiser étant représentée sur un plan, la quartique de diramation dégénère. En supposant que les points-base du réseau de cubiques définissant l'involution occupent des positions génériques, il écarte certains cas. *L. Godeaux.*

Turri, Tullio: Rappresentazione piana di involuzioni sopra superficie di Eckardt. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 21, 122-125 (1952).

L'A. étudie la surface cubique transformée en soi par une homologie harmonique et la configuration des droites de cette surface. Il en déduit qu'il n'existe aucune transformation birationnelle involutive du plan transformant en soi le système des cubiques par six points, résultat inexact. *L. Godeaux.*

Turri, Tullio: Punti uniti in una trasformazione antibirazionale involutoria del piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 21, 126-130 (1952).

L'A. étudie les points unis d'une transformation antibirationnelle involutive plane, produit d'une involution du second ordre par la transformation des conjugués, et donne les conditions pour qu'il existe de tels points. *L. Godeaux.*

Room, T. G.: Transformations depending on sets of associated points. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 383—391 (1952).

Ein allgemeines Büschel von ebenen Kubiken mit den Basispunkten A_1, \dots, A_9 und eine „Fokalkurve“ ϱ , welche jede Kubik des Büschels außerhalb der Basispunkte in einem einzigen Punkt S schneidet, bestimmen eine involutorische Transformation \mathfrak{R} der Ebene in sich: durch jeden Punkt $P (\neq A_i)$ geht eine Kubik u des Büschels; der 3. Schnittpunkt der Geraden PS mit u ist der P entsprechende Punkt P' . Eine ebene Kurve der Ordnung μ mit einem m_i -fachen Punkt in A_i , symbolisch geschrieben $\mu F - \sum m_i A_i$, wird durch \mathfrak{R} in eine Kurve $\bar{\mu} F - \sum \bar{m}_i A_i$ transformiert. R ist die 10-reihige Matrix, welche $\{\bar{\mu}, \bar{m}_i\} = R\{\mu, m_i\}$ leistet. Verf. bestimmt R explizit und gibt interessante Eigenschaften dieser ganzzahligen Matrizen an. — Auch der Fall mehrdeutiger Transformationen wird untersucht, bei dem an die Stelle von ϱ eine Kurve σ mit $s > 1$ freien Schnittpunkten mit jeder Kubik u getreten ist. Im letzten Teil untersucht Verf. auf ähnliche Weise involutorische Transformationen des Raumes in sich, die von 8 assoziierten Basispunkten eines allgemeinen Quadrikbüschels abhängen. Vgl. hierzu auch die vorausgehenden Arbeiten desselben Verf. (dies. Zbl. 30, 175, 35, 222) und eine im Erscheinen begriffene in „University of Washington Publications“. W. Gröbner.

Chisini, O.: Il principio di corrispondenza. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 194—208 (1952).

Eine für einen größeren Leserkreis bestimmte, sehr klare Darstellung des sogenannten Korrespondenzprinzips von Chasles [das eigentlich von de Jonquières (1861) herrührt] und seiner Anwendungen mit einigen erläuternden Beispielen. Auch das Prinzip von Cayley-Brill für nicht rationale Kurven wird kurz besprochen. W. Gröbner.

Tosi, Armida: Formule di Plücker e principio di corrispondenza. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 134—152 (1952).

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Beweisen der klassischen Plückerschen Formeln für ebene algebraische Kurven, die höchstens Doppelpunkte enthalten. Der erste Beweis ist, wie die Verf. selbst bemerkt, nicht vollkommen; er gründet sich darauf, daß man die Kurve in Geraden zerlegt. Der zweite Beweis ist die gewöhnliche Anwendung des Korrespondenzprinzips von Chasles; die Berechnung der Infinitesimalordnungen, die man zur Anwendung der Halphen-Zeuthenschen Regel braucht, ist gut durchgeführt; nach unserer Meinung wären aber einige Erläuterungen um so notwendiger, als die Fassung elementar ist; z. B. wäre der Beweis nützlich, daß die betrachteten Korrespondenzen in der Tat algebraisch sind und die gewünschten Indizes haben. M. Benedicty.

Nakai, Yoshikazu: On the genus of algebraic curves. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A 27, 163—165 (1952).

Verf. beweist im Anschluß an W. L. Chow (dies. Zbl. 31, 266) den Satz: wenn die allgemeine Kurve eines algebraischen Systems keine vielfachen Punkte besitzt, dann ist das Geschlecht einer jeden irreduziblen und singularitätenfreien Kurve des Systems nicht kleiner (nach Chow nicht größer, also genau gleich) als dasjenige der allgemeinen Kurve. W. Gröbner.

Fusa, Carmelo: Generalizzazione di un lemma di Chisini. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 307—311 (1952).

Folgender Satz wird bewiesen: $|C_n|$ sei ein lineares System (mindestens ∞^1) von ebenen algebraischen Kurven C_n des Geschlechtes p mit dem Grade d . A_0 sei ein Basispunkt des $|C_n|$ mit der maximalen Multiplizität h_0 ; für die Gesamtheit der Basispunkte A_i ($i = 1, 2, \dots, t$) des $|C_n|$, mit den Multiplizitäten h_i , die in der Umgebung erster Ordnung von A_0 liegen, sei $\sum_{i=1}^t h_i > n$. Ist dann $h_0 \leq n - 2 - 2(p-1)/n$, $d \geq 2(p-1) + 2d/(n - h_0)$, so existiert, außer den A_i ($i = 0, 1, 2, \dots, t$),

ein weiterer Basispunkt des $|C_n|$ mit einer Multiplizität $h > (n - h_0)/2$. Im Spezialfall der homaloidischen Netze wurde dieser Satz von Chisini, im Falle $p = 0, 1$ vom Ref. bewiesen (und zur Reduktion der Linearsysteme durch Cremona-transformationen auf eine Minimalordnung benutzt; vgl. F. Conforto, *Le Superficie razionali*, Bologna 1939, p. 289—293, 317—319; dies. Zbl. 21, 53).

F. Conforto.

Godeaux, Lucien: Sur la génération des cubiques planes. *Mathesis* 61, 258—262 (1952).

Dans deux plans, deux triples de points non colinéaires tels que les faisceaux qui y ont leurs sommets soient projectifs, les homologues d'une droite $A'_i A'_k$ ne coïncidant pas avec $A_i A_k$; le lieu des points P tels que les homologues des $A_i P$ concourent en un point P' est une cubique C , P' décrit également une cubique C' ; ces cubiques passent par les points A_i , les points B_i — sections des homologues de $A_i A_k$ et $A_i A_h$; elles passent également par les trois points D_i homologues de l'intersection de C avec $A_i A_{i+1}$; ces neuf points sont base d'un faisceau de cubiques. Si l'on se donne les triangles A et A' , on peut avoir ∞^9 couples de cubiques C et C' , deux d'entre elles se correspondent d'une triple infinité de manières. Vérification par le calcul.

B. d'Orgeval.

Rosina, B. A.: Alcune osservazioni sulle coniche generalizzate. *Ann. Univ. Ferrara*, n. Ser., Sez. VII 1, Nr. 14, 135—142 (1952).

Dans la présente Note, l'A. étudie les courbes algébriques planes d'ordre $2n$ avec deux points à l'infini, (au moins) doubles, chacun compté n fois dans l'intersection de la courbe avec la ligne droite à l'infini, et démontre qu'elles ont les mêmes propriétés diamétrales des courbes algébriques planes d'ordre $2n$, avec deux points à l'infini de multiplicité n , dénommées par M. Piazzolla-Beloch coniques généralisées, car les propriétés diamétrales qu'elles présentent sont les mêmes de celles des coniques (v. M. Piazzolla-Beloch, ce Zbl. 36, 107). — L'A. appelle donc les courbes qu'il étudie encore coniques généralisées. — Il y a toujours un point principal, par lequel passent tous les diamètres. Si ce point est à distance finie les diamètres sont 2 à 2 conjugués, formant une involution, ayant les rayons doubles parallèles aux asymptotes. Il y a deux diamètres principaux rectangulaires et toujours réels (courbes de type hyperbolique et elliptique). — Si les rayons doubles sont les droites isotropes, il y a une infinité de diamètres principaux 2 à 2 conjugués et rectangulaires. — Si le point principal est à l'infini, tous les diamètres sont parallèles et on a alors courbes de type parabolique. Il y a un seul diamètre principal. — L'A. étudie ensuite la nature algébrique des singularités à l'infini, à l'aide d'une succession de transformations homographiques et quadratiques, et démontre que, pour le type hyperbolique et elliptique (pour $n \geq 5$) si n est un nombre pair, les singularités à l'infini sont deux points tacnodaux ou deux points cuspidaux d'espèce $(n-1)/2$; si n est un nombre impair elles sont toujours des points cuspidaux d'espèce $(n-1)/2$. (Pour $n=2$ on voit directement que les deux points à l'infini sont noeuds ou points cuspidaux ordinaires; pour $n=3$ on a deux points cuspidaux; pour $n=4$ deux points tacnodaux. — Pour le type parabolique l'A. démontre analogiquement que pour $n \geq 3$, si n est pair on a un point tacnodal d'espèce $(n-1)/2$; si n est impair un point cuspidal d'espèce $(n-1)/2$. Pour $n=2$ le point à l'infini est un point tacnodal ordinaire.

M. Piazzolla-Beloch.

Godeaux, L.: Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples. *Centre Belge Rech. math.*, 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège du 9 au 12 juin 1952, 225—241 (1952).

Sur une surface algébrique dotée d'une involution d'ordre premier n ayant que des points unis, au voisinage d'un de ces points supposé de 2° espèce, l'involution se représentant par $l':m' = l:e^{a-1}m$ ($e^p = 1$) ou par $l':m' = e^{b-1}l:m$, pour déterminer la singularité du point de diramation correspondant au point uni sur la surface image de l'involution, il faut étudier les solutions des congruences $l + am = 0$, $m + bl = 0 \pmod{p}$ rangées selon $l + m$ croissant. Si pour la solution minimum ces deux équations équivalent à $l + am = hp$, $m + bl = h'p$, l'étude des courbes passant au point considéré tangentes à des directions données qui permet de préciser les intersections mutuelles de ces courbes, donc les points infiniment voisins de „l'arbre“ du voisinage, associée à des inégalités arithmétiques permet d'énoncer le résultat suivant: si $hh' = 1$ le cône tangent au point de diramation

se décompose en deux cônes rationnels; si l'un des $h = 1$, l'autre $\neq 1$ ce cône se décompose en trois cônes rationnels, si les deux h sont $\neq 1$, le cône se décompose en quatre cônes rationnels.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur un point de diramation d'une surface multiple en lequel le cône tangent se décompose en quatre parties. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 203—222 (1952).

Etude d'un cas particulier du problème traité plus haut (v. ref. précéd.) où $h = 2$, $h' = n$, $p = 10n + 1$, $a = 6N + 1$, $b = 5n + 3$. — Le point de diramation correspondant au point uni est d'ordre $n + 2$, son cône tangent se décompose en trois plans et un cône d'ordre $n - 1$, coupant deux des plans suivant une droite, le dernier plan recontrant l'un de ceux-ci suivant une droite. Etude selon le procédé habituel des courbes passant au point considéré et de la congruence $l + (6n + 1)m = 0$, $m + (5n + 3)l = 0 \pmod{p}$. Détermination complète de la singularité, courbes équivalentes au voisinage du point, rationnelles d'ordre respectifs, -2 , -3 , $-(n + 1)$, -2 . Equivalence des courbes passant au point et de ces courbes rationnelles.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur quelques points de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie d'une surface multiple. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 898—907 (1952).

Une surface F est support d'une involution d'ordre 101 ne possédant que des points unis isolés. Si on considère un tel point pour lequel l'homographie induite au voisinage est de la forme $y':x' = y:e^{79}x$ ($e^{101} = 0$), étude du point de diramation correspondant sur la surface image de l'involution. Résolution du système $l + 79m = 0$, $m + 78l = 0 \pmod{101}$; le point de diramation est quintuple, le cône tangent se décompose en trois plans et un cône quadrique. Si on projette la surface image de ce point, les traces du cône tangent sont des courbes s_1, t_1, t_2, s_2 d'ordre $-2, -4, -3, -2$, chacune rencontre la suivante en un seul point; les intersections de la droite s_1 et de la conique t_1 et des droites s_2 et t_2 sont équivalents à des points doubles biplanaires ordinaires.

B. d'Orgeval.

Brusotti, Luigi: La „piccola variazione“ nei suoi aspetti e nel suo ufficio. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 430—444 (1952).

La conferenza che il lavoro riproduce offre un rapido sguardo d'assieme sull'ufficio che ai metodi di „piccola variazione“ spetta nella trattazione delle questioni di realtà sugli enti algebrici e specialmente nella risoluzione dei corrispondenti problemi esistenziali i quali, appena si abbandonino i casi più elementari, non molto si giovano dei procedimenti diretti forniti dall'algebra. Le considerazioni di continuità che sono a fondamento di tali metodi possono venire variamente presentate in relazione a differenti impostazioni, la più elevata delle quali può farsi risalire ad una veduta di F. Severi. A prescindere da noti atteggiamenti di F. Klein, a cui pur si allacciano quelli di A. Comessatti, con più aderente riferimento ai procedimenti di „piccola variazione“ sono ricordati i primi apporti che già possono intravedersi in I. Newton, i più espliciti dovuti ad A. F. Möbius, G. K. Clifford, H. G. Zeuthen ed i più sistematici di A. Harnack e D. Hilbert, fino ai più recenti, fra i quali rilevanti sono quelli dello stesso Autore. Però maggiormente si sosta su concreti aspetti del metodo e sui primi risultati che se ne traggono.

V. E. Galafassi.

Severi, Francesco: Ulteriori complementi alla teoria della base. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 71—87 (1952).

Zwei Kurven A und B auf einer algebraischen Fläche F heißen nach der Definition des Verf. algebraisch äquivalent ($A \sim B$), wenn sie ein und demselben algebraischen System von Kurven auf F angehören, oder dies für $A + C$ und $B + C$ mit einer passenden Kurve C zutrifft. Sie heißen ferner „pseudoäquivalent“, wenn zwar nicht $A \sim B$, wohl aber $\lambda A \sim \lambda B$ für passende natürliche Zahlen λ gilt. Verf. hat [Math. Ann. 62, 194—225 (1906)] das Kriterium aufgestellt: Dafür daß A und B pseudoäquivalent sind, ist notwendig und hinreichend, daß ihre virtuellen Schnittpunktzahlen die Bedingung $[A, A] = [A, B] = [B, B]$ erfüllen, sofern beide dieselbe

Ordnung haben. Diese letzte Voraussetzung wird hier durch die folgende ersetzt, daß A und B irgendeine virtuelle Kurve C mit Grad $[C, C] > 0$ in gleichen virtuellen Anzahlen von Punkten schneiden. Als Ausgangspunkt dient ein Satz von B. Segre (dies. Zbl. 17, 86) und J. Bronowski (dies. Zbl. 18, 421), daß eine virtuelle Kurve D auf F der Ordnung 0 niemals einen positiven virtuellen Grad, und den Grad 0 nur dann hat, wenn D ein „Nullteiler“ der algebraischen Äquivalenz (d. h. Differenz von zwei pseudoäquivalenten Kurven) ist. Auch hier wird die Voraussetzung „Ordnung 0“ ähnlich wie oben durch eine birational invariante Voraussetzung ersetzt. — Verf. untersucht sodann Untergruppen der vollen Äquivalenzgruppe, das sind Äquivalenzsysteme von virtuellen Kurven auf F , die von einer (endlichen) Basis von l vorgegebenen (algebraisch unabhängigen) Kurven C_1, \dots, C_l erzeugt werden. Für diese „ l -Gruppen“ läßt sich die Theorie der Basis analog dem allgemeinen Fall entwickeln. Bedeutet $a_{ik} = [C_i, C_k]$, so ist $|a_{ik}|$ die Diskriminante und $\sum a_{ik} x_i x_k$ die Fundamentalform der Basis (C_1, \dots, C_l) . Es gibt l -Gruppen 1. Art, welche eine Kurve von positiven Grade enthalten, eine nicht verschwindende Diskriminante mit dem Vorzeichen $(-1)^{l-1}$ besitzen und deren Fundamentalform den Trägheitsindex 1 hat; ferner l -Gruppen 2. Art, mit lauter Kurven negativen virtuellen Grades und negativ definiter Fundamentalform, deren Diskriminante nicht verschwindet und das Vorzeichen $(-1)^l$ hat; endlich l -Gruppen 3. Art, welche h ($< l$) unabhängige Kurven vom Grad 0 und sonst nur solche negativen Grades enthalten; die Diskriminante hat den Rang $l - h$, die Fundamentalform ist negativ semidefinit. — Verf. kommt am Schluß der Arbeit ausführlich auf seine Definition der algebraischen Äquivalenz zurück und zeigt, daß die in der späteren Entwicklung der Theorie hinzugefügte Alternative (nämlich die oben mit C bezeichnete Kurve) notwendig war, um auch die Äquivalenz der Kurven vom virtuellen Grad 0 sinngemäß erfassen zu können. *W. Gröbner.*

Burniat, Pol: Modèles de surfaces canoniques normales de S_3 et de genre linéaire $11 \leq p^{(1)} \leq 17$. Centre Belge Rech. math., 2ième Colloque Géom. algébrique, Liège du 9 au 12 juin 1952, 185—210 (1952).

Une surface canonique de S_3 est une surface algébrique dont la partie variable du système canonique complet est constitué par les sections planes ($p_g = 4$); son ordre est égal à $p^{(1)} - 1$. F. Enriques, Franchetta et L. Godeaux ont pu construire de telles surfaces pour $p^{(1)} \leq 11$, mais leurs méthodes ne peuvent donner des surfaces de genre $p^{(1)} > 11$. L'A. imagine un autre procédé: il construit des surfaces doubles canoniques et réussit à montrer qu'elles appartiennent à des systèmes continus de surfaces simples canoniques. Il parvient ainsi à des modèles de surfaces canoniques de genre $p^{(1)} \leq 17$. *L. Godeaux.*

Simple, J. G.: On complete quadrics. II. J. London math. Soc. 27, 280—287 (1952).

In einer vorausgehenden Arbeit (dies. Zbl. 34, 87) hat Verf. eine Untersuchung der singularitätenfreien \bar{M}_9 angekündigt, die ausnahmslos eindeutig der Menge aller vollständigen Quadriken (Q_L, Q_E, Q_C) entspricht. Im linearen Repräsentationsraum A_9 der Q_L ist die Mannigfaltigkeit der Kegel, der Ebenenpaare und der Doppelbeinen beziehungsweise auf die Mannigfaltigkeiten D_9^8, V_9^{10}, V_9^8 abgebildet. Bedeutet \bar{M}_9 das projektive Modell der Sextiken von A_9 , welche dreifach durch V_9^8 und einfach durch V_9^{10} gehen, so ist die oben genannte \bar{M}_9 entweder mit dieser \bar{M}_9 identisch, oder sie ist eine reguläre Projektion derselben. Die Mannigfaltigkeiten der Bedingungen μ, ν, ρ (daß die Quadrik durch einen Punkt geht, eine Gerade, beziehungsweise eine Ebene berührt) bilden eine Minimalbasis für die 8-dimensionalen Bedingungen auf \bar{M}_9 . Sie hängen mit den Ausartungsbedingungen φ, ψ, χ durch die folgenden Äquivalenzrelationen zusammen: $\varphi \equiv 2\mu - \nu, \psi \equiv 2\nu - \rho - \mu, \chi \equiv 2\rho - \nu$. Die Ordnung von \bar{M}_9 wird mit 1302424 angegeben. — Verf. untersucht ferner die Bildmannigfaltigkeit C_9^{92} der Q_C , die in einem linearen P_{19} eingebettet ist (vgl. dazu auch die Arbeiten von J. A. Todd, dies. Zbl. 8, 78, und H. S. Ruse, dies. Zbl. 12, 271), und die Mannigfaltigkeit W_9 der Punkt-Hüll-Quadriken (Q_L, Q_E) mit den Gleichungen $\xi_{rs} r'_s' = a_{rs} b_{r's'}$, der Ordnung 8852 in einem linearen P_{84} . *W. Gröbner.*

d'Orgeval, B.: A propos de la surface intersection de trois quadriques de S^5 contenant une octique de genre trois. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 462—468 (1952).

L'A. considère la surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) de S_5 contenant une courbe du huitième ordre de genre 3. Il montre que cette courbe et une section hyperplane forment une base-minima. Utilisant ensuite une méthode due à Severi [Rend. Circ. Mat. Palermo 30, 265—288 (1910)], il démontre que la surface est dépourvue de transformations birationnelles en soi. *L. Godeaux.*

Godeaux, Lucien: Une généralisation des surfaces desmiques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 892—897 (1952).

Si dans l'équation d'une quadrique tangente aux arêtes du tétraèdre de référence, on remplace les coordonnées par leur puissance, n , on obtient la surface $\sum x_i^{4r+g} - \sum (x_i x_j)^{2n} = 0$ ($i \neq j$). Cette surface appartient à un faisceau contenant trois surfaces décomposées l'une en 4 plans comptés n fois, deux en quatre surfaces d'ordre n , constituant une généralisation des surfaces desmiques. La base du faisceau est formée de 16 courbes planes d'ordre n chacune comptée n fois, le long de chacune d'elles les surfaces du faisceau ont un contact d'ordre $n-1$, sur chaque arête du tétraèdre il y a $2n$ tacnodes ($n > 1$), si $n = 1$ ces $12n$ tacnodes se réduisent à douze points doubles ordinaires. Dans le cas général le plan tangent en un tacnode passe par l'arête opposée, et la surface possède $n-1$ droites infiniment voisines au point double. Si $n = 2$ l'on construit facilement les adjointes d'où les genres $p_g = 13$, $p_a = 11$ et l'irrégularité 2. B. d'Orgeval.

Gallarati, Dionisio: Interno ad una superficie del sesto ordine avente 63 nodi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 392—396 (1952).

L'A. dà una rappresentazione pentaedrale della superficie F^6 dello spazio ordinario algebrica di VI° ordine avente 63 nodi, da lui costruita altrove come contorno apparente di una particolare forma dello spazio a 4 dimensioni. — Di tale rappresentazione l'A. si serve per mettere in evidenza i 63 nodi della superficie. C. F. Manara.

Galafassi, Vittorio Emanuele: Impostazione geometrica di un problema algebrico. Archimede 4, 200—203 (1952).

Es wird das Gleichungssystem $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ gelöst, dessen Nullstellengebilde aus zwei Geraden ($a - c = b - d = 0$, $a - d = b - c = 0$) und einer elliptischen Quartik 1. Gattung besteht; für diese wird eine Parameterdarstellung angegeben. W. Gröbner.

Gaeta, Federico: Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r . I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 270—273 (1952).

Gaeta, Federico: Caratterizzazione delle curve origini di una catena di resti minimali. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 387—389 (1952).

In queste due note l'A. porta alcuni complementi a suoi precedenti lavori sopra le varietà algebriche V_{r-2} di residuale finito in S_r (questo Zbl. 33, 208; 40, 230). Due varietà algebriche V_{r-2} , W_{r-2} relative agli ideali omogenei c, c' di $K(x_0, \dots, x_r)$ si dice che sono l'una resto dell'altra rispetto ad una coppia di forme f_1, f_2 contenenti $V + W$ se $c' = (f_1, f_2):c$; $c = (f_1, f_2):c'$. L'A. osserva essere ciascuna delle relazioni precedenti conseguenza dell'altra. L'A. mette in guardia contro interpretazioni geometriche non lecite di una teoria puramente algebrica delle varietà matriciali. L'A. osserva fra l'altro (portando esempi) che i due ideali c, c' non individuano necessariamente le due forme f_1, f_2 , ma che ciò avviene certamente se sono primi essendo (f_1, f_2) l'ideale di $V + W$. Data una matrice omogenea in $K(x_0, \dots, x_r)$ a $q+1$ righe e $q+2$ colonne, detto μ_{ij} l'ordine dell'elemento di posto i, j in essa (calcolando μ_{ij} mediante le relazioni di omogeneità della matrice, se l'elemento è nullo) e normalizzata la matrice in modo che $\mu_{q+1,1} \leq \dots \leq \mu_{11} \leq \dots \leq \mu_{1,q+2}$ l'ideale dei minori d'ordine massimo da essa estratti corrisponde ad una curva di residuale q . L'A. esamina il caso (non contemplato nei precedenti lavori) che $\mu_{q+1,1} \leq 0$ fornendo numerosi esempi. Le famiglie di curve algebriche di residuale finito, la cui curva generica c è origine di una catena C_q, C_{q-1}, \dots, C_1 di curve aritmeticamente normali, ciascuna delle quali è resto della precedente rispetto a due superficie d'ordine minimo per questa, restano caratterizzate dai valori $\mu_{q+1,1} > 0$.

A. Andreotti.

Vektor- und Tensorrechnung:

Müller, Claus: Über die Grundoperationen der Vektoranalysis. Math. Ann. 124, 427—449 (1952).

Es sei G_v eine Folge von Gebieten (Randflächen F_v ; alle Flächen hier und im folgenden regulär im Sinne von Kellogg), die sich in bestimmter Weise auf den Punkt ξ zusammenzieht. Verf. definiert dann für ein nicht notwendig differenzierbares Vektorfeld v :

$$\operatorname{div} v = \lim_{G_v \rightarrow \xi} \frac{1}{|G_v|} \int_{F_v} (n v) dF, \quad \operatorname{rot} v = \lim_{G_v \rightarrow \xi} \frac{1}{|G_v|} \int_{F_v} (n \times v) dF$$

($|G_v|$ Volumen von G_v , n Einheitsvektor in Richtung der Außennormalen), falls diese Grenzwerte unabhängig von der gewählten Folge G_v existieren. Für stetig differenzierbare v erhält man aus den angegebenen Definitionen die bekannten Ausdrücke für div und rot . Es zeigt sich, daß man auf diese Weise die Klasse der Vektorfelder mit Divergenz bzw. Rotation wesentlich erweitern kann. Für stetige Vektorfelder mit stetiger Divergenz bzw. Rotation gelten auch jetzt die bekannten Integralsätze $\int_G \operatorname{rot} v dV = \int_F (n \times v) dF$, $\int_G \operatorname{div} v dV = \int_F (n v) dF$ (G Gebiet mit Rand F) und (mit einiger Vorsicht) $\int_F (n \operatorname{rot} v) dF = \int_K v d\bar{s}$ (F Flächenstück mit Randkurve K).

Ist U einmal stetig differenzierbar, so erhält man demgemäß

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \lim_{G_v \rightarrow \xi} \frac{1}{|G_v|} \int_{F_v} \frac{\partial U}{\partial n} dF.$$

Ist U in diesem Sinne „ Δ -differenzierbar“ und ist $\Delta U = 0$ in G (Rand F), so gilt für ξ in G auch die Greensche Darstellungsformel

$$U(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left(\frac{1}{|\xi - \eta|} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\xi - \eta|} \right) dF_\eta.$$

Ist speziell $U = \int_G \frac{1}{|\xi - \eta|} \varrho(\eta) dV_\eta$ (ϱ lediglich stetig), so erhält man die Gleichung

(1) $\Delta U = -4\pi \varrho(\xi)$ (hierfür wird ein interessantes Beispiel gegeben), während bekanntlich bei der üblichen Definition von ΔU die Gleichung (1) nur unter der zusätzlichen Voraussetzung einer Hölderbedingung für $\varrho(\xi)$ bewiesen werden kann. Wichtige Anwendungen bilden unter gewissen Voraussetzungen Untersuchungen über die Lösbarkeit der Maxwell'schen Gleichungen und Eigenwertprobleme der Differentialgleichung $\Delta U + \lambda [k(\xi)]^2 U = 0$ [$k(\xi)$ lediglich stetig].

K. Maruhn

Pinl, M.: Isotrope Vektoren im erweiterten Hermiteschen Raum. Commentarii math. Helvet. 26, 323—327 (1952).

In einem auf die positiv definite Hermitesche Fundamentalform $\mathfrak{X} \bar{\mathfrak{X}} = \bar{\mathfrak{X}} \mathfrak{X} = \sum_{i=1}^n X_i \bar{X}_i$

(X_i, \bar{X}_i konjugiert komplex) gegründeten n -dimensionalen Hermiteschen Raum H_n gibt es keine isotropen Vektoren (d. s. solche mit $\mathfrak{X} \bar{\mathfrak{X}} = 0$). Will man solche haben, so muß man H_n hyperkomplex erweitern, und zwar so, daß (a) das neue hyperkomplexe System den Körper der komplexen Zahlen enthält und (b) in ihnen das Konjugium ein solcher Automorphismus ist, für den die Summe $X + \bar{X}$ reell ist und für den die hyperkomplexe Fundamentalform $\mathfrak{X} \bar{\mathfrak{X}} - \bar{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}$ die obige komplexe Hermitesche Form als Sonderfall enthält. Jede solche Erweiterung des algebraisch abgeschlossenen Körpers der komplexen Zahlen ist notwendig mit Nullteilern behaftet, so daß z. B. die Quaternionen ausscheiden. Da wegen (a) auch hyperkomplexe Zahlen mit drei Einheiten ausscheiden, braucht man mindestens vier Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3 , unter denen nilpotente vorkommen können oder nicht. Es ist dann z. B. an Hand der Studynschen Einteilung der Systeme mit vier Einheiten leicht festzustellen, daß (1) das System mit den Produkten $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_1 e_1 = e_2 e_2 = -e_3 e_3 = e_0$, $e_3 e_2 = -e_2 e_3 = e_1$, $e_1 e_3 = -e_3 e_1 = e_2$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$ eine mögliche Erweiterung ohne nilpotente Einheiten darstellt und (2) das System mit den Produkten $e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_1 e_1 = -e_0$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$, $e_3 e_1 = -e_1 e_3 = e_2$, $e_2 e_2 = e_3 e_3 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = 0$ eine solche mit nilpotenten Einheiten darstellt. Es sind dies die einzigen, den Bedingungen (a) und (b) genügenden Erweiterungen dieser Art. Die Norm der hyperkomplexen Zahl $x = \xi_0 e_0 + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ und ihrer Konjugierten $k = \xi_0 e_0 - \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2 - \xi_3 e_3$ ist dann im Falle (1) $X \bar{X} = \bar{X} X = e_0 (\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2)$, im Falle (2) $X \bar{X} = \bar{X} X = e_0 (\xi_0^2 + \xi_1^2)$. Der hyperkomplexe n -dimensionale Vektor $\mathfrak{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ hat dann im Falle (1) das

Hermitesche Längenquadrat $\mathfrak{X} \bar{\mathfrak{X}} = \sum_{i=1}^n X_i \bar{X}_i = e_0 \sum_{i=1}^n (\xi_{i0}^2 - \xi_{i1}^2 - \xi_{i2}^2 + \xi_{i3}^2)$, im Fall (2) aber

das Längenquadrat $\bar{x}\bar{x} = \sum_1^n X_i \bar{X}_i = e_0 \sum_1^n (\xi_{i0}^2 + \xi_{i1}^2)$ und in beiden Fällen gibt es jetzt

wirklich isotrope Vektoren \bar{x} , für welche $\bar{x}\bar{x} = 0$ ist.

K. Strubecker.

Milner, S. R.: The relation of Eddington's E -numbers to the tensor calculus. I. The matrix form of E -numbers. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 292—311 (1952).

In seinem Werk „Relativity of Protons and Electrons“ (Cambridge 1936; dies. Zbl. 15, 422) benutzt A. Eddington die 16 hyperkomplexen Einheiten

$$i, E_\mu, E_\mu E_\nu = -E_\nu E_\mu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5; \mu \neq \nu),$$

um durch lineare Kombination mit reellen oder komplexen Koeffizienten den (nichtkommutativen) Ring der E -Zahlen zu gewinnen. Numeriert man die Symbole durch, so ergibt sich für

jede E -Zahl T die Darstellung $T = \sum_{\mu=1}^{16} t_\mu E_\mu$ mit reellen oder komplexen t_μ . Wie meist im

Gebiet hyperkomplexer Systeme kann nach Matrixsystemen gefragt werden, die zum vorliegenden hyperkomplexen System isomorph sind (Ringisomorphismus) und unter Umständen den Kalkül verbessern. Auf diesem Wege diskutiert Verf. zunächst die Eigenschaften der schon von A. Eddington behandelten Matrix:

$$E' = \begin{pmatrix} E_{16} & E_{23} & E_{31} & E_{12} & E'_{11} & E'_{12} & E'_{13} & E'_{14} \\ E_{45} & E_{01} & E_{02} & E_{03} & E'_{21} & E'_{22} & E'_{23} & E'_{24} \\ E_{05} & E_{14} & E_{24} & E_{34} & E'_{31} & E'_{32} & E'_{33} & E'_{34} \\ E_{04} & E_{51} & E_{52} & E_{53} & E'_{41} & E'_{42} & E'_{43} & E'_{44} \end{pmatrix}, \quad (E_{\mu\nu} = E_\mu E_\nu = -E_\nu E_\mu).$$

Dabei bedeutet E_{16} das sechzehnte Symbol, das entweder $+i$ oder $-i$ gleichgesetzt werden kann. Diese Matrix kann auch

$$E' = \begin{pmatrix} iF_1G_1 & F_1G_2 & F_1G_3 & F_1G_4 \\ -F_2G_1 & iF_2G_2 & iF_2G_3 & iF_2G_4 \\ -F_3G_1 & iF_3G_2 & iF_3G_3 & iF_3G_4 \\ -F_4G_1 & iF_4G_2 & iF_4G_3 & iF_4G_4 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden, worin F_1, \dots, F_4 ; G_1, \dots, G_4 zwei Reihen reeller Symbole sind, welche die Multiplikationseigenschaften der Quaternioneneinheiten $1, i, j, k$ haben und den Regeln $F_\alpha G_\beta = G_\beta F_\alpha$ für alle Werte α, β genügen. Damit wird die Matrix $\mathfrak{E}' = [F_\alpha G_\beta]$ von Interesse und führt zur Darstellung $B = A'_{\alpha\beta} E'_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta} \mathfrak{E}'_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta} F_\alpha G_\beta$ der E -Zahlen B . Für die Matrizen A'' und A' dieser Darstellung ergibt sich der Zusammenhang $A' = i \zeta A'' \zeta^{-1}$ (ζ symmetrische Matrix). Entsprechend ergeben sich E' - und \mathfrak{E}' -Zahlen mit dem Zusammenhang $\mathfrak{E}' = -i \zeta^{-1} E' \zeta$. Dem Übergang von den einmal gestrichenen Größen zu den zweimal gestrichenen Größen wird geometrisch der Übergang von einer vierdimensionalen euklidischen Metrik zu einer ebensolchen pseudoeuklidischen (vom Trägheitsindex 1) an die Seite gestellt. Weiterhin benutzt Verf. Matrizenringe, die zum System der Quaternionen isomorph sind und schließt damit an Untersuchungen von B. Kwal an (dies. Zbl. 9, 421). Unter diesen Matrizenringen finden sich solche R und S , die zwei kommutative Darstellungen für die Quaternioneneinheiten liefern. Dann wird $B = A_{\alpha\beta} R_\alpha S_\beta = A_{\alpha\beta} \mathfrak{E}_{\alpha\beta}$. Ausdrücke dieser Art nennt Verf. \mathfrak{E} -Zahlen. Nun werden die \mathfrak{E} -Matrizen $[R_\alpha S_\beta]$ untersucht und die \mathfrak{E}' -Zahlen auf \mathfrak{E} -Zahlen reduziert. Schließlich werden die Produkte von \mathfrak{E} -Zahlen behandelt und insbesondere noch der Fall von \mathfrak{E} -Zahlen bei gegebenen Matrizen.

M. Pinl.

Milner, S. R.: The relation of Eddington's E -numbers to the tensor calculus.

II. An extension of tensor transformation theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 312—329 (1952).

Die Komponenten von Tensoren zweiter Stufe können als quadratische Matrizen arrangiert werden. Dann gibt es viererlei Transformationsweisen: kontravariant, gemischt kontravariant-kovariant, gemischt kovariant-kontravariant, kovariant. Alle diese Transformationen faßt Verf. in der Matrizenformel $(1) A \rightarrow A' = PAQ$ zusammen, worin die Matrizen P und Q nichtsingulär sind. Jeder solchen Matrix A kann nach den Ergebnissen der vorhergehenden Arbeit des Verf. (vgl. vorsteh. Referat) eine andere Matrix B zugeordnet werden: $B = A_{\alpha\beta} \mathfrak{E}_{\alpha\beta}$. Vermöge (1) entsteht dann aus B : $B' = A'_{\alpha\beta} \mathfrak{E}_{\alpha\beta}$. Damit ergibt sich das Problem, die Transformation $B \rightarrow B'$ zu charakterisieren, wenn $A \rightarrow A'$ bekannt ist. Verf. erhält: $B' = K_{\kappa\lambda} \mathfrak{E}_{\kappa\lambda} \cdot A_{\alpha\beta} \mathfrak{E}_{\alpha\beta} M_{\mu\nu} \mathfrak{E}_{\mu\nu}$, worin $K_{\kappa\lambda} \mathfrak{E}_{\kappa\lambda}$ und $M_{\mu\nu} \mathfrak{E}_{\mu\nu}$ zwei beliebige als \mathfrak{E} -Zahlen darstellbare Matrizen sind. Sodann werden die Tensoreigenschaften der transformierten \mathfrak{E} -Zahlen geprüft, und zwar erstens die Gruppeneigenschaft dieser Transformationen und zweitens die Tensoreigenschaft von \mathfrak{E} -transformierten Gleichungen. Um die allgemeinen Formeln durch physikalisch wichtige Einzelfälle zu illustrieren, wählt Verf. unter anderem das Matrixprodukt zweier Vektoren und allgemeine orthogonale (vier-

reihige) Matrizen. Die dabei erzielten Resultate gestatten die Frage nach der geometrischen Bedeutung des Ausdrucks $a_\alpha b_\beta \mathfrak{E}_{\alpha\beta}$ zu beantworten. Auf diesem Wege hofft Verf. einen Schlüssel gefunden zu haben, wie mechanische und elektrische Eigenschaften der Materie verknüpft werden können. — Nach einem Bericht über das Verhältnis des Eddingtonschen Wellentensorkalküls zum Spinorenkalkül wendet sich Verf. schließlich zur Aufstellung charakteristischer Skalare im Rahmen des \mathfrak{E} -Zahlenkalküls und der für die Tensoren der Klassen I und II zulässigen Transformationen. Dabei sind unter den Tensoren der Klasse I die „standard-tensors“ des klassischen Tensorkalküls zu verstehen.

M. Pinl.

Craig, Homer V.: On multiple parameter Jacobian extensors. Tensor, n. Ser. 2, 27—35 (1952).

Die Gleichungen $x^h = x^h(u^\alpha)$, $h = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, k$, bestimmen eine k -dimensionale Fläche in einer X_n . Eine Transformation der x^i induziert Transformationen der Ableitungen $x^h_{,\alpha}, x^h_{,\beta}, \dots$. Man betrachtet nun die Größen $x^h_{,\alpha_1} \dots$ mit diesen Transformationen als unabhängige Variablen („expoints“). Dies führt zu einer neuen Art von Tensoren, Extensoren genannt. Sie werden Jacobische Extensoren genannt, wenn die Transformationsformel Ableitungen der Funktionaldeterminante (in einer bestimmten Weise) enthält. Es werden einige Beispiele gegeben.

J. Haantjes.

Kawaguchi jr., Michiaki: A generalization of the extensor. Tensor, n. Ser. 2, 59—66 (1952).

Verf. betrachtet die Koordinaten x^i eines Raumes und die Größen $x^{(\alpha)i}$ ($\alpha = 1, \dots, k$), welche sich transformieren als $x^{(\alpha+1)i} = (\partial x^{(\alpha)i} / \partial x^{(\beta)i'}) x^{(\beta+1)i'}$, als unabhängige Variablen und entwickelt die zugehörige Tensortheorie (Extensoren). Ein Beispiel eines Extensors bilden die gesamten partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x^{(\alpha)i})$. Es wird gezeigt, wie man diese Methode in Finslerschen Räumen anwenden kann.

J. Haantjes.

Kawaguchi jr., Michiaki: On a generalization of the multiple parameter extensor. Tensor, n. Ser. 2, 99—101 (1952).

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß man die in einer ersten Arbeit (vgl. das vorstehende Referat) entwickelte Theorie auch anwenden kann auf Räume, die in einer Arbeit von Craig (siehe zweitvorstehendes Referat) behandelt worden sind.

J. Haantjes.

Katsurada, Yoshie: A geometrical consideration of the Craig excovariant differential. Tensor, n. Ser. 2, 80—84 (1952).

Der Formalismus der Extensoren und ihrer exkovarianten Differentiale wird angewandt auf den Fall einer $V_2(x^i = x^i(u^a))$ in einem euklidischen vierdimensionalen Raum. Die erste Krümmung einer Kurve $u^a(s)$ auf V_2 läßt sich schreiben als ein quadratischer Ausdruck in $d^2u^a/ds^2 = u^{(2)a}$ und $du^a/ds = u^{(1)a}$ mit Koeffizienten $g_{\alpha a, \beta b}$, die von u^a und $u^{(1)a}$ abhängen. Diese $g_{\alpha a, \beta b}$ bilden einen Extensor mit einer nicht-verschwindenden Determinante. Deshalb definiert $\delta g_{\alpha a, \beta b} = 0$ ein kovariantes Differential. Es zeigt sich, daß Kurven, für welche $\delta u^{(\alpha+1)a} = 0$ ist, eine konstante erste Krümmung haben. Es wird noch der besondere Fall betrachtet, daß V_2 eine Ebene ist.

J. Haantjes.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Schönhardt, Erich: Über die Projektion von Vektoren auf Kurven und eine gewisse Kurventransformation. Arch. der Math. 3, 314—326 (1952).

Ist $t = \mathfrak{r}'(s)$ der Tangentenvektor einer glatten ebenen Kurve \mathfrak{C} vom Ortsvektor $\mathfrak{r}(s)$ der Länge l , so wird als „Projektion“ des (komplanaren) Vektors \mathfrak{B} auf \mathfrak{C} der Vektor $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}) = \frac{1}{l} \int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{B} t) t ds$ verstanden, d. h. der bezüglich der Bogenlänge s genommene Mittelwert der Projektionen von \mathfrak{B} auf die Tangenten t . $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})$ ist eine lineare Vektorfunktion von \mathfrak{B} , kann also mittels eines Affinors $\Phi = \frac{1}{l} \int_{\mathfrak{C}} t \cdot t ds$ in der Form $\mathfrak{B}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \Phi$ dargestellt werden. Ist τ

der Neigungswinkel von t gegen die x -Richtung, $\lambda = \frac{1}{l} \int_{\mathfrak{C}} \cos 2\tau ds$, $\mu = \frac{1}{l} \int_{\mathfrak{C}} \sin 2\tau ds$, so

kennzeichnet die „Projektionszahl“ $p = \lambda + i\mu$ den Affinor Φ und die durch ihn bestimmte affine Abbildung Φ^* . Der „Projektionsindex“ $|p|$ von \mathfrak{C} ist dann gegen gleichsinnige Ähnlichkeiten von \mathfrak{C} invariant. In der Affinität Φ^* entspricht dem Einheitskreis eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{2}(1 \pm |p|)$. Die Projektionen der Einheitsvektoren \mathfrak{B}^0 auf \mathfrak{C} sind orientierte Halbmesser dieser Ellipse. Ersetzt man die Kurve \mathfrak{C} durch jene Kurve \mathfrak{C}^T , die aus ihr entsteht, indem man, von $s = 0$ ausgehend, die Neigung τ jedes orientierten Linienelementes von \mathfrak{C} verdoppelt, die Bogenlänge s aber beibehält, so kann die komplexe Zahl $l_p = l(\lambda + i\mu)$ geometrisch gedeutet werden als der Vektor, der die Stellen $s = 0$ und $s = l$ der durch diese „gleichmäßige“ Verbiegung T^* aus \mathfrak{C} entstehenden Kurve \mathfrak{C}^T verbindet. — Es gibt Kurven \mathfrak{C} , für welche stets $\mathfrak{B}(\mathfrak{C})$ parallel \mathfrak{B} ist. Sie werden als Kreiskurven bezeichnet, weil für sie wegen $p = 0$ die obigen Ellipsen Kreise werden. Z. B. sind der Vollkreis und der Halbkreis, aber auch alle regelmäßigen Polygone Kreiskurven. Man kann jeden glatten Kreiskurvenbogen erhalten, indem man eine beliebige glatte Kurve an einer Stelle $s = 0$ auftrennt und der inversen Verbiegung T^{-1} unterwirft. Einige Beispiele erläutern die Gedanken der Arbeit, die mit einigen Bemerkungen über die Projektion eines Vektors auf Kurven und Flächen im Raume von drei und mehr Dimensionen schließt.

K. Strubecker.

Kruppa, Erwin: Über die dualen Gegenstücke zum Meusnierschen und Eulerschen Satz der Flächentheorie. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 209–216 (1952).

Zu den flächentheoretischen Sätzen von Meusnier und Euler wurden duale Gegenstücke von A. Mannheim, B. Hostinský und W. Blaschke aufgestellt. Verf. legt die verschiedenen Fassungen dieser Sätze dar und gibt für die der Eulerschen Formel dual entsprechende Blaschkesche Formel einen neuen Beweis, der auch den Mannheimschen Satz abzulesen gestattet. Weiter wird gezeigt, daß die Sätze von Meusnier und Euler in der Kurventheorie duale Gegenstücke besitzen. Der Achsenort der Krümmungszylinder der einer nicht abwickelbaren Fläche Φ umschriebenen Zylinder, die durch einen Punkt P von Φ gehen, ist ein Plückersches Konoid. Eine ebensolche Fläche ergibt sich auch für den Achsenort der Krümmungszylinder der durch eine Kurve C gehenden Zylinder, die in einem Punkte P von C eine Berührebene (nicht Schmiegebene) berühren. Der Zusammenhang der Dupinschen Indikatrix mit der dualen Indikatrix in einem Punkte einer nicht abwickelbaren Fläche, wie in einem Flächenelement einer Kurve wird untersucht. Schließlich bespricht Verf. konstruktive Anwendungen: 1. Ermittlung des Gratpunktes und des Krümmungskegels für eine Erzeugende einer Torse, die durch zwei nicht abwickelbare Leitflächen oder durch eine solche und eine Leitkurve oder durch zwei Leitkurven festgelegt ist. 2. Konstruktion des Erzeugendenpaares der Torse in einem gemeinsamen Flächenelement der beiden erzeugenden Gebilde. H. R. Müller.

Pan, T. K.: Normal curvature of a vector field. Amer. J. Math. 74, 955–966 (1952).

Let $S: x^i = x^i(u^1, u^2)$ ($i = 1, 2, 3$) be a surface in ordinary space and let $v^i = p^\alpha x^i_{,\alpha}$ be a tangent vector field on S . Given a curve $C: u^\alpha = u^\alpha(s)$ on S , the derived vector of v^i along C is defined by $dv^i/ds = x^i_{,\alpha} p^\alpha_{,\gamma} du^\gamma/ds + (p^\delta d_{\delta\gamma} du^\gamma/ds) X^i$ where X^i are the components of the unit normal to S and $d_{\delta\gamma}$ are the coefficients of the second fundamental form. The absolute value of the normal component of dv^i/ds is represented by κ_n and is called the normal curvature of the field with respect to C . Through a given point P there is a unique direction with respect to which κ_n has a finite extreme value; it is given by the equation $\epsilon^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} d_{\beta\delta} p^\delta du^\gamma = 0$ and it is called the principal direction of the field at P ; the corresponding normal curvature is called the principal curvature of the field and the curves generated by the principal directions are called the lines of curvature of the field. If $\kappa_n = 0$ along a curve \bar{C} , the curve is called an asymptotic line of the vector field. With these definitions, several theorems are proved. For instance: a) The asymptotic lines of the field form a conjugate net with the curves of the field (= curves along which the vectors of the field are tangent to the curve) and form an orthogonal net with the lines of curvature of the field; b) The principal curvatures of the surface at a point are the extremal principal curvatures of all vector fields in the surface at the point; c) The square of the principal curvature of a vector field at P has the value $M \kappa_n - K$, where M = mean curvature of S , K = Gaussian curvature of S and κ_n = normal curvature of the curve of the field at P ; d) The asymptotic lines and the curves of the field are characterized by the property that along them the straight lines on the vectors of the field generate developable surfaces. Analogous properties are studied for vector fields on a V_n contained in a V_m .

L. A. Santaló.

Mishra, R. S.: Skewness of distribution of the generators of a ruled surface. *Math. Student* **19**, 105—107 (1952).

Sind $x^i = x^i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) die Koordinaten der Leitkurve einer Regelfläche und $\lambda^i = \lambda^i(s)$ die Koordinaten des Einheitsvektors ihrer Erzeugenden, so hat V. Rangachariar [*Bull. Calcutta math. Soc.* **37**, 133—136 (1945)] die Größe $\mu = (\lambda^i \lambda^{i'} \lambda^{i''})/a^3$ mit $a = |\lambda'|$ als Drallschiefe (skewness of distribution) der Erzeugenden λ bezeichnet. Verf. zeigt, daß μ als geodätische Krümmung des sphärischen Bildes (λ) der Regelfläche aufgefaßt werden kann und numerisch gleich $|\kappa^2 - 1|$ ist, wenn κ die Krümmung von (λ) bedeutet. Anwendungen auf Tangentenflächen, Haupt- und Binormalenfläche einer Raumkurve bestätigen frühere Ergebnisse von Rangachariar und von Bhattacharya und Ram Behari (dies. Zbl. **36**, 116).

K. Strubecker.

Wunderlich, Walter: Beitrag zur Kenntnis der Minimalschraubflächen. *Compositio math.* **10**, 297—311 (1952).

Die reellen Minimalschraubflächen sind jene Schraubschiebflächen, deren Schiebkurvenscharen konjugiert komplexe Schraublinien sind. Unter diesem Gesichtspunkt werden hier bekannte und neue Eigenschaften dieser Flächen einfach hergeleitet, z. B. Sätze über Schichtenlinien, Falllinien, Umrißkurven, über die sphärischen Bilder solcher Flächen und über ihre Bonnetsche Transformation. Die Gruppe der automorphen Schraubungen der Schiebkurvenscharen ist im Komplexen zweigliedrig. Ihre Untergruppen führen auf eingliedrige Transformationsgruppen der Minimalfläche, deren Bahnkurven die gewöhnlichen Schraublinien der Fläche isogonal schneiden und die im Normalriß auf eine achsennormale Ebene als Pseudotrochoiden erscheinen. Unter ihnen kommen auch die Schichten- und Falllinien der Fläche vor, ebenso die Schmiegelinien und die Krümmungslinien.

F. Hohenberg.

Ritter, Robert: Über gewisse Zwischenintegrale der Biegungsgleichung spezieller Flächen. *Arch. der Math.* **3**, 395—400 (1952).

Es wird unter Verwendung des „absoluten Differentialkalküls“ im wesentlichen folgender Satz bewiesen für Flächen mit dem Gaußschen Krümmungsmaß $K = 1/\varrho^2$: Die Bour-Darbouxsehe Biegungsgleichung für die Flächenkoordinate $x(u^1, u^2)$

$$\Delta_{22}x = (1 - \Delta_1x) K$$

besitzt die beiden Zwischenintegrale

$$V^1 = \varrho^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \theta(\varrho, x) + \sqrt{-(1 - \Delta_1x)} \right\} = a_1,$$

$$V^2 = \varrho^{1/2} \left\{ \frac{1}{2} \theta(\varrho, x) - \sqrt{-(1 - \Delta_1x)} \right\} = a_2$$

($a_j = \text{fest}$), wenn ϱ dem Gleichungssystem genügt

$$\varrho \Delta_2 \varrho = \frac{1}{2} \Delta_1 \varrho + 4, \quad \varrho \Delta(\varrho, \Delta_1 \varrho) = -\Delta_1 \varrho (\Delta_1 \varrho - 4), \quad \varrho \theta(\varrho, \Delta_1 \varrho) = 0.$$

W. Blaschke.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Strubecker, Karl: Äquiforme Geometrie der isotropen Ebene. *Arch. der Math.* **3**, 145—153 (1952).

Per piano isotropo si intende, come è noto (questo Zbl. **13**, 220), un piano π reale tangente all'assoluto (quadrica a una falda) di uno spazio pseudoeuclideo a tre dimensioni. Tale piano π si presenta come caso limite di un piano euclideo o pseudo-euclideo, i cui due punti dell'assoluto siano andati a coincidere nel punto U di contatto con la quadrica assoluta dello spazio. Introdotto in π un sistema di coordinate affini $x: y: 1 = x_1: x_2: x_0$, di guisa che sia $U(1, 0, 0)$ si può definire la distanza (Entfernung) di due punti $(x_1, y_1); (x_2, y_2)$, mediante la quantità razionale: $P_1 P_2 = x_2 - x_1$; similmente due rette (non isotrope) $y = u_1 x + v_1$ e $y = u_2 x + v_2$ hanno un angolo (razionale) dato da $\widehat{g_1 g_2} = u_2 - u_1$. Due punti paralleli $(x_1 - x_2; P_1 P_2 = 0)$ hanno un'ampiezza (Spanne) isotropa, data da $y_2 - y_1$; mentre due rette parallele ($\widehat{g_1 g_2} = 0$) hanno una distanza (Abstand) isotropa $\widehat{g_1 g_2} = v_2 - v_1$. La metrica così definita è auto-duale e invariante

rispetto a un gruppo continuo G_4 , che appare come caso limite delle similitudini euclidee; il G_4 contiene un sottogruppo G_3 , quello dei movimenti limite. — Data ora una curva piana (con le solite condizioni di regolarità e di differenziabilità), si può definire un elemento di arco isotropo, e una curvatura isotropa, che sono invarianti rispetto al G_3 . — Uno studio più approfondito del piano isotropo, e delle sue proprietà rispetto al gruppo G_4 , si ottiene introducendo i numeri duali $z = x + \varepsilon y$ ($\varepsilon^2 = 0$); mediante essi, si scrivono subito le equazioni del G_4 come sostituzioni lineari su una variabile duale z ; si determinano quindi subito i punti fissi di una data trasformazione del gruppo, e la possibilità di decomporre ogni operazione del gruppo in operazioni più semplici. — L'A. stabilisce poi i fondamenti della geometria differenziale delle curve di π (derivabili per lo meno tre volte) rispetto al gruppo G_4 , o gruppo equiforme, definendo l'elemento d'arco equiforme, dS , come il differenziale di ordine più basso invariante per le operazioni del G_4 e per trasformazioni del parametro cui si riferiscono i punti della curva; l'espressione esplicita di dS viene data sia in termini della variabile duale z che di x e y , e dipende dalle derivate seconde di x e y rispetto al parametro t cui si riferisce la curva. — Si può introdurre quindi la lunghezza equiforme, e introdurre come parametro l'arco S . — Mediante esso l'A. definisce la curvatura equiforme, come l'invariante differenziale del minimo ordine invariante per il solito G_4 ; la curvatura dipende dall'intorno del 3° ordine del punto, in cui si definisce. — Infine l'A. caratterizza le curve (generalmente trascendenti) a curvatura equiforme costante.

V. Dalla Volta.

Süss, W.: Affine Differentialgeometrie von Kurvenpaaren im Raum. Arch. der Math. 3, 137—141 (1952).

Let $e = e(t)$, $x = x(t)$ be two curves in the three dimensional space such that $(\dot{e} \dot{x} \ddot{x}) \equiv 0$, $(e \dot{x} \ddot{x}) \not\equiv 0$. The parameter σ defined by $d\sigma/dt = (e \dot{x} \ddot{x})^{1/3}$ is invariant with respect to unimodular affine transformations for x and the corresponding homogeneous transformations for e . Denoting the accents derivatives with respect to σ , the equations $e' = g x' + h x''$, $x''' = l e + m x'$ define the four coefficients g, h, l, m . Reciprocally, given the four functions $g = g(\sigma)$, $h = h(\sigma)$, $l = l(\sigma)$, $m = m(\sigma)$, the pair of curves e, x is defined to within unimodular (and for e homogeneous) affine transformations. From this, some properties of the affine differential geometry of curves are considered. In particular, it is shown that for closed curves, with certain restrictions, a four vertex theorem holds with respect to the function $\kappa' - \tau$ (κ = affine curvature, τ = affine torsion). The curves with $g - h' = 0$ are related with the „Gewindekurven“ of Salkowski and Blaschke.

L. A. Santaló.

Grottemeyer, Karl-Peter: Die Integralsätze der affinen Flächentheorie. Arch. der Math. 3, 38—43 (1952).

Es bedeutet $\tilde{x}(u^k)$ den dreimal stetig differenzierbaren Ortsvektor und

$$g_{ik} = \frac{L_{ik}}{\sqrt{L}}, \quad L_{ik} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u^k} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \right), \quad \|L_{ik}\| = L$$

den Maßtensor einer Fläche im dreidimensionalen Raum, in dem die Gruppe der raumtreuen Scherungsaffinitäten betrachtet wird. Aus invarianten Ableitungsrelationen gewinnt der Verf. durch Integration und Anwendung des Stokesschen Satzes insgesamt sieben verschiedene „vektorielle Integralsätze“ der affinen Flächentheorie, die in mancher Hinsicht denen der euklidischen Flächentheorie analog sind. — Aus einem der Integralsätze wird sodann für geschlossene Flächen vom Geschlecht Null und fester mittlerer Affinkrümmung $H = \text{konst.}$ auf (1) $\iint (H^2 - K) \varrho \, d\sigma = 0$ geschlossen, worin K die affine Krümmung, ϱ die affine Stützfunktion und $d\sigma$ das affine Flächenelement bedeuten. Für $\varrho > 0$ folgt daraus die für Affinsphären kennzeichnende Bedingung (2) $H^2 - K = 0$. Für ein Flächenstück, das von einem geschlossenen affinsphärischen Flächenstreifen begrenzt wird, folgt gleichfalls die Relation (1) und für $\varrho > 0$ wieder (2), so daß die durch den Streifen gehenden Flächen mit fester mittlerer Affinkrümmung ebenfalls Affinsphären sind. — Ist für eine geschlossene Fläche mit $\varrho > 0$ \bar{H} das Maximum und \underline{H} das Minimum der mittleren Affinkrümmung, V das Volumen und O die affine Oberfläche, dann gelten die Ungleichungen $6 \sqrt{V \bar{H}} \geq O$ bzw. $6 \sqrt{V \underline{H}} \leq O$, in denen das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, falls die Fläche eine Affinsphäre ist.

R. Inzinger.

Grottemeyer, Karl-Peter: Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären. Arch. der Math. 3, 307—310 (1952).

In einer früheren Note (siehe vorsteh. Referat) hat Verf. mehrere vektorielle Integralsätze der affinen Flächentheorie angegeben, die er nunmehr zur Herleitung von kennzeichnenden Eigenschaften der eigentlichen Affinsphären benutzt. Bezeichnen K die Affinkrümmung, $2H$ die mittlere Affinkrümmung und ϱ die affine

Stützfunktion, dann erweist sich eine geschlossene, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit (1) $K = 1/\varrho^2$, $\varrho < \infty$ als eine eigentliche Affinsphäre. Unter den dreimal stetig differenzierbaren Eiflächen sind die eigentlichen Affinsphären dann durch (2) $H = 1/\varrho$ gekennzeichnet. — Bedeuten jedoch K und $2H$ die entsprechenden Krümmungsgrößen der euklidischen Flächentheorie und P die Minkowskische Stützfunktion, dann kennzeichnen bei bloß zweimaliger stetiger Differenzierbarkeit die Beziehungen (1) und (2) die Kugel, sofern darin ϱ durch P ersetzt wird. Die beiden Kennzeichnungen der eigentlichen Affinsphären sind demnach die affingeometrischen Analoga zu den entsprechenden Kennzeichnungen der Kugel in der euklidischen Flächentheorie.

R. Inzinger.

Ancochea, Germán: Affine und projektive Differentialgeometrie der singulären ebenen Kurvenelemente. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 18, 1—13 (1952).

L'A. riprende in esame l'analisi dei punti singolari delle curve piane secondo l'indirizzo proiettivo-differenziale iniziato da E. Bompiani e continuato particolarmente da A. Maxia. — Egli parte dalla rappresentazione di un ramo analitico di curva Γ di origine O , di ordine m e classe $n - m$ e trova per esso una rappresentazione normale rispetto al gruppo affine e una rappresentazione canonica, i cui coefficienti (o loro potenze) sono invarianti affini. L'A. passa poi al caso proiettivo mutando la retta impropria; gli invarianti affini di ordine differenziale $< n + m$ sono anche invarianti proiettivi. — Si procede poi alla determinazione di un riferimento intrinseco. — Se $n \neq 2m$, si ha un punto invariante sulla tangente in O dipendente dall'ordine $n + m$; una retta per O (normale proiettiva) dipendente dall'ordine $2n - m$; una retta (impropria) non passante per O dall'ordine $2n$; un punto unità dipendente dall'ordine $\max(2n, n + r)$ essendo $m + r$ l'ordine di contatto in O del ramo Γ con la conica osculatrice. — Se invece $n = 2m$ tutti gli elementi del riferimento dipendono dall'ordine $\max(4m, n + r)$. — Esistono rami, appartenenti a curve W per i quali non è possibile determinare il riferimento in modo intrinseco.

E. Bompiani.

Ancochea, G.: Géométrie différentielle des singularités des courbes de l'espace projectif. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 217—239 (1952).

Esame di un ramo Γ di curva sgheмба avente origine in O , di ordine m , di rango $n - m$ e di classe $p - n$. — Come nella trattazione del caso piano (v. ref. preced.) l'A. studia dapprima il caso affine raggiungendo la rappresentazione parametrica normale $x = t^m + \mu_{m+1}t^{m+1} + \dots$ ($\mu_n = \mu_s = 0$), $y = t^n + \nu_{n+1}t^{n+1} + \dots$, $z = t^p$, e dando significato geometrico della normale principale e binormale affine, e del punto unità quando è possibile cioè quando esiste un minimo valore di s per cui ν_{n+s} o μ_{n+s} non sono nulli. Il riferimento dipende dall'ordine $\max(2p - m, p + s)$. Possono esistere rette covarianti a Γ situate o meno nel piano osculatore e di ordine differenziale inferiore a quello della binormale o normale principale affini. — L'A. passa poi al caso proiettivo variando il piano improprio; e dimostra che gli invarianti affini di ordine $< p + m$ sono pure invarianti proiettivi. — In generale, cioè se non è $p = n + m = 3m$, si può determinare in modo intrinseco il piano improprio e la sua determinazione dipende dall'ordine $2p$. — Nel caso speciale $p = n + m = 3m$ è pure possibile fissare il riferimento ma in relazione ad ordini differenti. — È data l'interpretazione geometrica degli elementi del riferimento nei casi seguenti: cuspidi, punto di flesso, punto a piano osculatore stazionario. — È accennata infine l'estensione al caso di un S_n affine o proiettivo.

E. Bompiani.

Bol, G.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurven in der Ebene und im Raum. Arch. der Math. 3, 163—170 (1952).

Recenti ricerche hanno dimostrato come spesso sia utile, in Geometria Proiettiva Differenziale, non servirsi di un parametro privilegiato (come si fa, p. es., in geometria euclidea), ma convenga disporre della scelta del parametro a seconda

del problema che si tratta. — Data una curva piana (soddisfacente a opportune condizioni di regolarità e di differenziabilità), l'A. introduce relativamente a un suo punto (semplice, non di flesso), un triangolo di riferimento, dipendente dalla scelta del parametro, e studia le relazioni fra una data rappresentazione parametrica della curva e il corrispondente triangolo di riferimento, dando costruzioni geometriche (mediante opportuni passaggi al limite) per i lati e i vertici del triangolo stesso. — Analoghe questioni vengono poi trattate per le curve sgheembe, e per la curva di S_5 che rappresenta, sulla quadrica di Klein, le tangenti alla data curva sgheemba.

V. Dalla Volta.

Clement, Mary Dean: A criterion for determining the space of immersion of a variety of arbitrary dimensionality. Proc. Amer. math. Soc. 3, 715—722 (1952).

Given a variety in a projective space S_n the dimensionalities of its osculating spaces of different orders cannot be greater than n and must reach n when the order of osculation increases. — This obvious remark, which has been largely used by Italian geometers, is given analytic expression by use of matrices. *E. Bompiani.*

Vaona, Guido: Sulle trasformazioni puntuali fra piani aventi due reti asintotiche di curve caratteristiche corrispondenti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 148—154 (1952).

Una trasformazione puntuale fra due piani determina in ciascuno di essi un tritessuto di curve (le curve caratteristiche). L'A. dimostra che: Le trasformazioni puntuali fra due piani per le quali due reti di curve caratteristiche corrispondenti sono due reti asintotiche, sono tutte e sole quelle che si ottengono proiettando da due punti fissi coppie di punti corrispondenti di due superficie non sviluppabili proiettivamente applicabili (in particolare omografiche). — La trattazione analitica suggerisce una classificazione delle trasformazioni suddette in tre tipi: 1) Trasformazioni ottenute proiettando due superficie omografiche; 2) Trasformazioni ottenute proiettando due superficie applicabili del tipo R_0 ; 3) Trasformazioni ottenute proiettando due superficie applicabili del tipo R . (Per la nozione di rete piana asintotica e di superficie proiettivamente applicabili: Fubini e Čech, Géométrie projective différentielle des surfaces, Gauthier-Villars, Paris 1931). *M. Villa.*

Muracchini, Luigi: Alcune proprietà in grande delle trasformazioni puntuali fra spazi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 123—131 (1952).

L'A. determina dapprima le condizioni affinché in una trasformazione puntuale fra due spazi ordinari, per ogni coppia regolare di punti corrispondenti, esista una coppia di direzioni caratteristiche inflessionali di seconda specie (anziché di prima specie, come avviene in generale). — Fra le trasformazioni puntuali per le quali, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, si ha coincidenza di tutte le direzioni caratteristiche, tre tipi presentano la circostanza predetta, mentre un quarto tipo non la presenta (in generale). L'A. dimostra anche: In una trasformazione che, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, abbia almeno quattro delle direzioni caratteristiche coincidenti (ma non infinitamente vicine su una falda lineare di cono), la direzione caratteristica multipla è inflessionale di seconda specie (almeno). — L'A. considera poi quelle trasformazioni per le quali, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, vi sono calotte piane del secondo ordine corrispondenti (giaciture caratteristiche) con particolare riguardo al caso in cui esistono superficie inviluppate da quei piani (superficie caratteristiche). Relativamente alle trasformazioni puntuali per le quali, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, si ha coincidenza di tutte le direzioni caratteristiche, l'A. osserva che i tre tipi suddetti presentano giaciture caratteristiche mentre il quarto non ne presenta. — Se in una coppia generica vi sono infinite giaciture caratteristiche (costituenti necessariamente un fascio), esistono superficie caratteristiche dipendenti da una funzione arbitraria di un argomento. Se invece, in una coppia generica, vi è soltanto un numero finito ν di giaciture caratteristiche ($1 \leq \nu \leq 6$) non esistono, in generale, superficie caratteristiche (se ne esistono dipendono da una costante arbitraria). — Si dimostra che: Condizione necessaria e sufficiente affinché due superficie, corrispondenti in una trasformazione T , siano caratteristiche per T è che T muti l'una nell'altra le forme differenziali quadratiche delle asintotiche delle due superficie. E inoltre: Date due superficie caratteristiche corrispondenti di una trasformazione T , se le asintotiche dei due sistemi (supposte le superficie non rigate) sono curve caratteristiche di T allora la corrispondenza subordinata fra le due superficie è una applicabilità proiettiva, e viceversa. — L'A. infine, valendosi della nozione di varietà quasi-asintotica a tre indici, introdotta dal Recensore (questo Zbl. 39, 385).

dimostra che sussiste una proprietà analoga a quella di cui godono le curve caratteristiche di una trasformazione puntuale fra piani (questo Zbl. **39**, 385), e cioè: Una coppia di superficie caratteristiche corrispondenti in una trasformazione T dà luogo sulla V_3 rappresentativa di T della V_6 di C. Segre ad una superficie quasi-asintotica $\sigma_{1,2,3}$ di V_3 , V_6 (in generale di 3^a specie), e inversamente.

M. Villa.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

García, Godofredo: Neue Methoden im absoluten Differentialkalkül von G. Ricci und T. Levi-Civita und in der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima **15**, 25—92 (1952) [Spanisch].

Detailed exposition of the topics on Riemannian Geometry and absolute differential calculus which are necessary in the general theory of relativity of Einstein. A very convenient vectorial method is used throughout.

L. A. Santaló.

Laptev, G. F.: Über eine neue invariante analytische Methode differential-geometrischer Untersuchungen. Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951, 175—178 (1952) [Russisch].

Verf. gibt in einer kurzen Note einige sehr allgemein gehaltene Hinweise auf Untersuchungen, die im Moskauer Seminar von Finikov angestellt werden und worin die gruppentheoretischen Methoden und die Begriffe der Theorie der geometrischen Objekte auf mannigfache Fragen der Differentialgeometrie angewandt werden.

W. Burau.

Hsiung, Chuan-Chih: Some curves in Riemannian space. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **38**, 816—823 (1952).

Es sei $C(x^i(s))$ eine Kurve in einem Riemannschen Raum V_n . Diese Kurve wird deformiert in $\bar{C}: \bar{x}^i = x^i + \varepsilon \lambda \xi_3^i$, wo ξ_3 die zweite Normale der Kurve C ist. Die zweite Normale von \bar{C} in \bar{x}^i wird pseudoparallel verschoben nach x^i . Es wird untersucht, wann dieser verschobene Vektor ξ_3' mit ξ_3 zusammenfällt. Dies ist der Fall, wenn 1^o λ eine Konstante ist und 2^o die Krümmungen von C ($n-2$) bestimmten Differentialgleichungen genügen.

J. Haantjes.

Manikarnikamma, S. N.: The second curvature of a geodesic on a hypersurface of a Riemannian space. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **36**, 175—184 (1952).

Für die erste Torsion τ_2 einer Geodätischen auf einer Hyperfläche des $(n+1)$ -dimensionalen Riemannschen Raumes wird die Darstellung

$$\tau_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{p,q} \cos^2 \theta_p \cos^2 \theta_q \left(\frac{1}{\varrho_p} - \frac{1}{\varrho_q} \right)^2$$

abgeleitet. Dabei sind $1/\varrho_p$ die Hauptkrümmungen der Hyperfläche und θ_p die Winkel zwischen der Kurventangente und den Hauptkrümmungsrichtungen. Verf. betrachtet als Hauptaufgabe die Untersuchung der Richtungen, für welche die Torsion der Geodätischen in einem Punkt der Hyperfläche ein Maximum oder Minimum liefert. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergibt sich, daß ihr Tangentenvektor in diesem Punkt eine Linearkombination von zwei Hauptkrümmungsrichtungen darstellt, welche zu irgend zwei verschiedenen Hauptkrümmungen $1/\varrho_r, 1/\varrho_s$ gehören, und daß er deren Winkel halbiert. Die Größe der Torsion ist dann $\tau_2 = \pm \frac{1}{2} (1/\varrho_r - 1/\varrho_s)$. Ferner verschwindet die Torsion jeder Geodätischen dann und nur dann, wenn der Hyperflächenpunkt ein Nabelpunkt ist. — Verf. verallgemeinert schließlich noch einige Gleichungen der gewöhnlichen Differentialgeometrie, insbesondere über die Torsion von Geodätischen in den Asymptotenrichtungen.

W. Barthel.

Mishra, R. S.: Hyper-asymptotic curves of a Riemannian hypersurface. Math. Student **20**, 63—65 (1952).

Verf. hat sich in zwei früheren Arbeiten (dies. Zbl. **38**, 337; **41**, 292) u. a. mit jenen Kurven einer Fläche V_2 des dreidimensionalen euklidischen Raumes V_3 befaßt, deren rektifizierende Ebenen ε die Strahlen einer vorgegebenen Linienkongruenz K enthalten; er nannte diese Kurven

Hyperasymptotenlinien der Fläche. In vorliegender Arbeit werden die Differentialgleichungen der Hyperasymptotenlinien einer Hyperfläche V_n , die in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit V_{n+1} von $n+1$ Dimensionen eingebettet ist, entwickelt. An die Stelle der Strahlenkongruenz wird dabei eine Kongruenz K von geodätischen Linien der V_{n+1} gesetzt, und an die Stelle der rektifizierenden Ebene die geodätische Fläche ε , welche durch die Tangente der Kurve gelegt werden kann und die Richtung eines ihrer $(n-1)$ Binormalenvektoren hat. Aus der gefundenen Differentialgleichung werden einfache Folgerungen für Hyperasymptotenlinien gezogen.

K. Strubecker.

Rund, Hanno: Zur Begründung der Differentialgeometrie der Minkowskischen Räume. Arch. der Math. 3, 60—69 (1952).

H. Rund hat (Finsler spaces considered as generalized Minkowskian spaces. Thesis, Cape Town 1950) einen Neuaufbau der Finsler-Geometrie begonnen. Die erste Grundlage ist die hier gegebene Behandlung eines Minkowskischen Raumes T_n . In ihm ist die Metrik durch eine Eichkörper-Funktion $F(x^i)$ bestimmt, die > 0 , streng konvex und in den x^i positiv homogen 1. Ordnung sein soll. $F(x^i) = 1$ gibt den Eichkörper, die Indikatrix des T_n . Nach dem Vorgang von

J. L. Synge, L. Berwald und E. Cartan wird mittels $g_{ik}(X^i) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(X^i)}{\partial x^i \partial x^k}$ die Länge des

Vektors X^i gemessen: $X^2 = F^2(X^i) = g_{ik}(X^i) X^i X^k$. Zu den Elementen der Rundschen Theorie gehört der zu T_n duale Minkowskische Raum T'_n , der folgendermaßen gewonnen wird: $H(y_i) = \text{fin sup}(y_i x^i)$ für alle x^i auf oder im Eichkörper, $F(x^i) \leq 1$, liefert in der Gleichung $\bar{y}_i x^i = H(\bar{y}_i)$ eine Tangentialhyperebene an die Indikatrix, deren Berührungspunkt \bar{x}^i heiße; H sei so normiert, daß $H(y_i) = 1$ ist, wenn \bar{x}^i auf der Indikatrix liegt; so ist für jedes x^i des T_n eindeutig ein Punkt y_i des dualen Raumes T'_n bestimmt. H genügt denselben Bedingungen

wie F ; $H(y_i) = 1$ bestimmt die Figuratrix, den Eichkörper in T'_n , $g^{ik}(Y_i) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^2(Y_i)}{\partial y_i \partial y_k}$

die Längenmessung in T'_n . Sind \bar{x}^i, \bar{y}_i entsprechende Punkte der Indikatrix und der Figuratrix,

so ist $g_{ik}(\bar{x}^i) g^{ir}(y_i) = \delta_k^r$ und es gilt $\bar{x}^i = \frac{\partial H(\bar{y}_i)}{\partial y_i}$, $\bar{y}_i = \frac{\partial F(\bar{x}^k)}{\partial x^i}$. Die y_i sind somit die

kanonischen Koordinaten, H die Hamilton-Funktion eines Variationsproblems, dessen Integrand von der Richtung so abhängt, wie F von den x^i . — Die eingeführte Winkeldefinition stimmt mit der von G. A. Bliss 1906 im 2-dimensionalen Fall gegebenen überein. Orthogonalität ist i. a. unsymmetrisch; sie ist gleich Transversalität in der Variationsrechnung. Die Winkeldefinition gestattet eine geeignete Einführung der Krümmung von Kurven im Raum und besonders auch auf Hyperflächen, so daß dabei z. B. eine $(n-1)$ -dimensionale Quadrik als verallgemeinerte Dupin'sche Indikatrix, Hauptrichtungen und Rodriguessa'sche Gleichungen für den Fall der Existenz der Hauptrichtungen gewonnen werden können. Ein Analogon des Satzes von Meusnier, das Verf. in seiner Thesis bewiesen hat, wird formuliert. Verf. stellt eine inzwischen begonnene Darstellung der Finsler-Geometrie unter Benutzung einer neuen Parallelverschiebung im Finsler-Raum in Aussicht. (Siehe dies. Zbl. 42, 404 und die folgenden Referate!) W. Süß.

Rund, Hanno: Eine Krümmungstheorie der Finslerschen Räume. Math. Ann. 125, 1—18 (1952).

Zugrunde liegt die vom Verf. eingeführte, von derjenigen von L. Berwald und von E. Cartan abweichende Parallelverschiebung in Finsler-Räumen (vgl. dies. Zbl. 42, 404) mit der Betrachtung der Geometrie in diesen Räumen als einer Theorie des Zusammenhangs einander benachbarter tangierender Minkowskischer Räume T_n , einschl. der zu diesen dualen Räume T'_n , (siehe vorstehendes Referat). Die das kovariante Differential DX^i eines Vektors X^i bestimmenden Übertragungsgrößen P_{ki}^l , die an die Stelle der Christoffelsymbole treten, sind in k, l nicht allgemein symmetrisch; deshalb verbietet sich der in der Riemannschen Geometrie übliche Weg zur Untersuchung der Raumkrümmung. Verf. findet folgenden neuen Zugang zum Studium dieser Krümmungsverhältnisse: Die tangierenden Räume T_n, T'_n sind affine Vektorräume verschwindender Krümmung. Die Krümmung des Finsler-Raumes im Punkte O wird sich also bei der Beobachtung der Abweichungen zwischen ihm und dem $T_n(O)$ ergeben. Da die Abweichungen 1. Ordnung in den dx^i sich aber allein schon durch die P_{ki}^l ausdrücken lassen, sind also solche 2. Ordnung zu untersuchen. Auf zwei Geodätischen E_1, E_2 durch den Punkt O mit dem Minkowskischen Winkel $d\varphi$ seien x^i, ψ^i die Koordinaten des beweglichen Punktes P bzw. M , s, σ die Bogenlängen OP bzw. OM . Die Länge des Vektors $PM = (\xi^i)$ und ihre Ableitung nach s sei von derselben Größenordnung wie $d\varphi$: $d\sigma/ds = 1 + \lambda(s)$ mit entsprechenden Bedingungen für $\lambda(s)$. Als Gleichung der „geodätischen Abweichung“ erhält man

$$(*) \quad \frac{D^2 \xi^i}{ds^2} - x'^i \frac{d\lambda}{ds} = -R_{khi}^j(x, x') \xi^h x'^j x'^k.$$

Hierin ist $R_{khi}^j(x, x') x'^k x'^j$ ein gemischter Tensor 2. Stufe, der Krümmungstensor für die Richtung (x') im Punkt (x) . Über den Tensorcharakter von R_{khi}^j selbst wird nichts ausgesagt. Im 2-dimensionalen Fall ist (*) die aus der Variationsrechnung bekannte Gleichung von Jacobi.

Dann läßt sich auch durch Mittelung und einen Grenzübergang aus dem Krümmungstensor als Ortsfunktion ein invarianter absoluter Krümmungsskalar $R(O)$ finden, dessen geometrische Bedeutung erneut das Verfahren rechtfertigt; es ist

$$R(O) = \frac{6}{L(1)} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{L(s) - i(s)}{s^2} \right],$$

worin L und i die Umfänge des Minkowskischen Kreises (Indikatrix in $T_2(O)$ bzw. des geodätischen Kreises vom Radius s sind. — Eine Erweiterung des Gaußschen Satzes über geodätische Dreiecke und ein Analogon der Formel von Gauß-Bonnet zeigen die Brauchbarkeit der eingeführten Begriffe und Methoden.

W. Süss.

Rund, Hanno: The theory of subspaces of a Finsler space. I. Math. Z. **56**, 363—375 (1952).

Die Geometrie von Unterräumen F_m eines Finsler-Raumes F_n wird in Abweichung von bisherigen Bearbeitungen auf der Grundlage der vom Verf. eingeführten kovarianten Ableitung in F_n (vgl. dies. Zbl. **42**, 404 sowie vorstehende Referate) entwickelt. Da für die Theorie des F_n die Hamilton-Funktion $H(x, y)$ des dualen Minkowski-Raumes T'_n im Punkte $(x) = (x^i)$ [$i = 1, 2, \dots, n$] ein Grundelement der Entwicklung des Verf. war, so wird zunächst die Hamilton-Funktion \bar{H} im dualen Tangentialraum T'_m des F_m behandelt. Für $x^i = x^i(u^\alpha)$ [$\alpha = 1, 2, \dots, m$] wird über den metrischen Tensor $\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u') = g_{ik}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u'^\beta}$ des F_m der Minkowski-Raum T'_m jedes Punktes des F_m als Raum der Elemente $v_\alpha = g_{\alpha\beta}(u, u') u'^\beta$ eingeführt. Als Hamilton-Funktion des T'_m tritt $\bar{H}(u^\alpha, v_\alpha) = H\left(x^i(u^\alpha), \frac{\partial y_i}{\partial v_\alpha} v_\alpha\right)$ der induzierten Eichfunktion $\bar{F}(u^\alpha, u'^\alpha) = F\left(x^i(u^\alpha), \frac{\partial x^i}{\partial u'^\alpha} u'^\alpha\right)$ ebenso gegenüber wie für F_n die Funk-

tion $H(x, y)$ der Funktion $F(x, x')$; z. B. liefert $\bar{g}^{\alpha\beta}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{H}^2(u, v)}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}$ den kontravarianten

Maßtensor des F_m . Orthogonalität in F_m ist Transversalität; sie ist i. a. unsymmetrisch und ist auch im F_n Orthogonalität. Die Bedeutung der vom Verf. eingeführten kovarianten Ableitung kommt in dem Verhältnis zwischen der vom F_n auf den F_m induzierten Ableitung und der im F_m selbst aus dessen Metrik $g_{\alpha\beta}$ analog entwickelten kovarianten Ableitung zum Ausdruck. Wie in F_n sind auch die Geodätischen des F_m antiparallel. Ist X^i oder U^α ein Vektorfeld von F_m , x'^i oder u'^α ein Einheitsvektor in der Richtung einer Verschiebung, so besteht zwischen den kovarianten Ableitungen DX^i und $\bar{D}U^\alpha$ in F_n bzw. F_m die Beziehung $g_{ik}(x, x') \frac{\partial x^k}{\partial u'^\beta} DX^i =$

$\bar{g}_{\alpha\beta}(u, u') \bar{D}U^\alpha$, eine Verallgemeinerung zur entsprechenden Formel in der Riemannschen Geometrie. Infinitesimale Parallelverschiebung in F_n längs einer im Unterraum F_m gelegenen Kurve \mathcal{C} ist auch Parallelverschiebung in F_m ; ist \mathcal{C} eine Geodätische des F_n , so ist also \mathcal{C} auch Geodätische des F_m . Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Vektorfeld von F_m aus längs \mathcal{C} in F_m parallel verschobenen Vektoren besteht, ist, daß seine in F_n kovariante Ableitung „bezüglich zur Tangente von \mathcal{C} senkrecht“ ist. Dieses auf eine Richtung x'^i von F_m bezogene Senkrechtstehen eines Einheitsvektors $n^{*i}(x, x')$ des F_n auf F_m ist durch die m Gleichungen definiert:

$g_{ik}(x, x') \frac{\partial x^i}{\partial u'^\alpha} n^{*k}(x, x') = 0$; dabei existieren $(n - m)$ linear unabhängige derartige Normal-

vektoren, vorausgesetzt, daß die Matrix der m Tangentenvektoren $\frac{\partial x^i}{\partial u'^\alpha}$ von F_m den Rang m hat.

Für $m = n - 1$ entspricht allen Tangentenrichtungen von F_{n-1} ein Normalenkegel von F_{n-1} . Er tritt an Stelle der üblichen Normalen, freilich gemeinsam mit einer weiteren Normalen. Ebenfalls $(n - m)$ Einheits-Normalvektoren in F_n auf F_m , aber unabhängig von F_m -Richtungen, werden durch die m Gleichungen bestimmt: $g_{ik}(x, n) \frac{\partial x^i}{\partial u'^\alpha} n^k = 0$; sie bestimmen für $m = n - 1$ den Normalvektor einer Hyperfläche des F_n , der zu dem Normalenkegel der F_{n-1} hinzukommt.

Die Komponenten $\frac{\delta X^i}{\delta s} = \frac{\partial x^i}{\partial u'^\beta} \cdot \frac{\bar{D}U^\beta}{Ds}$ der kovarianten Ableitung $\frac{\bar{D}U^\beta}{Ds}$ sind für eine Hyper-

fläche ($m = n - 1$) die Projektion der F_n -Ableitung $\frac{DX^i}{Ds}$ auf den Tangentenraum von F_{n-1}

in Richtung des Vektors $n^{*i}(x, x')$ aus dem Normalenkegel. Ist \mathcal{C} eine Geodätische von F_{n-1} , $\varrho^{-1}(x, x')$ ihre Krümmung in F_n im Punkt A , X^i der Einheitsvektor der Tangente einer F_{n-1} -Kurve, die \mathcal{C} in A berührt, so stehen die beiden Ableitungen in F_n und F_{n-1} in der Beziehung:

$\frac{DX^i}{Ds} = \frac{n^{*i}(x, x')}{\varrho(x, x')} + \frac{\delta X^i}{\delta s}$. Allgemein tritt an ihre Stelle:

$$\frac{DX^i}{Ds} = \sum_{p=m+1}^n \lambda_{(p)}(x, x', X) n_{(p)}^{*i}(x, x') + \frac{\delta X^i}{\delta s}.$$

W. Süß.

Kikuchi, Shigetaka: On the theory of subspace in a Finsler space. Tensor, n. Ser. 2, 67—79 (1952).

To each point x^i ($i = 1, \dots, n$) of a Finsler space F_n an element of support $x'^i = x'^i(x^k)$ is associated. By forming the Christoffel symbols of the metric tensor $g_{ij}(x^h, x'^h(x^k))$ regarded as point functions as in Riemannian geometry and by assuming certain given values of the partial derivatives $\partial x^h / \partial x^k$ the author obtains Cartan's expression for the components of the „euclidean connection“ (which are really independent of any such assumption). An m -dimensional subspace F_m is introduced by means of the parametric equations $x^i = x^i(y^\alpha)$ ($\alpha = 1, \dots, m$ with $m < n$). Two connections can then be defined in F_m : (1) the intrinsic connection parameters being defined as in F_n by means of the metric tensor of F_m , and (2) the induced connection parameters being defined by the projection of the covariant differential with respect to F_n of a vector of F_m on to the linear tangent space of F_m . These are in general different from each other. This problem has already been treated exhaustively by E. T. Davies [Proc. London math. Soc. 49, 19—39 (1945)]. The author deals with this question in a slightly different manner. The connections coincide for covariant differentiation in the direction of the element of support (cf. Davies, loc. cit. p. 21) so that it does not matter which of the two connections is considered when dealing with the geodesic and normal curvatures of a curve of F_m . The author obtains so-called „Frenet Formulae“ for F_m , supposedly simpler than those given by H. Hombu (this Zbl. 16, 78). If the normal curvature vector vanishes identically at each point of F_m for any geodesic of F_m , F_m is called totally extremal. If parallelism in F_m with respect to the induced metric implies parallelism in F_n , F_m is said to be totally geodesic. The author asserts the following theorems: (1) If in a totally extremal F_m the elements of support are parallel with respect to F_m they are also parallel with respect to F_n . (2) A necessary condition that F_n admits a totally extremal F_{n-1} in each $(n-1)$ -direction at each point is that $R_{0i0j} = \sigma(g_{ij} - l_i l_j)$, where l^i is a component vector of a specially constructed orthogonal coordinate system and $\sigma = R_{0\alpha 0\alpha}$. (3) A necessary and sufficient condition that F_n admits a totally geodesic F_{n-1} in each $(n-1)$ -direction at each point is that F_n be a Riemannian space of constant curvature. — Due to difficulties in notation the reviewer was not in a position to follow the author's reasoning in detail, especially at crucial points.

H. Rund.

Graiff, Franca: Sulla possibilità di costruire parallelogrammi chiusi in alcune varietà a torsione. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 132—135 (1952).

It is well known that if in an affine connected space the vector dx^i is parallel displaced from x^i to $x^i + \delta x^i$ and the vector δx^i is parallel displaced from x^i to $x^i + dx^i$, the difference between the coordinates of the extremities of the resulting vectors is equal to $(\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i) dx^j \delta x^k$. The author makes the trivial observation that if the second displacement is taken according to the affinity $\bar{\Gamma}_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$, the preceding difference vanishes.

L. A. Santaló.

Scheibe, Erhard: Über einen verallgemeinerten affinen Zusammenhang. Math. Z. 57, 65—74 (1952).

Die Arbeit ist eine Fortführung der von Lyra (dies. Zbl. 42, 159) begonnenen Theorie eines verallgemeinerten affinen Zusammenhanges. Es werden einige Eigenschaften des zum affinen Zusammenhang $\pi_{\alpha}^h = \Gamma_{\alpha}^h - \frac{1}{2} \delta_{\alpha}^h \varphi_{\alpha}$ ($\Gamma_{\alpha}^h = \Gamma_{\alpha i}^h$) gehörigen Krümmungstensors hergeleitet. Die Bedingung dafür, daß der Raum projektiv eben ist, in welchem Falle die Richtungsübertragung vom Wege unabhängig ist, wird abgeleitet. In einem metrischen Raum mit Fundamentaltensoren g_{ij} und γ_{α} gibt es mehrere kongruente Zusammenhänge. Es wird gezeigt, daß zu zwei dieser Übertragungen verschiedene Systeme von geodätischen Linien gehören.

J. Haantjes.

Bompiani, E.: Sulle connessioni affini non-posizionali. Arch. der Math. 3, 183—186 (1952).

An n -dimensional space $X_n(x^1, \dots, x^n)$ is considered in which a „non-positional“ affine connection L_{hk}^i is defined. By this the author means that the L_{hk}^i depend not only on the position coordinates x^i of a point but also on a set of m directions dx_1, dx_2, \dots, dx_m issuing from this point, denoted by dx_{α} ($\alpha = 1, \dots, m$). In order that the $L_{hk}^i \equiv L_{hk}^i(x, dx_{\alpha})$ satisfy the usual

transformation equations of the general geometry of paths it is stipulated that the L_{hk}^i are homogeneous of degree zero in each of the directional arguments dx^α (or \dot{x}). For the case $m = 0$ we obtain a Non-Riemannian space (in the sense of Eisenhart); when $m = 1$ we have the type of space first considered by J. Douglas [Ann. of math. **29**, 154—166 (1928)] and Knebelman [Amer. J. Math. **51**, 527—564 (1929)]. Furthermore, when a metric is introduced, X_n becomes a Finsler space for the case $m = 1$. Denoting the symmetrical part of L_{hk}^i by Γ_{hk}^i the author obtains the curvature tensor

$$R_{hkl}^{i\alpha} = \partial_k \Gamma_{hl}^i - \partial_h \Gamma_{kl}^i + \Gamma_{hl}^p \Gamma_{kp}^i - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{hp}^i + \partial_j \Gamma_{lh}^i \partial_k \dot{x}^j - \partial_j \Gamma_{lk}^i \partial_h \dot{x}^j$$

when limiting himself to the symmetrical case. Here $\partial_i = \partial/\partial x^i$ and $\partial_i^\alpha = \partial/\partial \dot{x}^i$. Even for the case of a Finsler space this tensor is not related to the curvature tensor introduced by E. Cartan (Les espaces de Finsler, Paris 1934, Actual. Sci. industr. Nr. 79, this Zbl. **8**, 418, p. 35 seq. of the book) and, in the opinion of the reviewer, it seems to be better adapted to the study of such spaces rather than the latter. $R_{hkl}^{i\alpha}$ can only be calculated at a point when not only the \dot{x}^i but also their first derivatives are known at this point. Thus m fields of directions must be defined in the neighbourhood of this point. By means of integrability conditions the author obtains a specialised form $\overset{*}{R}_{hkl}^{i\alpha}$ of $R_{hkl}^{i\alpha}$, which is a generalisation of the curvature tensor introduced by Knebelman (loc. cit. p. 530) for the case $m = 1$. By restricting himself to this case in § 4, the author introduces a metric function $F(x, \dot{x})$; and putting $\Gamma^i(x, \dot{x}) = \frac{1}{4} \{ \partial_s \dot{\partial}_j F^2 \dot{x}^s - \partial_j F^2 \} g^{ij}$, ($\dot{\partial}_j = \partial/\partial \dot{x}^j$), (taking into account a printing error in the corresponding equation of the paper), he defines $\Gamma_{hk}^i = \partial_h \dot{\partial}_k \Gamma^i$. This leads to the covariant derivative of Berwald [Math. Z. **25**, 40—73 (1926)] and $\overset{*}{R}_{hkl}^{i\alpha}$ becomes in this case the curvature tensor as defined by Berwald. Finally the author discusses the connection between his covariant derivative and the one defined by the rev. (this Zbl. **42**, 404). H. Rund.

Kanitani, Joyo: Sur la transformation infinitésimale du groupe d'holonomie. Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A **27**, 75—93 (1952).

Let R be a space with a projective connection. The author studies the equations for the infinitesimal transformations of the group of holonomy relative to R . The problem leads to complicate calculations and the result is also a rather involved expression. Besides, a set of conditions are obtained in order that a given projective connection give rise to a given group of holonomy. L. A. Santaló.

Otsuki, Tominosuke: On the spaces with normal projective connexions and some imbedding problem of Riemannian spaces. I. II. Math. J. Okayama Univ. **1**, 69—98, **2**, 21—40 (1952).

Let P_{n+1} be a space with a normal projective connexion. If the holonomy group H of P_{n+1} fixes a hyperquadric Q_n , the space in consideration is the one corresponding to a class of affinely connected spaces with corresponding paths including an Einstein space with non-vanishing scalar curvature. (Cf. Otsuki, this Zbl. **41**, 507, Sasaki-Yano, this Zbl. **41**, 307.) In such space P_{n+1} there exists a hypersurface F_n such that F_n can be regarded as the image of Q_n under the connexion of P_{n+1} . If P_{n+1} is a space with a normal projective connexion constructed from a Riemannian space V_{n+1} , then we can induce a Riemannian metric on F_n , so F_n can be regarded as a Riemannian space. Accordingly, reversing the reasoning we get the following problem: (I) Let there be given a Riemannian space V_n . Determine the condition under which the given Riemannian space V_n can be imbedded into a Riemannian space V_{n+1} as a hypersurface F_n so that the holonomy group of the space with the normal projective connexion corresponding to the V_{n+1} fixes a hyperquadric Q_n and the image of Q_n in V_{n+1} is F_n . If there exists such space V_{n+1} , it is projectively equivalent to an Einstein space with non vanishing scalar curvature. — On the other hand Campbell (A course of differential geometry, Oxford 1926) proved that „any Riemannian space V_n can be imbedded as a hypersurface in a suitable Einstein space A_{n+1} .“ Campbell's proof seems us to be purely analytical. In connexion with Campbell's theorem, the author first solves the problem (I) under the condition (II): V_{n+1} is an Einstein space. The author got an algebraic criterion for the existence of the solution. It is a very nice idea; but it is pity that the result is not so elegant. However, in particular, if V_n is an Einstein space A_n , then A_n can always be imbedded into V_{n+1} satisfying (I) and (II) and moreover, A_n is totally geodesic or umbilical in the A_{n+1} . Compare also the papers of the author which concern to the analogous problem in the space with a normal conformal connexion (this Zbl. **41**, 306). — If we denote the invariant hyperquadric of the holonomy group H by $G_{\lambda\mu} z^\lambda z^\mu = 0$ ($\lambda, \mu = 0, 1, \dots, n+1$).

then $y(x) \equiv |g_{ij}|^{1/(n+2)} G_{00}(i, j = 1, 2, \dots, n+1, x^i \text{ local coordinates in } P_{n-1})$ is a scalar and the hypersurface F_n is given by the equation $y = 0$. The author then solves the problem (I) under the condition (II'): The orthogonal trajectories of the family of the hypersurfaces on which y is constant are geodesics in V_{n+1} . The author got conditions for the existence of solutions. They are always satisfied if the given V_n is an Einstein space or it is a space whose Ricci tensor satisfies the conditions $R_{b,c}^a = 0$, $R_c^a R_b^c = \frac{R}{n-1} R_b^a$. S. Sasaki.

Hiramatu, Hitosi: On projective collineations in a space of hyperplanes. Tensor, n. Ser. 2, 1—14 (1952).

In einer X_n sei ein System von Hyperflächen mit Tangentialvektor $u_i(x)$ gegeben durch die Pfaffschen Gleichungen (1) $u_i dx^i = 0$, $du_j = \Gamma_{jk}(x, u) dx^k$. Die $\Gamma_{ij}^h = \partial \Gamma_{ij} / \partial u_h$ sind Übertragungsparameter, aus welchen eine projektive Konnexion abgeleitet werden kann, für die (1) die Differentialgleichungen der projektiv ebenen Hyperflächen sind. Eine infinitesimale Transformation $T: x^i = x^i + \xi^i(x) dt$ wird eine Kollineation genannt, wenn sie das System von Hyperflächen invariant läßt. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben dafür, daß T eine Kollineation ist. Auch wird untersucht, wann der Raum eine r -gliedrige Gruppe von Kollineationen gestattet. Verf. macht vielfach Gebrauch von der Lieschen Ableitung in bezug auf ξ^i . J. Haantjes.

Topologie :

• Eilenberg, Samuel and Norman Steenrod: Foundations of algebraic topology. (Princeton Mathematical Series Nr. 15). Princeton: University Press 1952. XIV, 328 p. \$ 7,50.

Ce volume constitue le premier exposé didactique d'une partie des progrès considérables réalisés par la théorie de l'homologie dans ces dix dernières années; le lecteur qui voudra se rendre compte de l'importance de ces progrès, surtout en ce qui concerne les méthodes d'exposition, pourra par exemple comparer ce livre au dernier en date des grands Traités de Topologie algébrique, celui de Lefschetz [Algebraic topology, Amer. math. Colloqu. Publ. Vol. 27, New York 1942]. La méthode d'exposition choisie par les AA. est fondée sur la conception (qui leur est propre) d'une définition axiomatique de l'homologie: parmi les propriétés les plus simples et les plus utiles de la théorie, on en isole un certain nombre que l'on pose en axiomes; et le fait remarquable, découvert par les AA., est que, pour les catégories d'espaces les plus usuels, ces axiomes caractérisent complètement les groupes d'homologie, à un „isomorphisme“ près. Il n'y a donc pas à choisir (sinon pour raisons de commodité) entre les nombreux modes de définition de l'homologie proposés par divers auteurs dans les 20 dernières années; en outre, pour la plupart des applications de l'homologie, ces définitions (en général assez compliquées) sont tout à fait inutiles (elles ne servent qu'à donner une preuve d'existence); l'application directe des axiomes fournit un outil beaucoup plus maniable, à peu près entièrement débarrassé des longs calculs d'autrefois. — Les trois premiers chapitres donnent l'énoncé des axiomes, leurs premières conséquences, et la démonstration du théorème fondamental d'unicité. La notion d'homologie part de deux „catégories“ d'objets: d'une part, une catégorie d'espaces topologiques, ou plutôt de couples (X, A) de tels espaces, avec $A \subset X$ (ce peut être, soit la catégorie de tous les couples possibles satisfaisant à cette condition, ou on peut se restreindre au cas où A et X sont compacts, ou au cas où X est localement compact et A fermé dans X); de l'autre, une catégorie de groupes abéliens (R -modules sur un anneau ayant un élément unité, ou groupes compacts). Trois conceptions dominent la théorie: à chaque couple (X, A) d'espaces de la catégorie donnée et à chaque groupe G de la catégorie donnée est associée une suite de groupes abéliens $H_q(X, A; G)$ ou $H_q(X, A)$ [groupe d'homologie relative de X par rapport à A , à coefficients dans G , de dimension q ; intuitivement, c'est le quotient du groupe des chaînes q -dimensionnelles de X , dont le bord est dans A , par celui des chaînes de même dimension, qui sont des bords, modulo A , de chaînes $(q+1)$ -dimensionnelles]; le nombre q est un entier qui initialement peut varier de $-\infty$ à $+\infty$. En second lieu, à la catégorie d'espaces envisagés est associée une catégorie d'applications de ces espaces les uns dans les autres (le plus souvent, les applications continues); et à toute application $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ (i. e. telle que $f(X) \subset Y$, $f(A) \subset B$) de cette catégorie doit correspondre pour chaque q , un homomorphisme f_{*q} de $H_q(X, A)$ dans $H_q(Y, B)$. Enfin, il y a un homomorphisme fondamental, dit bord ∂ , qui applique chaque $H_q(X, A)$ dans $H_{q-1}(A)$ [écrit pour $H_{q-1}(A, \emptyset)$]. Cela posé, les AA. énoncent au chap. I les 7 axiomes fondamentaux reliant les notions précédentes; les trois premiers expriment que f_{*} est l'identité si f est l'identité, que $(gf)_{*} = g_{*} f_{*}$ et que ∂ et f_{*} commutent; le dernier exprime le lien entre G et les groupes d'homologie.

logie [pour un espace réduit à un point P , $H_q(P) = 0$ pour $q \neq 0$ et $H_0(P) = G$ à une isomorphie près]; les axiomes 5 et 6 sont appelés respectivement axiome d'homotopie et axiome d'excision; ils expriment respectivement que deux applications homotopes f, g donnent les mêmes homomorphismes f_*, g_* , et que si on enlève de A un ensemble ouvert U tel que $\bar{U} \subset A$, l'homologie de $X - U$ relative à $A - U$ est la même que celle de X relative à A . Enfin, l'axiome le plus important (qui domine toute la topologie algébrique contemporaine, ainsi que les récentes applications de l'homologie en algèbre pure) est l'axiome d'exactitude, d'après lequel, dans la suite

$$\cdots \xleftarrow{i_*} H_{q-1}(A) \xleftarrow{\partial} H_q(X, A) \xleftarrow{j_*} H_q(X) \xleftarrow{i_*} H_q(A) \xleftarrow{\partial} \cdots,$$

[où i est l'injection $(A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$, j l'injection $(X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$] l'image de chaque homomorphisme est le noyau du suivant. Les A.A. donnent aussi les axiomes correspondants pour la cohomologie (qui, dans tout le Livre, ne joue qu'un rôle subordonné); puis, dans le reste du chap. I, ils développent les premières conséquences des axiomes, montrant notamment comment on peut généraliser l'homologie relative à la notion d'homologie d'un „triplet“ (X, A, B) (avec $B \subset A \subset X$) et même d'une „triade“ (X, X_1, X_2) (X_1 et X_2 sous-espaces quelconques de X); les „suites exactes“ d'homologie correspondantes jouent un rôle technique important dans la suite. — Les chap. II et III sont consacrés à l'homologie des complexes simpliciaux (ou, ce qui revient au même, des espaces triangulables). Les notions élémentaires classiques sont définies et discutées au chap. II: un complexe simplicial (fini) est défini comme ensemble K de faces d'un simplexe tel que toute face d'un simplexe de K est encore dans K ; $|K|$ désigne l'espace réunion des simplexes de K . Les notions d'application simpliciale, de subdivision barycentrique, d'approximation simpliciale, sont ensuite définies comme d'ordinaire. Le produit de deux complexes simpliciaux (qui, dans ce volume, n'est utilisé que lorsque l'un des facteurs est un 1-simplexe) est aussi défini par une méthode très élégante. — Le chap. III établit que si une théorie d'homologie existe dans la „catégorie“ des espaces triangulables [ou plutôt des couples (X, A) , où A est un sous-complexe de la triangulation de X], elle est nécessairement isomorphe à celle que donne la construction classique. Autrement dit, à partir des axiomes, il s'agit de remonter à cette construction. La marche générale des idées est la suivante. K désignant un complexe simplicial, L un sous-complexe, K^q le squelette q -dimensionnel de K , le groupe $C_q(K, L)$ des q -chaînes de K modulo L est défini à partir de l'homologie comme $H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|)$. L'opérateur bord $\partial_q: C_q(K, L) \rightarrow C_{q-1}(K, L)$ est défini comme le composé $k_* \partial$, où

$$\partial: H_q(|K^q \cup L|, |K^{q-1} \cup L|) \rightarrow H_{q-1}(|K^{q-1} \cup L|)$$

est donné par la théorie de l'homologie, et k_* provient de l'inclusion $k: (|K^{q-1} \cup L|, \emptyset) \rightarrow (|K^{q-1} \cup L|, |K^{q-2} \cup L|)$. L'application des axiomes au cas particulier où K est un q -simplexe s^q , L sa frontière s^{q-1} , montre que $H_q(|s^q|, |s^{q-1}|)$ est isomorphe à G , et fournit un isomorphisme bien déterminé (l'isomorphisme d'incidence“) de $H_q(|s^q|, |s^{q-1}|)$ sur $H_{q-1}(|s^{q-1}|, |s^{q-2}|)$ où s^{q-2} est une face de s^{q-1} ; à partir de là, il est facile d'associer à tout ordre $A^0 < A^1 < \cdots < A^q$ des sommets du simplexe s^q un isomorphisme bien déterminé $g \rightarrow g A^0 A^1 \cdots A^q$ de G sur $H_q(|s^q|, |s^{q-1}|)$; l'influence de l'ordre considéré sur cet isomorphisme s'élucide en appliquant les axiomes aux automorphismes simpliciaux du simplexe, et on aboutit ainsi à l'écriture habituelle des q -chaînes et de leur bord. Cela fait, on peut définir les groupes d'homologie comme d'ordinaire, au moyen des q -cycles et des q -bords (modulo L), et il s'agit enfin de prouver que ces groupes $H_q(K, L)$ sont canoniquement isomorphes aux groupes $H_q(|K|, |L|)$ de la théorie axiomatique et en outre indépendants des triangulations de $|K|$ et $|L|$, ce qui se fait par un emploi ingénieux de nombreuses suites exactes. — Les chapitres VI, VII et IX donnent des démonstrations d'existence de théories d'homologie dans trois cas: l'homologie simpliciale pour les complexes simpliciaux, l'homologie singulière et l'homologie de Čech pour les espaces topologiques quelconques. Les chap. IV et V introduisent des notions préliminaires. Au chap. IV, un langage commode, celui des „foncteurs“, est utilisé pour décrire une fois pour toutes des situations générales très simples qui se présentent très souvent par la suite, et éviter ainsi d'ennuyeuses redites. Le chap. V contient les préliminaires algébriques, notamment les propriétés élémentaires du produit tensoriel $C \otimes G$ de deux R -modules, et de leur groupe d'homomorphismes $\text{Hom}(C, G)$. Un complexe abstrait K („chain complex“) est défini comme une suite infinie de groupes $C_q(K)$ et d'homomorphismes ∂_q :

$$\cdots \leftarrow C_{q-2}(K) \xleftarrow{\partial_{q-1}} C_{q-1}(K) \xleftarrow{\partial_q} C_q(K) \leftarrow \cdots$$

qui est une „suite d'ordre 2^q “, i. e. telle que $\partial_{q-1} \partial_q = 0$ (une telle suite n'est pas nécessairement exacte). Il est facile à partir d'une telle suite de définir à la manière habituelle les groupes d'homologie (abstraites) $H_q(K)$ du complexe; la „théorie relative“ abstraite, se définit de même à partir d'un sous-complexe L [formé de sous-groupes $C_q(L) \subset C_q(K)$] et du complexe quotient M [formé des quotients $C_q(K)/C_q(L)$], et on établit le résultat fondamental qu'à la suite exacte

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} M \rightarrow 0$$

correspond la suite exacte d'homologie

$$\cdots \leftarrow H_{q-1}(L) \xleftarrow{\partial_*} H_q(M) \xleftarrow{\varphi_*} H_q(K) \xleftarrow{\psi_*} H_q(L) \leftarrow \cdots$$

Il faut encore, de ce point de vue, définir „abstraitement“ les „homotopies“, ce qui se fait par les classiques opérateurs d'homotopie de Lefschetz („chain homotopies“). la notion d'„excision“ [une „excision“ abstraite $f: K \rightarrow L$ signifie simplement que f_* est un isomorphisme de $H_q(K)$ sur $H_q(L)$ pour tout q], et enfin la notion de „complexe ponctuel“ K [défini par les conditions $H_q(K) = 0$ pour $q \neq 0$ et $H_0(K) = C_0(K)$]. Avec ces définitions l'homologie „abstraite“ vérifie les 7 axiomes. Pour obtenir les groupes d'homologie à coefficients dans un groupe G , on applique la même construction aux produits tensoriels $C_q(K) \otimes G$ (pour l'homologie) ou aux groupes $\text{Hom}(C_q(K), G)$ (pour la cohomologie). — L'„homologie simpliciale formelle“ étudiée au chap. VI n'est pas une „théorie d'homologie“ au sens du chap. I, mais bien en fait une théorie purement algébrique, cas particulier de celle développée au chap. V. On part d'un „complexe simplicial formel“ K , qui n'est autre qu'un ensemble de parties finies (simplexes) d'un ensemble W , avec la condition que $s \in K$ et $s' \subset s$ entraîne $s' \in K$. Chaque suite finie $A^0 \dots A^q$ où les A^i sont tous dans un simplexe de K (ils peuvent être distincts ou non) est dit q -chaîne élémentaire, et le groupe abélien libre engendré par ces q -chaînes est dit groupe des q -chaînes et noté $C_q(K_0)$. On définit comme d'ordinaire des opérateurs „bords“ ∂_q [on pose $C_q(K_0) = 0$ si $q < 0$], et on est ainsi en mesure d'appliquer au „complexe abstrait“ K_0 la théorie du chap. V. (Les seules applications $f: K_0 \rightarrow K'_0$ que l'on considère au début sont celles provenant d'applications simpliciales de K dans K' .) Il faut seulement préciser la notion d'„homotopie“ (celles d'„excision“ et de „complexe ponctuel“ sont définies de façon naturelle; en fait, on a même un „axiome d'excision“ plus fort que dans le chap. I); cette notion est remplacée par la notion d'„applications simpliciales contigües“, deux telles applications f, g de K dans K' ayant la propriété que pour tout simplexe s de K , $f(s)$ et $g(s)$ sont dans le même simplexe de K' ; cela permet de définir facilement un opérateur d'homotopie. Le chapitre se poursuit par l'étude d'applications $K_0 \rightarrow K'_0$ plus générales que celles provenant d'applications simpliciales de K dans K' , en particulier l'application provenant de subdivisions barycentriques lorsque K est un complexe simplicial au sens du chap. II; on montre ainsi que la subdivision barycentrique ne change pas l'homologie. Il est aussi prouvé qu'on aboutit aux mêmes groupes d'homologie quand on part (comme dans la théorie classique) des „simplexes orientés“ au lieu des „chaînes élémentaires“. Enfin une note montre que pour un espace triangulable, les groupes d'„homologie simpliciale formelle“ déduits d'une triangulation sont en fait indépendants de cette triangulation, i. e. le théorème fondamental d'invariance de la théorie classique. [N. B.: dans la démonstration, il semble au Réf. que les 3 premières lignes de la p. 181 ne sont pas correctes, car du fait que $\alpha(T, T') \alpha(T', T'') \alpha(T'', T)$ est un isomorphisme, il est déduit que $\alpha(T', T'')$ est „sur“, ce qui est inexact sans autre hypothèse. Pour compléter le raisonnement, il suffit de prendre m tel que $T'^m < T'' < T' < T$ et de remarquer que $\alpha(T, T'')$ et $\alpha(T', T'^m)$ sont des isomorphismes.] — Avec le chap. VII, on revient à la topologie. Ici, on part des „simplexes singuliers“, applications continues de simplexes euclidiens dans un espace X , et le groupe des q -chaînes singulières $C_q(X)$ est le groupe libre engendré par toutes les applications continues d'un q -simplexe fixe A_q dans X . L'homotopie et l'excision sont ici les mêmes qu'au chap. I (en fait, ici encore, on a un axiome d'excision plus fort); la seule partie du chapitre qui ne soit pas une pure application concerne la démonstration des axiomes d'homotopie et d'excision. Cela fait, on a une théorie d'homologie valable pour tous les couples d'espaces (X, A) , et qui naturellement donne une homologie „isomorphe“ à l'homologie simpliciale pour les espaces triangulables (ce fait est d'ailleurs démontré directement à nouveau). On peut aussi étendre la théorie à des „triades“ d'espaces quelconques. — L'autre méthode de définition d'une théorie d'homologie applicable aux espaces topologiques généraux, celle de Čech, est présentée au chap. IX, après un chapitre préliminaire où sont exposées les notions essentielles relatives aux limites projectives d'espaces ou de groupes et aux limites inductives de groupes. Ici, on sait qu'on part des recouvrements ouverts de X , qu'on associe à chaque recouvrement son nerf, qui est un complexe simplicial formel au sens du chap. VI, puis qu'on „passe à la limite“ (pour les groupes d'homologie des nerfs) suivant l'ensemble filtrant des recouvrements ouverts; cela donne une limite projective pour les groupes d'homologie, une limite inductive pour les groupes de cohomologie. La démonstration des axiomes d'homotopie et d'excision pour ces groupes est assez longue, mais sans difficulté essentielle; par contre, on ne peut établir l'axiome d'exactitude que pour la cohomologie à coefficients dans un R -module, lorsqu'on a affaire à un couple général (X, A) . Pour l'homologie, l'exactitude ne vaut que pour les couples compacts (X, A) , à coefficients dans un groupe compact ou un espace vectoriel (en raison des difficultés du passage à la limite projective pour des groupes qui ne sont pas de ces deux catégories: un exemple au chap. VIII montre que l'exactitude ne se conserve pas nécessairement à la limite), et pour les couples triangulables (ce qui naturellement démontre l'identité de l'homologie de Čech et de l'homologie simpliciale pour ces derniers). En général, la suite d'homologie de Čech est seulement „d'ordre 2“, comme le montre un exemple du chap. X. Toutefois, ce défaut est compensé par une propriété de „continuité“ qui fait l'objet essentiel du chap. X: pour une limite projective d'espaces compacts, les groupes d'homologie de Čech (à coefficients quelconques) sont limites projectives des groupes d'homologie de la famille d'espaces considérée. En outre, cette propriété caractérise l'homologie de Čech pour les couples compacts, parmi toutes les théories d'homologie „partiellement exactes“ (i. e. où la suite d'homologie est seulement d'„ordre 2“ en général, et exacte sur les espaces

triangulables). L'idée de la démonstration consiste à obtenir un espace compact comme limite projective d'espaces triangulables. Un exemple montre d'ailleurs que l'homologie singulière ne possède pas la propriété de continuité. Enfin, le chapitre contient aussi une définition de l'homologie sur les espaces localement compacts (en considérant leur compactification d'Alexandroff par un seul point à l'infini), ainsi qu'une autre théorie valable pour les espaces normaux, et qui consiste à passer à leur compactification de Stone-Čech (dite „de Tychonoff“ par les AA.). — Un dernier chapitre montre avec quelle facilité on applique l'homologie axiomatique à la démonstration des théorèmes classiques de l'homologie des espaces euclidiens [invariance du domaine, applications essentielles, degré d'application, théorème fondamental de l'algèbre (démontré aussi pour les quaternions et les nombres de Cayley!)]. D'autres applications sont promises pour un second volume, qui développera aussi, entre autres, la théorie axiomatique des divers „produits“ de l'homologie. — Chacun des chapitres est complété par des notes historiques et de nombreux exercices, de nature très variée et d'un intérêt constant. Le mode d'exposition est d'une clarté parfaite et reste cependant aussi concis que possible. Le plan général serait peut-être plus net si l'algèbre et la topologie étaient mieux séparées, les chap. IV, V et VI venant dès le début de l'ouvrage; mais sans doute les AA. ont-ils craint que la motivation des axiomes n'apparaisse plus aussi clairement.

J. Dieudonné.

Bertolini, Fernando: *Insieme limite degli aggregati gruppali d'insiemi.* Portu-galiae Math. 11, 119—128 (1952).

L'A. seguendo Picone, chiama aggregato gruppale ogni aggregato $[X]$ di insiemi di un dato spazio S tale che l'intersezione di due qualsiasi di essi è non vuota e contiene un insieme dell'aggregato. Se S è un spazio topologico bicompatto, l'insieme intersezione L degli involucri (chiusure) di tutti gli insiemi di $[X]$ è ovviamente non vuoto. L'A. chiama L il limite dell'aggregato $[X]$ e vuole considerarne le proprietà.

G. Fichera.

Gordon, W. L. and C. W. McArthur: *A theorem on uniform Cauchy points.* Amer. J. Math. 74, 764—768 (1952).

Die Arbeit entwickelt einen allgemeinen Satz, der die neueren Resultate von B. J. Pettis, A. Alexiewicz und dem Ref. in der Richtung des Osgood-Kuratowski-Banachschen Theorems umfaßt. Da die Terminologie der Verff. ohne sehr ausführliche Vorbereitungen kaum allgemein zugänglich ist, sei hier nur die allgemeine Richtung der Resultate der Verff. charakterisiert. Es wird eine Funktionen-„Folge“ $f_\lambda(x)$ betrachtet, in der aber der Index λ eine beliebige linear geordnete Menge Λ durchläuft von an sich beliebiger Mächtigkeit (z. B. ein lineares Kontinuum). x durchläuft die Elemente eines beliebigen topologischen Raumes X und die „Werte“ von f die Elemente eines beliebigen vollständig regulären topologischen Raumes Y . Es wird eine „minimale“ Überdeckung von Y durch „Umgebungen“ zugrunde gelegt. Es dreht sich dann um die Verteilung der Punkte x_0 von X mit den folgenden Eigenschaften: I. Für ein λ_0 aus Λ liegen alle $f_\lambda(x_0)$ in der festen λ_0 zugeordneten Umgebung von $f_{\lambda_0}(x_0)$, sobald $\lambda > \lambda_0$ ist (Cauchysche Punkte); II. Die Aussage von Eigenschaft I gilt gleichmäßig für alle Punkte einer offenen Umgebung G von x_0 in X (gleichmäßige Cauchysche Punkte). Der Sinn des Satzes ist, daß, wenn $f_\lambda(x)$ stetig ist, die Cauchyschen Punkte, die keine gleichmäßigen Cauchyschen Punkte sind, eine „dünn“ verteilte Menge darstellen. Dies wird verfeinert, indem die Annahme der Stetigkeit der $f_\lambda(x)$ lokalisiert wird.

A. Ostrowski.

Whyburn, G. T.: *On quasi-compact mappings.* Duke math. J. 19, 445—446 (1952).

Eine quasikompakte Abbildung f von X auf Y ist eine solche, bei welcher jede offene Menge $U \subset X$, für welche $U = f^{-1}f(U)$ besteht, in Y ein offenes Bild besitzt. Offene oder geschlossene Abbildungen, in gewöhnlichen Sinne, sind quasikompakte Abbildungen. Verf. beweist folgende Sätze: 1. Ist $A \subset X$ eine solche Untermenge von X , deren Bild in Y mit dem von X übereinstimmt, und ist f auf A quasikompakt, so ist f auch auf X quasikompakt. 2. Der lokale Zusammenhang ist eine Invariante der quasikompakten Abbildungen.

S. Stoilow.

Shiota, Taira: *A class of topological spaces.* Osaka math. J. 4, 23—40 (1952).

Let X be a completely regular space. The Čech's compactification $\beta(X)$ is obtained as the

completion of X with respect to the uniform structure having the basis made up of all finite normal coverings. The author studies the space $e(X)$ which is obtained as the completion of X with respect to the uniform structure having the basis made up of all countable normal coverings. A space X for which $e(X) = X$ is called e -complete. e -complete spaces are shown to coincide with Q -spaces in the sense of E. Hewitt (this Zbl. 32, 286). In some cases the existence of a complete structure implies the e -completeness; namely, if the smallest cardinal number of basis for open sets of X is weakly accessible in the sense of Tarski and there exists a complete structure over X , then X is shown to be e -complete. The space $e(X)$ is characterized as a space S with the properties: (i) S is e -complete, (ii) S contains X as a dense subset and (iii) every real-valued continuous function on X can be extended continuously on S . Thus $e(X)$ is identical with Hewitt's $\nu(X)$. Let $C(X, R)$ be the set of all real-valued continuous functions on X . The author proves that $C(X, R)$, as a translation lattice (cf. Kaplansky, this Zbl. 36, 22) or a lattice ordered group or a ring, characterizes X . It is also shown that if a vector lattice L satisfies the conditions: (i) the intersection of all the maximal ideals is 0 and (ii) there exists an element e contained in no maximal ideals, then L can be imbedded in $C(X_L, R)$ for the uniquely determined e -complete space X_L in a special manner.

K. Morita.

Terasaka, Hidetaka: On Cartesian product of compact spaces. Osaka math. J. 4, 11—15 (1952).

The Cartesian product of any number of compact (= bicompact) spaces is compact by Tychonoff's theorem. The author gives an example of an \aleph_0 -compact (= compact in the sense of Fréchet) Hausdorff space R whose product $R \times R$ with itself is not \aleph_0 -compact. An ultrafilter $\{M_\lambda\}$ in a space is said to be of potency \aleph_α if \aleph_α is the lowest of the potencies of M_λ . The author calls a T_1 -space R \aleph_α -ultra-compact if every ultrafilter of potency (at most) \aleph_α in R has a cluster point, and remarks that the proof of C. Chevalley and O. Frink (this Zbl. 27, 142) for Tychonoff's theorem yields the theorem: The Cartesian product of any number of \aleph_α -ultracompact spaces is itself \aleph_α -ultracompact. The space R constructed by the author is \aleph_0 -compact but not \aleph_0 -ultracompact, and its product $R \times R$ is not \aleph_0 -compact. This answers partly to the question; whether or not, if X_λ is \aleph_α -compact but not \aleph_α -ultracompact, then the product space $\prod X_\lambda$ is not necessarily \aleph_α -compact.

K. Morita.

Miyazaki, Hiroshi: A note on paracompact spaces. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 88—92 (1952).

The purpose of this paper is to prove the following theorem: Let A be an m -dimensional paracompact normal space and let B be an n -dimensional compact normal space. Then $A \times B$ is paracompact normal and $\dim(A \times B) \leq m + n$. The dimension is defined according to C. Dowker (this Zbl. 37, 101). The demonstration requires 8 lemmas, the first one being only part of a theorem due to Dowker. Particularly interesting is lemma 4: a simplicial complex with the weak topology is a paracompact Hausdorff space, and therefore normal. Lemma 7 is a generalization of a result of Hemmingsen [Duke math. J. 13, 495—504 (1946)]: if A and B are compact normal spaces (and not only compact Hausdorff spaces) we have $\dim(A \times B) \leq \dim A + \dim B$. — The theorem proved by the author is an extension of a theorem of E. G. Begle (this Zbl. 33, 401).

C. Racine.

Jackson, James R.: Spaces of mappings on topological products with applications to homotopy theory. Proc. Amer. math. Soc. 3, 327—333 (1952).

Für topologische Räume A, B wird der Raum aller stetigen Abbildungen von A in B mit B^A bezeichnet. B^A wird mit der „kompakt-offenen“ Topologie versehen. Satz: Voraussetzungen: X, Y Hausdorffsche Räume; $X \times Y$ kartesisches Produkt; Z beliebiger topologischer Raum. Die Abbildung $\sigma: Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^X)^Y$ ist definiert durch: $[\sigma(f)(y)](x) = f(x, y)$; $f \in Z^{X \times Y}$, $x \in X$, $y \in Y$. Behauptung: σ ist ein Homöomorphismus in. — Aus diesem Satz und einem Ergebnis von R. H. Fox [Bull. Amer. math. Soc. 51, 429—432 (1945)] folgt das Korollar: σ ist ein Homöomorphismus auf, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen a), b) erfüllt ist: a) X und Y sind lokal-separabel, b) X ist regulär und lokal-kompakt. — Verf. wendet seinen Satz auf die Homotopietheorie an. Er beweist u. a. eine Verallgemei-

nerung des Foxschen Struktursatzes, dies. Zbl. 38, 366, über die Torushomotopiegruppe $\tau_r(Y, y_0)$. *F. Hirzebruch.*

● **Walsh, Michael John:** The paracompactness of the CW -complex and gradient mappings in locally convex spaces. Abstract of a Thesis. Urbana, Illinois 1952. 1 p.

The central result of the first and main part of this paper is that a generalized cell complex which is closure finite and has the weak topology, referred to as a CW -complex, is paracompact. Also shown in the first part is an equivalent condition for the paracompactness of a space. — The main result of the second part is that a real valued function which is defined and possesses a completely continuous F -differential (generalization of the Frechet-differential defined by Hyers) on a convex subset, V , of a locally convex linear topological space attains a maximum or minimum if V is compact in the weak bounded topology. (Autoreferat.)

Nagata, Jun-iti: On conditions in order that two uniform spaces are uniformly homeomorphic. J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Ser. A 2, 81—87 (1952).

The purpose of this paper is to characterize the uniform topology of a uniform space by the lattice of its uniform basis. If R denotes the space and $L(R)$ the lattice of its uniform basis, if R is complete and $L(R)$ is subjected to a certain number of conditions, then the author establishes that there exist remarkable subsets of $L(R)$, which he calls n. b.-sets, without mentioning the meaning of the symbol n. b., between which an equivalence relation may be defined. The quotient of the n. b.-sets by this equivalence relation defines a uniform space $L(R)$ whose uniform covering is determined easily (lemma 5 of the paper). It is then readily shown that R and $L(R)$ are uniformly homeomorphic. Hence the theorem, main result of the paper, that, in order that two complete uniform spaces R_1 and R_2 be uniformly homeomorphic, it is necessary and sufficient that $L(R_1)$ and $L(R_2)$ be lattice-isomorphic, where $L(R_1)$ and $L(R_2)$ denote lattices of uniform bases satisfying certain restrictive conditions. — The author mentions two sets of such conditions. He then studies the case of uniform spaces without isolated points and proves, about them, a certain number of results which are given as corollaries of the above mentioned theorem. — Perhaps it would have been more conducive to clarity if the author had not written his paper so as to be as short as possible. No references are given to any work on the subject. *C. Racine.*

Smirnov, Ju. M.: Über Nachbarschaftsräume. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 543—574 (1952) [Russisch].

Ausführliche Beweise der von Verf. früher (dies. Zbl. 46, 163) angekündigten Ergebnisse über infinitesimale Räume (hier kurz als δ -Räume bezeichnet). Hauptergebnis ist die Existenz einer eindeutigen Beziehung zwischen allen δ -Räumen, die einen vorgegebenen (vollständig regulären) topologischen Raum R erzeugen, und allen bikompakten Erweiterungen von R . Hierdurch wird das Studium der δ -Räume auf das topologischer Räume und ihrer bikompakten Erweiterungen zurückgeführt. Die genannte Beziehung ist ein Isomorphismus der (in naheliegender Weise) teilweis-geordneten Mengen der δ -Räume auf R und der bikompakten Erweiterungen von R . Auf jedem vollständig regulären Raum R existiert immer ein maximaler δ -Raum, und ein minimaler δ -Raum existiert dann und nur dann, wenn R lokal-bikompakt ist. Verf. gibt weiter eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß auf R nur ein δ -Raum existiert, und zeigt an einem Beispiel, daß hierzu die Bikompaktheit nicht notwendig ist. Ferner untersucht Verf. den Zusammenhang zwischen den δ -Räumen und den Weilschen uniformen Strukturen. Jede uniforme Struktur erzeugt einen δ -Raum. Zu jedem δ -Raum gehört ein teilweis-geordnetes System von uniformen Strukturen, welches immer eine minimale Struktur enthält. Die Frage nach einer maximalen Struktur in dem genannten System wird nicht vollständig beantwortet. Übrigens wird eine uniforme Struktur vom Verf. ähnlich wie bei Tukey (dies. Zbl. 25, 91) definiert und die Äquivalenz mit der Weilschen Definition bewiesen.

E. Burger.

Burgess, C. E.: Continua and their complementary domains in the plane. II. Duke math. J. 19, 223—230 (1952).

Part I see this Zbl. 44, 197. Earlier results of the author and C. Kuratowski ensure that a plane continuum M is indecomposable or is the sum of just one pair of indecomposable continua when either of the following conditions are assumed: i) a sequence of distinct complementary domains of M converges to M ; ii) M is the boundary of each of three of its complementary domains. It is shown here that for a compact continuum M the converse is also true. For a continuum M which possesses to every pair of domains intersecting it three complementary domains each intersecting both the domains it is shown that there is an integer n less than five such that M is „indecomposable under index n “ and also M is the „finished sum of n continua“ (in the notation of Swingle). Some other results of Swingle for continua

„convergent under index n “ are shown to be true also for compact continua indecomposable under index n . V. S. Krishnan.

Ball, B. J.: Continuous and equicontinuous collections of arcs. *Duke math. J.* **19**, 423—433 (1952).

The main result of this paper is: that a continuous and equicontinuous collection of mutually exclusive arcs in the plane whose sum is a closed compact set can be transformed, by a reversibly continuous transformation of the plane into itself, into a family of straight line intervals (Th. 14). — This result is reached through establishing the following: a continuum lying in the set, K , of all end points of a continuous collection, G , of mutually exclusive arcs in the plane is a continuous curve (Th. 3); if further the collection G is equicontinuous and G^* is a compact continuum, then K is either the sum of two mutually exclusive arcs or the sum of two mutually exclusive simple closed curves (Th. 6); and also K is the sum of two mutually exclusive closed point sets each of which intersects every arc of G (Th. 8b); and finally if also it is assumed that G^* does not separate the plane then there exist two mutually exclusive simple closed curves J_1, J_2 such that every arc of G is irreducible between J_1 and J_2 (Th. 12). V. S. Krishnan.

Borodnikov, V.: Über den Schnitt einer Folge von Simplexen. *Uspechi mat. Nauk* **7**, Nr. 6 (52), 179—180 (1952) [Russisch].

Der Durchschnitt einer abnehmenden Folge von Simplexen ist ein Simplex. — Mit diesem Satz beantwortet Verf. eine Frage A. N. Kolmogorovs.

E. Pannwitz.

Bott, Raoul: Two new combinatorial invariants for polyhedra. *Portugaliae Math.* **11**, 35—40 (1952).

The author introduces two new combinatorial invariants of a polyhedral complex. They have a curious property that they are not invariants of the homotopy type. To decide their topological invariance remains open.

A. Komatu.

Fan, Ky: A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications. *Ann. of Math.*, II. Ser. **56**, 431—437 (1952).

By octahedral subdivision of the n -sphere S^n [= set of all points $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ with $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$] is understood the subdivision of S^n into 2^{n+1} n -simplexes by means of the $n+1$ coordinate-hyperplanes. Generalizing a lemma due to A. W. Tucker [Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal 1945, 285—309 (1946), p. 303] the author proves the following lemma: Let K be a barycentric derived subdivision of the octahedral subdivision of S^n and m a fixed positive integer. To each vertex of K let one of the $2m$ numbers $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ be assigned in such a manner that: 1. The numbers assigned to any two antipodal vertices of K have sum zero. 2. For any 1-simplex in K the numbers assigned to its vertices have sum distinct from zero. Let $\beta(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ denote the total number of those n -simplices in K , whose $n+1$ vertices receive the numbers j_1, j_2, \dots, j_{n+1} . Then the sum of all numbers $\beta(k_1, -k_2, k_3, -k_4, \dots, (-1)^n k_{n+1})$, where $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1} \leq m$ is $\equiv 1 \pmod{2}$. As application of this lemma the author establishes two new antipodal theorems: the first one being a generalization of the theorem of Borsuk-Ulam concerning continuous mappings of S^n into the n -dimensional Euclidean space and the second one being a generalization of the theorem of Lusternik-Schnirelman, concerning the covering of S^n by $n+1$ closed sets.

K. Borsuk.

Newman, M. H. A.: Fixed point and coincidence theorems. *J. London math. Soc.* **27**, 135—140 (1952).

The paper contains a brief review of some of the advances in the theory of fixed points and coincidences of mappings. Moreover the author announces (without detailed proofs) some new results, namely a higher dimensional extension of the

known „Last Geometric Theorem“ of Poincaré and a generalization of the Borsuk-Ulam theorem concerning the antipodal mappings of the n -dimensional sphere S^n onto itself (this Zbl. 6, 424, 2. Referat). This generalization suffices to prove the non-existence of small periodic elements in a locally euclidean group for all periods.

K. Borsuk.

Forrester, Amasa: A theorem on involutory transformations without fixed points. Proc. Amer. math. Soc. 3, 333—334 (1952).

By making use of the Lefschetz fixed point theorem, the author proves the following theorem: Let $\Phi: S^n \rightarrow S^n$ be an involutory transformation of an n -sphere S^n without fixed point, and let P be a point interior to S^n . Then there is a point Q on S^n such that P lies on the line segment from Q to $\Phi(Q)$. *A. Komatu.*

Floyd, E. E.: Examples of fixed point sets of periodic maps. Ann. of Math., II. Ser. 55, 167—171 (1952).

Les exemples construits par l'A. montrent que dans les théorèmes de P. A. Smith sur les points fixes des transformations périodiques il est impossible de remplacer le groupe des entiers mod. p par un groupe de coefficients indépendant de p . Plus précisément, ses constructions conduisent aux énoncés suivants: 1. Soit G un groupe abélien non trivial. Il existe un nombre premier p , un complexe fini K , et une application simplicielle T de K sur lui même de période p tels que K soit homologiquement trivial par rapport au groupe des coefficients G mais que l'ensemble des points fixes de T ne soit pas homologiquement trivial par rapport à G . 2. Soit G un groupe abélien non trivial. Il existe un nombre premier p , un complexe fini K et une application simplicielle périodique T de K sur lui même telle que K ait les groupes d'homologie d'une sphère, mais que l'ensemble des points fixes de T n'ait pas les groupes d'homologie d'une sphère, en prenant chaque fois G comme groupe des coefficients.

M. Lazard.

Bundgaard, Svend: On a kind of homotopy in regular numbered complexes. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. Suppl.-band M. Riesz, 35—46 (1952).

Cet article donne des théorèmes de F. Lanner (ce Zbl. 37, 398) sur les complexes à groupe transitif d'automorphismes qui sont des pseudo-variétés, une démonstration améliorée.

R. Thom.

Nagumo, Mitio: A note on the theory of degree of mapping in Euclidean spaces. Osaka math. J. 4, 1—9 (1952).

In einer früheren Note (dies. Zbl. 43, 178) hat Verf. die Theorie des Abbildungsgrades so entwickelt, daß er diesen zunächst für differenzierbare Abbildungen mittels Funktionaldeterminanten erklärt und die Definition dann durch Approximation auf beliebige stetige Abbildungen ausdehnt. Die Hauptschwierigkeit war dabei der Nachweis dafür, daß der Abbildungsgrad konstant bleibt, wenn die Abbildung stetig von einem Parameter abhängt. Für diesen Satz wird hier ein anderer Beweis gegeben.

M. Kneser.

Miyazaki, Hiroshi: On covering homotopy theorems. Tôhoku math. J., II. Ser. 4, 80—87 (1952).

N. Steenrod in „The topology of fibre bundles“ (Princeton 1951) states and proves two „covering homotopy theorems“, the second one being an immediate consequence of the first (chapter I, 11.3 and 11.7). The base space X of one of the bundles is assumed to be normal, locally compact and such that any of its coverings by open sets is reducible to a countable one. In the first section of this paper, the author states and proves the analogues of these theorems when X is an arcwise connected space (theorems 1.2, 1.4 and 1.6). He assumes further that the groups of the bundles are totally disconnected. His results are easily obtained by applying to the bundles which he studies Steenrod's theory of bundles having a totally disconnected group (Steenrod, chapter I, § 13). In the other section of the paper all spaces are assumed to be T_1 -spaces. The following theorem is proved: let $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ be two bundles having the same fibre and group. B is compact and the base space X' of \mathfrak{B}' is completely regular. Let $h_0: \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$ be a bundle map and let $\tilde{h}: X' \times I \rightarrow X$ be a uniform homotopy of the induced map $\tilde{h}_0: X' \rightarrow X$. Then there exists a uniform homotopy $h: \mathfrak{B}' \times I \rightarrow \mathfrak{B}$ of the map h_0 whose induced map is \tilde{h} .

and which is stationary with \bar{h} . The last theorems, theorems 2.4 and 2.5, are versions of Steenrod's theorems found in 11.4 and 11.7, the bundle being compact and either the base space, or the inverse image of it, being completely regular. *C. Racine.*

Hawley, N. S.: Complex fiber bundles. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 411—415 (1952).

$\mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{F}$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten, \mathfrak{G} eine Gruppe von analytischen Homöomorphismen von \mathfrak{F} und A eine komplex-analytische Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{M} . Eine direkte Übertragung der Definition der üblichen fibre bundles (Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton 1951) — man verlange von allen in der Definition vorkommenden Abbildungen, daß sie komplex-analytisch sind — führt zur Definition von: $(\mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, A)$ ist ein „complex fibre bundle“. (\mathfrak{B} ist komplex-analytisch gefasert mit der Faser \mathfrak{F} , der Strukturgruppe \mathfrak{G} , der Basis \mathfrak{M} und der Projektion A .) Verf. untersucht insbesondere die projective bundles: $\mathfrak{F} = \text{komplex-projektiver Raum} = P_m$, $\mathfrak{G} = \text{projektive Gruppe von } P_m$. Er nennt diejenigen projective bundles regulär, die für ein geeignetes n durch eine analytische Abbildung von \mathfrak{M} in eine komplexe Grassmann-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}(m, n)$ erhalten werden können. $\mathfrak{G}(m, n)$ ist dabei der Raum aller m -dimensionalen komplex-projektiven Räume im $(m + n + 1)$ -dimensionalen komplex-projektiven Raum; alle Dimensionen sind komplexe Dimensionen. — Verf. versucht für die regulären projektiven bundles Klassifikationstheoreme zu erhalten. Sein Theorem II und die daraus abgeleiteten Theoreme enthalten jedoch einen Irrtum. Klassifikationstheoreme im Sinne von „Abbildungen homotop \leftrightarrow induzierte bundles äquivalent“ aufzustellen, scheint wegen der folgenden Tatsache schwierig zu sein: $\mathfrak{G}(1, 0) = \text{komplex-projektive Ebene } P_2$. Die Abbildung $g_\varepsilon: (t_0, t_1) \rightarrow (t_0^\varepsilon, \varepsilon t_0 t_1, t_1^\varepsilon)$ von P_1 in $P_2 = \mathfrak{G}(1, 0)$ induziert ein bundle \mathfrak{B}_ε mit Faser P_1 und Basis P_1 . Für $\varepsilon \neq 0$ ist \mathfrak{B}_ε analytisch homöomorph zu $P_1 \times P_1$, dagegen ist \mathfrak{B}_0 zwar homöomorph zu $P_1 \times P_1$, aber nicht analytisch homöomorph zu $P_1 \times P_1$, also erst recht nicht fibre analytisch homöomorph zu $P_1 \times P_1$. (Vgl. Ref., dies. Zbl. 43, 303.) — \mathfrak{B}_0 ist nämlich Σ_2 . — Die Abbildungen g_0, g_ε sind homotop und unterscheiden sich für kleines ε beliebig wenig, und doch sind die induzierten bundles für $\varepsilon \neq 0$ nicht analytisch äquivalent. *F. Hirzebruch.*

Errera, Alfred: Une vue d'ensemble sur le problème des quatre couleurs. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 5—19 (1952).

Ein Bericht über die Geschichte des Vierfarbenproblems, die Methoden der Lösungsversuche und deren bisherige Ergebnisse mit einem Literaturverzeichnis.

H. Künneth.

Dirac, G. A.: Map-colour theorems. Canadian J. Math. 4, 480—490 (1952).

Eine „Karte“ heißt k -chromatisch, wenn mindestens k Farben nötig sind, um ihre Gebiete so zu färben, daß aneinander grenzende Gebiete nicht gleich gefärbt sind. Heawood bewies, daß jede Karte auf einer Fläche vom Zusammenhang h ($h > 1$) höchstens n_h -chromatisch ist mit $n_h = \left[\frac{1}{2} (7 + \sqrt{24h - 23}) \right]$. Eine einfache Ableitung dieser Formel ergibt sich hier nebenbei bei dem Beweis des Satzes: Auf einer Fläche vom Zusammenhang h ($h = 3$ und $h > 4$) enthält jede n_h -chromatische Karte n_h gegenseitig aneinander grenzende Gebiete. Aus diesem Satz und schwächeren Aussagen für $h = 2$ und $h = 4$ folgt, daß auf einer Fläche vom Zusammenhang h ($h > 1$) nur dann n_h -chromatische Karten möglich sind, wenn es auf ihr n_h gegenseitig benachbarte Gebiete geben kann. $h = 1$ macht hier wieder eine Ausnahme.

H. Künneth.

Theoretische Physik.

Elastizität. Plastizität:

Pailloux, Henri: Quelques applications du calcul fonctionnel à la mécanique rationnelle. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 213—257 (1952).

Certain problems of the theory of elasticity are treated by means of the lagrangian formalism extended to continuous systems. A systematic use is made of the concept of functional derivative; although this is not essential, it simplifies the writing of the formulae. The paper contains six chapters, the first one dealing with the concept of functional derivative. Chap. II contains the theorems of Castigliano in terms of functional derivatives; this idea is not new and may be found in Hamel's Theoretische Mechanik, Berlin 1949, p. 373 (this Zbl. 36, 243). In Chap. III the Lagrange's equations for continuous systems are obtained starting from Hamilton's principle. The hamiltonian formalism which might as well be carried on is not considered. The next three chapters contain several interesting applications to concrete cases. For instance, it is considered the equilibrium of a beam under the action of non-concentrated forces. A point of the beam with rectangular coordinates (x_1, x_2, x_3) after deformation goes to $(x_1 + U_1, x_2 + U_2, x_3 + U_3)$.

Taking the x_1 -axis as the axis of the beam, it is supposed that $U_i = u_{i1} + u_{i2} x_2 + u_{i3} x_3$, $i = 1, 2, 3$, where the u 's are functions of x_1 alone. The position of the system is then characterised by the nine functions of x_1 : u_{i1}, u_{i2}, u_{i3} , $i = 1, 2, 3$. The equilibrium conditions obtained from Lagrange's equations are ordinary differential equations involving these functions.

M. M. Peixoto.

Favre, Henry et Bernhard Gilg: La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable. *Z. angew. Math. Phys.* **3**, 354—371 (1952).

The problem of bending of rectangular plates of variable thickness is treated in earlier papers by E. Reissner [*J. Math. Phys.* **14**, 43 (1937)] and R. Gran Olsson [Dissertation T. H. Berlin 1932; *Ingenieur-Arch.* **5**, 363 (1934); *Bauingenieur* **21**, 230 (1940); *Bauingenieur* **22**, 10 (1941)]. This paper deals with bending of simply supported rectangular plates of linearly varying thickness. The solution of the partial differential equation of the deflection of the middle surface may be reduced to the integration of a system of simpler equations by development in a series. Any of these equations has a form similar to the equations of a rectangular plate of constant thickness, in which case the solution may be found either by the method of multiple series in terms of trigonometric functions or by simple trigonometric series (for symmetrically distributed load). The important case of hydrostatic pressure (with applications on water pressure and earth pressure) is discussed in detail. A numerical example, with graphical representation, clearly shows the influence of varying thickness on the statical quantities as bending and twisting moments, normal and shearing forces.

R. Gran Olsson.

Karunes, B.: A note on the problem of dislocation in a semiinfinite plate containing a circular hole. *Indian J. Phys.* **26**, 442—444 (1952).

Platrier, Charles: Relation entre les tensions et les déformations dans le milieu classique le plus général en transformation isotherme. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **38**, 975—977 (1952).

Wenn das isothermische Potential eines Stoffes bekannt ist, kann man die Spannungen und Verformungen in ihm zueinander in Beziehung setzen und die Frage nach den Spannungen bei bestimmter äußerer Anfangsgestalt des Stoffes korrekt stellen.

J. Pretsch.

Pieruschka, E.: Ein Stoffgesetzansatz für elastische, anisotrope Medien. *Ingenieur-Arch.* **20**, 229—233 (1952).

Es wird ein anisotropes Stoffgesetz aufgestellt, das 7 unabhängige Stoffkonstanten enthält, nämlich die 6 Komponenten des „Stoffensors“ R und den Schubmodul G ; oder, anders ausgedrückt, bei dem neben den 3 Hauptrichtungen des Tensors (mit 3 Konstanten) noch 4 weitere Konstanten vorhanden sind. Es liegt also auch hier eine starke Spezialisierung der allgemeinst möglichen Stoffgesetze vor. Auch die Wellengleichung für derartige Stoffe wird diskutiert.

Th. Pöschl.

Aquaro, Giovanni: Sopra un teorema di media per le equazioni dell'elasticità. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **21**, 43—46 (1952).

Neuer Beweis für einen Mittelwertsatz aus der Elastizitätstheorie, den Verf. früher (dies. *Zbl.* **40**, 105) veröffentlicht hat.

G. Hamel.

Neményi, P. F. and A. W. Sáenz: On the geometry of two-dimensional elastic stress fields. *J. rat. Mech. Analysis* **1**, 73—86 (1952).

Die Untersuchungen von P. F. Neményi [*Z. angew. Math. Mech.* **13**, 364—366 (1933)] und von U. Wegner [*Ingenieur-Arch.* **5**, 449—469 (1934)] über die Bedeutung isometrischer Kurvennetze in der Theorie der Hauptspannungstrajektorien ebener Spannungszustände, bei denen keine Massenkkräfte auftreten, werden hier mit Hilfe der Darstellung ebener Spannungszustände durch komplexe Funktionen ausgedehnt auf Spannungszustände in einem einfach zusammenhängenden Bereich, die sogenannte M -Systeme sind; in ihnen sind die Massenkkräfte aus einem Potential $M(x, y)$ ableitbar und eine der drei Forderungen ist erfüllt: a) der Spannungszustand ist eben und $\Delta M = 0$, b) der Verzerrungszustand ist eben und $\Delta M = 0$, c) der Verzerrungszustand ist eben und $m = 2$ (Poisson-Konstante). Diese Systeme verhalten sich im wesentlichen so wie solche, in denen keine Massenkkräfte wirken. Insbesondere gilt: Jeder Spannungszustand vom M -Typus läßt sich gewinnen durch Superposition von zwei Spannungszuständen.

zuständen mit isometrischem Hauptspannungsliniennetz, wobei in einem Spannungszustand die Summe der Normalspannungen identisch Null ist, und gewinnen durch Superposition von zwei Spannungszuständen, deren einer eine identisch verschwindende Normalspannungssumme hat, deren anderer lauter harmonische Spannungskomponenten hat. Ist $\theta(x, y)$ der Richtungswinkel der Hauptspannungslinien eines M -Systems, so ist $-\theta(x, y)$ nur unter zusätzlichen Bedingungen wieder Richtungswinkel für ein M -System; diese Bedingungen sind stets erfüllt bei isometrischen Netzen, sie können auch bei nichtisometrischen Netzen erfüllt sein. Ist für den sogenannten komplexen Spannungsdeviator

$$\Omega \equiv \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} - i \tau_{xy} = W(x, y) e^{-i\theta(x, y)}$$

$W(x, y)$ vorgegeben und sind die Hauptspannungslinien bekannt, so sind die Spannungskomponenten bis auf eine Konstante bestimmt. Der Beweis für folgenden schärferen Satz wird skizziert: Die Gesamtheit der ebenen Spannungszustände, die in jeder Ebene $z = \text{const}$ ein gegebenes Netz von Hauptspannungslinien besitzen, enthält mindestens zwei, höchstens fünf Parameter; die Angabe der beiden Hauptspannungen und ihrer Ableitungen in einem nicht-isotropen Punkt charakterisieren alsdann den Spannungszustand eindeutig. *R. Moufang.*

Tiffen, R.: Uniqueness theorems of two-dimensional elasticity theory. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 237—252 (1952).

Es wird eine Elastizitätstheorie in einem mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereich betrachtet, wobei sich das Material in einem Zustand ebener Dehnungen oder verallgemeinerter ebener Spannungen befindet. Für ein endliches Gebiet wird gezeigt, daß es eine im wesentlichen eindeutige Lösung gibt, bei der die Spannungen an den einzelnen Grenzen gegebene Werte annehmen, während die Verschiebungen bis auf eine starre Bewegung eindeutig sind. Die Lösung wird in bekannter Weise in Form von komplexen Potentialfunktionen gegeben und auf den unendlichen Bereich erweitert, wobei die alle anderen Randkurven C_n einschließende Kurve C_{n+1} nach allen Richtungen ins Unendliche strebt. Der Sonderfall der Halbebene wird besonders untersucht. *Th. Pöschl.*

Vajnberg, L. V.: Eine Analogie zwischen den Problemen des ebenen Spannungszustandes und der Verbiegung einer Kreisscheibe veränderlicher Dicke bei unsymmetrischer Belastung. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 749—752 (1952) [Russisch].

Trenin, S. I.: Aufbau einer Methode zur Lösung einer Reihe von axialsymmetrischen Problemen der Elastizitätstheorie. *Vestnik Moskovsk. Univ.* **7**, Nr. 6 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk 4), 3—14 (1952) [Russisch].

Verf. wählt die vier auf Zylinderkoordinaten bezogenen Spannungskomponenten des achsensymmetrischen Zustandes in der Form $S^j = S_0^j + S_k^j$ ($j = 1, 2, 3, 4$), worin die Anteile S_0^j den Differentialgleichungen des Gleichgewichtes und den vorgegebenen Belastungsbedingungen an der Oberfläche, die Anteile S_k^j dagegen wohl den ersteren genügen sollen, dabei aber verschwindende Oberflächenspannungen zu liefern haben. Zwei Spannungsfunktionen, deren Form die Erfüllung der Gleichgewichtsrelationen sicherstellt, dienen dann zum Aufbau eines Satzes von Funktionen S_0^j, S_{kn}^j ($j = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, 3, \dots$) die dem jeweiligen Problem anzupassen sind. Die Parameter A_n^j des endgültigen Ansatzes $S^j = S_0^j + \sum_n A_n^j S_{kn}^j$ ergeben sich dann nach der Variationsmethode von Castigliano, womit auch den Bedingungen der Kompatibilität entsprochen werden kann. Als Beispiel wird in erster und zweiter Näherung ($n = 1$ bzw. $n = 1, 2$) die Spannungsverteilung in einem Kreiszyylinder untersucht, der auf seinen Basisflächen einer glockenförmig verteilten Normalbelastung unterworfen ist, während seine Mantelfläche spannungsfrei bleibt.

S. Woinowsky-Krieger.

Timpe, A.: Brückenlösungen beim Problem der achsensymmetrischen Torsion. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 226—227 (1952).

In Ergänzung früherer Arbeiten gibt der Verf. die Lösung des Torsionsproblems von Drehkörpern mittels erzeugender Funktionen in räumlichen Polarkoordinaten.

die in Analogie treten zu der Geschwindigkeits- und Stromfunktion beim Strömungsproblem. Zum Schluß wird die Inversion von Torsionszuständen behandelt.

Th. Pöschl.

Gray, C. A. M.: The analysis of fully restrained slabs under concentrated loads. *J. appl. Mech.* **19**, 422—424 (1952).

Föpl, Ludwig: Der elliptische Hohlring unter axialer Last. *Z. angew. Phys.* **4**, 452—455 (1952).

Slade jr., J. J.: The elastic axes of a one-mass elastically supported system. *Quart. appl. Math.* **10**, 278—280 (1952).

Fridman, M. M.: Lösung des allgemeinen Problems der Verbiegung einer dünnen, isotropen elastischen Platte, die längs des Randes gestützt ist. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 429—436 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht die Biegung einer beliebig belasteten dünnen Platte mit mehrfach zusammenhängendem Gebiet. Diese Platte lagert längs ihrer äußeren Begrenzung gelenkig auf und steht in ebenfalls gelenkiger Verbindung mit einer Anzahl vollkommen starrer Scheiben, die sich ihrerseits auf die Platte stützen und gewissen Lasten ausgesetzt sind. Der biharmonische Teil der Lösung für die Durchbiegung der Platte wird in der wohlbekannten Form $\Re[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)]$ angesetzt, worin $z = x + iy$ ist, während φ und χ gewisse im Plattengebiet holomorphe Funktionen bezeichnen. Die in diesen komplexen Variablen formulierten Grenzbedingungen zeigen eine vollständige Analogie mit den Randbedingungen des nach Muschelišvili, d. h. ebenfalls in komplexen Variablen, behandelten ebenen Problems im Sonderfall, daß die normale Komponente der elastischen Verschiebung und die tangential Komponente der Belastung am Rande der Scheibe vorgeschrieben sind. Der Lösungsmethode von D. I. Scherman entsprechend, werden nun die Funktionen φ und $\psi = d\chi/dz$ durch gewisse Randintegrale über zwei neue Funktionen ausgedrückt, deren Bestimmung auf die Lösung eines Systems zweier Fredholmscher Integralgleichungen zweiter Art zurückgeführt werden kann. Verf. weist nach, daß im vorliegenden Fall dieses System stets lösbar ist.

S. Woinowsky-Krieger.

Woinowsky-Krieger, S.: Über die Anwendung der Mellin-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung. *Ingenieur-Arch.* **20**, 391—397 (1952).

Die Spannungsverteilung in der Ecke einer dünnen Platte bei beliebigem Öffnungswinkel und beliebigen Randbedingungen längs der beiden anschließenden Plattenränder läßt sich mit Hilfe der Mellinschen Umkehrformel exakt angeben, wenn die Ränder unendlich ausgedehnt angenommen werden [R. Courant und D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. I, S. 87, 2. Auflage, Berlin 1931; dies. Zbl. **1**, 5)]. Als Anwendungsbeispiele werden unendlich ausgedehnte Kragplatten mit den Öffnungswinkeln $\pi/4$, $\pi/2$ und π durchgerechnet, wobei ein Rand eingespannt, der andere vollkommen frei angenommen wird. Der Verlauf des Einspannmomentes und der Durchbiegung längs des eingespannten bzw. freien Randes wird zahlenmäßig und graphisch wiedergegeben. In einer etwas abgeänderten Form eignen sich diese Lösungen, um nähere Angaben über die Spannungshäufung in der Plattenecke selbst zu gewinnen. Wie Verf. bemerkt, ist das angewandte Verfahren nicht ausreichend, um Grenzbedingungen an anderen Rändern der Platte streng zu befriedigen. Eine in dieser Weise erweiterte Aufgabe wird sich vermutlich durch Superposition einiger elastischen Flächen von dem behandelten Typus mit beliebig guter Annäherung lösen lassen.

R. Gran Olsson.

Huang, M. K. and H. D. Conway: Bending of a uniformly loaded rectangular plate with two adjacent edges clamped and the others either simply supported or free. *J. appl. Mech.* **19**, 451—460 (1952).

This paper deals with the problem of bending of a uniformly loaded rectangular plate having two adjacent edges clamped and the others either simply supported or free. The distributions of deflection and bending moments are obtained by a method

of superposition. Numerical values are given for square plates and, in one case, the results are compared with those obtained by another method. As pointed out by the authors a difficulty arises in calculating the bending moments. At the junctions of the clamped and free edges, the moments actually become singular and therefore, near these junctions, the moments are large. The present analysis makes use of a finite number of functions which are regular in the corners and hence cannot show the growth rate of the moments. Consequently moment calculations near the corners of the plate are not dependable. However, the deflections as given should probably be quite accurate even near the corners. In an appendix the solution of the differential equation of the deflections is treated in detail.

R. Gran Olsson.

Nardini, Renato: Sul valor medio dello stress per particolari sollecitazioni. Ann. Univ. Ferrara, n. Ser., Sez. VII 1, 89—91 (1952).

Hickerson, T. F.: Beam deflection when the moment of inertia is variable. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 68, 172—179 (1952).

Meng, Chao-Li: On shear deflection of beams. Sci. Record 5, 191—200 und chines. Zusammenfassg. 191 (1952).

Reissner, Eric: On non-uniform torsion of cylindrical rods. J. Math. Physics 31, 214—221 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit Verbesserungen der St. Venantschen Torsionstheorie zylindrischer Stäbe von beliebigem Querschnitt, wie sie durch behinderte Querschnittswölbung im Endquerschnitt $z = 0$ (Achse des Stabes ist die z -Achse) bedingt sind. Verf. bedient sich dabei eines von ihm in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 39, 405) behandelten Variationsproblems, wobei sowohl Spannungen als auch Verschiebungen unabhängig voneinander variiert werden. Sind u, v, w die Verschiebungskomponenten, so wird zunächst gesetzt: $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$, $u = \beta(z)y$, $v = -\beta(z)x$. [In der St. Venantschen Theorie ist bekanntlich $\beta(z) = C \cdot z$.] Nunmehr werden folgende Näherungsannahmen diskutiert: a) $w = \beta'(z)\Phi(x, y)$, b) $w = \alpha(z)\Phi(x, y)$, c) $\sigma_z = \sigma(z)\Phi(x, y)$. Es werden die Differentialgleichungen und Randbedingungen für $\beta(z)$, $\alpha(z)$, $\sigma(z)$ angegeben und einige aus den 3 Annahmen sich ergebende Folgerungen miteinander verglichen. Im Falle a) erhält man z. B. verschwindende Winkeländerungen γ_{xz} und γ_{yz} in einem Querschnitt, in dem die Wölbung behindert ist, während insbesondere die Annahme c) den wirklichen Verhältnissen am ehesten gerecht zu werden scheint.

F. Reutter.

Ziegler, Hans: Knickung gerader Stäbe unter Torsion. Z. angew. Math. Phys. 3, 96—119 (1952).

Bei Stabilitätsproblemen dünner Stäbe und Wellen, welche durch Druck und Torsion beansprucht sind, setzt man meist voraus, daß während der Deformation die Momentenvektoren der äußeren Momente zur Stabachse parallel bleiben. Diese Annahme ist nicht experimentell sichergestellt und hat außerdem zur Folge, daß diese Stabilitätsprobleme nicht-konservativen Charakter annehmen, so daß die Anwendung des statischen und des energetischen Stabilitätsproblems (von Ausnahmefällen abgesehen) nicht mehr zulässig ist. Deshalb erscheint es zweckmäßig, auch jene Fälle zu untersuchen, bei denen die Vektoren der äußeren Torsionsmomente ihre Richtungen im Raum beibehalten, also während der Deformation eine Neigung zur Stabachse annehmen, welche von der Art der Krafteinleitung abhängt. Das Problem wird dann konservativ und liefert neue Werte für die kritische Belastung, welche in einigen Fällen wesentlich höher liegen. Als Beispiel werden die Knickmomente für einen tordierten prismatischen Stab berechnet, dessen Querschnitt in den beiden Hauptrichtungen gleiche Biegesteifigkeiten aufweist, unter verschiedenen Randbedingungen. Es ergibt sich, daß die Greenhillsche Formel nur beschränkte Gültigkeit hat.

H. Neuber.

Ziegler, H.: Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik. Ingenieur-Arch. 20, 49—56 (1952).

Die Stabilitätsbeurteilung wird vom Verf. insofern verschärft, als er eine Untersuchung des Anwendungsbereiches der verschiedenen Kriterien vornimmt. Beim kinetischen Stabilitätskriterium, welches voraussetzungslos gilt, ist die kritische die kleinste Belastung, unter der eine Störung zu einer Bewegung führt, welche sich nicht in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage abspielt. In der technischen Praxis zieht man es meist vor, das bereits von Euler benutzte statische Stabilitätskriterium anzuwenden. Hierbei ist die kritische die kleinste Belastung, unter der neben der ursprünglichen eine zweite Gleichgewichtslage existiert. Seit einiger Zeit wird auch das energetische Stabilitätskriterium angewandt, bei welchem die kritische die kleinste Belastung ist, für welche die gesamte potentielle Energie des Körpers nicht mehr positiv definit ist. Diese letzten beiden Kriterien hat z. B. S. Timoshenko (Theory of Elastic Stability, Paris 1936) meist angewandt. Pflüger (Stabilitätsprobleme der Elasto-Statik, Berlin 1950; dies. Zbl. 36, 395) wies bereits bei Behandlung nicht-konservativer Systeme darauf hin, daß nur das erste Kriterium in Betracht kommt. Verf. zeigte in einer früheren Arbeit denselben Sachverhalt auch für das Knick- und Drehzahlproblem der fliegenden, durch achsiales Moment auf Torsion beanspruchten Welle. In vorliegender Arbeit beweist Verf. allgemein, daß das statische Stabilitätskriterium sowohl bei nicht-konservativen Systemen, wie auch bei Vorhandensein einer nicht-trivialen Gleichgewichtslage versagen kann. Weitere Beweise beziehen sich auf den Rechnungsgang bei nicht-konservativen Systemen und zeigen, daß die kritische Belastung stets von der Massenverteilung und der Dämpfung abhängt. *H. Neuber.*

Sternberg, E. and F. Rosenthal: The elastic sphere under concentrated loads. J. appl. Mech. 19, 413—421 (1952).

Eine elastische Kugel wird an den Endpunkten eines Durchmessers durch entgegengesetzt-gleiche Kräfte belastet. Die Spannungsverteilung im Innern der Kugel ist gesucht. Die Arbeit bringt eine exakte Lösung dieses Problems. Ausgehend von der Boussinesq'schen Spannungsfunktion wird die Lösung gefunden als die Summe zweier Einzellösungen: einer singulären in geschlossener Form und einer Lösung in Reihenform, die den Oberflächenspannungen entspricht. Die an den Angriffspunkten der Kräfte auftretenden Singularitäten werden untersucht. Den Abschluß bildet ein Vergleich der Arbeit mit einer jüngst erschienenen Untersuchung von Frocht und Guernsey über photo-elastische Spannungsverteilungen in dreidimensionalen Körpern. *E. Hardtwig.*

Moskvitin, V. V.: Die Restspannungen und -deformationen in einer hohlen dickwandigen Kugel. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 8 (Ser. fiz. mat. estestv. Nauk 5), 57—61 (1952) [Russisch].

Federhofer, K.: Stabilität der Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 277—288 (1952).

Die Aufgabe, das Stabilitätsproblem für Kreiszyinderschalen mit axialer Druckbelastung und variabler Wandstärke zu lösen, führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung. Diese Gleichung wird aufgestellt, durch entsprechende Variablentransformation auf die einfachste Form gebracht, aber nicht integriert, da Integration in geschlossenen Ausdrücken selbst im Falle einfacher Gesetze für die Wanddicke nicht gelingt. Da das Problem für Schalen konstanter Wandstärke gelöst ist, liegt es nahe, solche Probleme zu untersuchen, die diesem Problem hinreichend „benachbart“ sind, so daß man die Methoden der Störungsrechnung anwenden kann. In der Tat ist dies der vom Verf. beschrittene Weg: die Wandstärke soll sich nur schwach, aber stetig ändern, die Stetigkeitseigenschaften der Eigenfunktionen und Eigenwerte sorgen dann für die Anwendbarkeit der Störungsrechnung. Der Gang der Rechnung ist dabei der, daß zunächst die beherrschende Gleichung 4. Ordnung durch die entsprechenden Annahmen über die Wanddicke vereinfacht wird, worauf die angenäherte Lösung des Eigenwertproblems verhältnismäßig leicht gelingt. *E. Hardtwig.*

Zerna, W.: Zur Berechnung der Randstörungen kreiszyindrischer Tonnenschalen. Ingenieur-Arch. 20, 357—362 (1952).

Behandelt wird die in der Baustatik gelegentlich auftretende Aufgabe, Spannungs- und Verformungszustand von kreiszyindrischen Tonnenschalen zu berechnen. Da sich bei Anwendung der Membrantheorie hinsichtlich der Erfüllung von Rand-

bedingungen Schwierigkeiten einstellen, versucht Verf. die Lösung der Aufgabe auf einen neuen Wege, der erstmalig von A. E. Green und W. Zerna sowie R. S. Jenkins beschrieben worden ist. Dabei wird die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes von an den Rändern belasteten kreiszylindrischen Tonnenschalen auf eine komplexe Differentialgleichung 4. Ordnung zurückgeführt. Der Realteil der Lösung ergibt die Normalverrückung, der Imaginärteil eine Spannungsfunktion. Damit ist die Aufgabe im wesentlichen erledigt. Da die Behandlung der Differentialgleichung auf eine algebraische Gleichung 4. Grades führt, ist die ganze Fragestellung auf eine algebraische zurückgeführt — die Wurzeln der Gleichung lassen sich durch Diagramme ermitteln.

E. Hardtwig.

Reismann, H.: Bending and buckling of an elastically restrained circular plate. J. appl. Mech. **19**, 167—172 (1952).

Verf. betrachtet die Wirkung einer elastischen Einspannung des Plattenrandes, in dem die Neigung einer Geraden normal zur Begrenzung und zur Tangente der Mittelebene dem Radialmoment am Rande proportional angenommen wird. Mit dieser Randbedingung werden zunächst Durchbiegung und Momente der Kreisplatte infolge einer Einzellast senkrecht zur Mittelebene der Platte mit beliebigem Angriffspunkt ermittelt. Weiter werden die Knicklasten, die zur Erzeugung radial-symmetrischer Ausknickung der Kreisplatte infolge gleichmäßig verteilter Druckkräfte längs des Kreisumfanges nötig sind, angegeben. Die mitgeteilten Ergebnisse stützen sich auf die Annahmen der klassischen Theorie dünner Platten, sind im Sinne dieser Theorie als exakt anzusehen und enthalten als Sonderfälle die bekannten Lösungen des einfach gestützten und fest eingespannten Randes. Die mechanische Bedeutung der erhaltenen Ergebnisse wird eingehend erörtert insbesondere mit Rücksicht auf den Einspannungsgrad längs des elastisch eingespannten Randes.

R. Gran Olsson.

Reissner, Eric: A problem of finite bending of circular ring plates. Quart. appl. Math. **10**, 167—173 (1952).

Verf. betrachtet die radialsymmetrische Biegung einer Kreisringplatte unter dem Einfluß von Randkräften quer zur Plattenebene. Bezeichnen a den Radius der Bohrung, $(a + b)$ den Plattenradius, und lassen die Bedingungen der Auflagerung es zu, können die Durchbiegungen und Spannungen in der Ringplatte aus der Biegetheorie der Stäbe statt aus der Biegetheorie der Platte erhalten werden, falls die Breite b der Ringplatte im Vergleich zum Radius a hinreichend klein ist. Der Zweck der Arbeit ist eine eingehende Analyse der Problems, die zeigt, daß die Frage, ob die Balkentheorie oder die Plattentheorie wesentlich die gleichen Ergebnisse liefern, nicht nur vom Verhältnis b/a sondern auch von der Größe der Durchbiegungen abhängen. Es sei Φ_0 der Größenordnung nach die Durchbiegung der Platte nach der Balkentheorie dividiert durch die Breite b und μ ein dimensionsloser Parameter der Form $[12(1 - \nu^2)]^{1/2} b^2/a h$, wo ν die Poissonsche Zahl und h die Plattendicke bezeichnen. Es stellt sich heraus, daß die Balkentheorie anwendbar ist so lange $\Phi_0 \mu \ll 1$. Wenn $\Phi_0 \mu$ von der Größenordnung Eins ist, muß die Plattentheorie endlicher Durchbiegungen benutzt werden. Weiter ist, wenn $\Phi_0 \mu > 1$, die Wirkung einer Randzone zu berücksichtigen. Um einen kontinuierlichen Übergang vom Balken endlicher Biegung zur Platte endlicher Biegung herzustellen, muß ein System von Gleichungen bei der Biegung der Platte angewandt werden, das sich als allgemeiner als die Gleichungen von Kirchhoff und von Kármán für die Platte kleiner Durchbiegungen erweist. Ein allgemeineres System von Gleichungen dieser Art, anwendbar auf die axialsymmetrische Biegung der Kreisplatte wurde kürzlich vom Verf. gegeben (dies. Zbl. **36**, 397; **41**, 532). Die erhaltenen Ergebnisse haben Bedeutung für die Technik in Zusammenhang mit der Berechnung von Expansionsverbindungen in Rohrleitungen und von geriffelten (wellenförmigen) Zylinderschalen.

R. Gran Olsson.

Pochop, F.: Zur Stabilität der langen, in gleichen Abständen querversteiften Rechteckplatte. Österreich. Ingenieur-Arch. **6**, 387—404 (1952).

The energy method, when applied to the problem of elastic buckling of rectangular plates, leads to approximate solutions the convergence of which seems to deteriorate with increasing side ratio. By taking the real buckling surface into consideration, good approximate values of the buckling load may be obtained, even for great values of the side ratio by using a few amplitude terms only. In this paper

is shown how these essential terms may be found for the case of the rectangular plate stiffened transversally at equal distances. As an application, the minimum rigidity of the transverse ribs is calculated for the limiting cases of the uniformly, longitudinally loaded plate strip, and the plate strip loaded by uniform shear stresses on two-sides.

R. Gran Olsson.

Müller, W.: Zur Theorie der rechteckigen Fundamentplatten und Pilzdecken. Ingenieur-Arch. 20, 278—290 (1952).

Verf. untersucht die im Titel angegebenen Fälle unter der Annahme schwimmender Platten, indem von der Differentialgleichung $\Delta \Delta w + c w/N = p/N$ ausgegangen wird (w = Durchbiegung, c = Bettungsziffer, p = Belastung, N = Plattensteifigkeit, Δ = Laplacescher Operator). Im Falle einer wirklich schwimmenden Platte ist die Bettungsziffer c mit dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit identisch (H. Herz, Gesammelte Werke Bd. I, Leipzig 1895, p. 288). — Abgesehen von der klassischen Lösung von Navier, hat V. Lewe die Methode der Fourierschen Doppelreihen entwickelt. Das Verfahren besteht wesentlich darin, daß die Belastungsfunktion, die als stetig oder stückweise stetig vorausgesetzt ist, in eine trigonometrische Doppelreihe entwickelt wird, während für die Durchbiegung eine entsprechende Reihe mit unbestimmten Beiwerten sich ansetzen läßt. Die Bildung von $\Delta \Delta w$ und das Einsetzen in die obige Plattengleichung ergibt durch Gleichsetzen zweier Reihen die Möglichkeit, die unbestimmten Beiwerte zu ermitteln. Außer der gleichmäßig belasteten Platte wird der Fall gleichmäßiger Belastung längs rechteckiger Stützflächen untersucht, der in der Grenze in den Fall der punktförmigen Belastung oder Stützung durch Einzelkräfte übergeht. Um die Annahmen möglichst allgemein zu halten und möglichst viele Sonderfälle zu erfassen, wird die Umwandlung der Leweschen Doppelreihen in einfache, schnell konvergierende Reihen in direkter Weise mit Hilfe einiger Grundformeln abgeleitet. Die weiteren Folgerungen aus den gegebenen Ansätzen, insbesondere die Verfolgung des Verlaufs der Biegemomente mit Hilfe der Thetafunktionen für den wichtigen Fall der Pilzdecke, ferner eine Methode zur Ableitung der Durchbiegung aus der Momentenfläche durch reine Integration und endlich die Berechnung von Fundamentplatten und Pilzdecken mit endlichen rechteckigen Angriffs- und Stützflächen sollen in späteren Arbeiten gebracht werden.

R. Gran Olsson.

Müller, W.: Zur Theorie der durchlaufenden Fundamentplatten und Pilzdecken mit rechteckigen Last- oder Stützflächen. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 404—417 (1952).

By the way of transforming the double series in trigonometric terms of V. Lewe [Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten, 2. Aufl. Berlin 1926] the deflection of continuous rectangular foundation plates on an elastic basis and of flat slab floors is calculated and ascertained on the assumption that the load and supporting faces are of rectangular faces. The fundamental case of the flat slab floor represents a limit transition to the case of the foundation plate on an elastic basis. The general formulae developed in the paper cover a great number of special cases with respect to load and supporting faces of which only a few are mentioned and discussed.

R. Gran Olsson.

Jung, H.: Druckverteilung unter elastisch gelagerten Kreisplatten. Ingenieur-Arch. 20, 8—12 (1952).

Eine dünne elastische Kreisplatte vom Halbmesser $r = a$ liege reibungslos auf elastisch isotropem Halbraum auf und sei rotationssymmetrisch belastet. Verf. löst dieses Biegeproblem unter der Annahme, daß bei hinreichend konzentrierter Belastung die äußere Plattenzone $\alpha < r \leq a$ sich von der Unterlage abhebt. Der Lösungsansatz ergibt sich aus der Hankelschen Integraldarstellung der gegebenen Auflast sowie der zunächst unbekannten Reaktion der Unterlage. Der Ansatz enthält außerdem, ebenfalls in Form unendlicher Integrale, den mit vier verfügbaren Konstanten behafteten Einfluß gewisser, erstmals von P. Neményi eingeführter, Randsingularitäten. Die Kontaktbedingung für $r < \alpha$ führt auf eine Integralgleichung, deren näherungsweise Auflösung durch passend gewählte Reihenentwicklung der unbekannten, den Verlauf der reaktiven Belastung darstellenden, Funktion erfolgt. Gewisse Bedingungen der Integrierbarkeit sowie die Randbedingungen auf $r = a$ führen dann auf die Bestimmung der Konstanten, sowie des Halbmessers α der Berührungsfläche. Die Anwendung der Methode wird durch

ein durchgerechnetes Beispiel einer in ihrem Mittelpunkt belasteten Kreisplatte illustriert.

S. Woinowsky-Krieger.

Weinstein, Alexander: On cracks and dislocations in shafts under torsion. Quart. appl. Math. **10**, 77—81 (1952).

Es wird eine Umdrehungswelle bei Torsionsbeanspruchung untersucht, wenn diese Welle irgendwo senkrecht zur Drehachse eine Inhomogenität (Höhlung) in Gestalt einer flachen kreiszylindrischen Scheibe von bekanntem Radius aufweist. Aufgaben dieser Art lassen sich mittels der Quellsenkenmethode in einem fünf-dimensionalen Raum behandeln. — Verf. verwendet im Anschluß an frühere Arbeiten [Proc. 7th internat. Congr. Appl. Mech. **1**, 108—119 (1948); Proc. Aeroball. Red. Symposia, Naval Ordnance Laboratory p. 73—82 (1949) und dies. Zbl. **29**, 174; **38**, 262] ein Korrespondenzprinzip, durch das die Quellsenkenmethode mit elektrostatischen Problemen in der verallgemeinerten axialsymmetrischen Potentialtheorie verknüpft wird, und gewinnt auf diesem Wege Spannungs- und Verschiebungsgrößen. Es wird auch der Fall diskutiert, daß die zylindrische Scheibe eine Unstetigkeitsfläche für die Verschiebungen (surface of dislocation) darstellt. Die Spannungen bleiben beim Durchgang durch eine solche Fläche stetig, die Verschiebungen unterscheiden sich nur um eine starre Verdrehung der beiden Teile gegeneinander.

F. Reutter.

Huth, J. H.: Thermal stresses in a partially clamped elastic half-plane. J. appl. Phys. **23**, 1234—1237 (1952).

Pugsley, A. G.: The gravity stiffness of a suspension bridge cable. Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 385—394 (1952).

Es handelt sich um die zusätzliche Deformation einer Hängebrücke bei unausdehnbarem Kabel, die durch eine bewegliche Zusatzlast hervorgerufen wird. Eine aus der Unausdehnbarkeit gewöhnlich gezogene Folgerung stehe mit dem Energieprinzip im Widerspruch und das liege zum Teil daran, daß eine Approximation bei der Berechnung der Kabellänge nicht weit genug getrieben werde, zum Teil auch daran, daß eine vorgenommene teilweise Integration wegen der Unstetigkeit der Differentialquotienten nicht zulässig sei. Verbesserte Formeln werden gegeben.

G. Hamel.

Nelson, C. W., C. J. Ancker jr. and Ning-Gau Wu: The stresses in a flat curved bar due to concentrated radial loads. J. appl. Mech. **19**, 529—536 (1952).

Arf, C.: On the determination of multiply connected domains of an elastic plane body, bounded by free boundaries with constant tangential stresses. Amer. J. Math. **74**, 797—820 (1952).

Im Anschluß an zwei frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **29**, 375; **33**, 220) wird in einem zweifach zusammenhängenden ebenen Gebiete C , dessen Rand L doppelpunktfreie Kurven sind mit endlichvielen Spitzen ein ebener Spannungszustand mit $\sigma_x + \sigma_y = 4\alpha = \text{const}$ und mit lastfreiem Rand mit Hilfe komplexer Funktionen dargestellt. Der Punkt $z = \infty$ soll nicht innerer Punkt von C sein, kann aber Punkt von L sein. Eine stetige Annäherung von $z \in C$ nach $z = \infty$ soll nur so erfolgen können, daß $\lim_{z \rightarrow \infty} \arg z = \varphi_j$ existiert mit $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$ und daß $\lim_{z \rightarrow \infty} J z e^{-i\varphi_j}$ Werte aus endlichvielen getrennt liegenden Inter-

vallen annimmt, die zu φ_j gehören. Die analytische Funktion $\Gamma(z) = (\sigma_x - \sigma_y - 2i\tau)/4\alpha$ soll in C und auf L , abgesehen von $z = \infty$, keine anderen Singularitäten als endlichviele Pole haben. Durch Betrachtung von $Z = \Gamma(z)$ und ihrer Umkehrfunktion gewinnt Verf. unter Heranziehung der Theorie der elliptischen Funktionen eine analytische Funktion $z = F(T)$ der komplexen Variablen T , die ein Rechteck auf den zweifach zusammenhängenden Bereich C abbildet und die Darstellung eines obigen Bedingungen genügenden ebenen Spannungszustandes durch Realteil und Imaginärteil von $F(T)$ resp. $F'(T)$ und ihrer konjugierten Funktionen. Die Ver-

schiebungen in einem allgemeinen Punkt von C werden berechnet und die resultierende Kraft und das resultierende Moment für einen kleinen Bereich um einen Punkt von C , in dem $\Gamma(z)$ einen Pol hat. Die Funktion $F(T)$ vereinfacht sich, wenn $\Gamma(z)$ in C überall endlich ist.

R. Moufang.

Jung, Hans: Der elastisch plastische Körper. Z. angew. Math. Mech. **32**, 259—261 (1952).

Mit den Bezeichnungen: \mathfrak{E} = Verzerrungstensor, $\bar{\mathfrak{E}}$ = Verzerrungsdeviator, \mathfrak{P} = Spannungstensor, $\bar{\mathfrak{P}}$ = Spannungsdeviator; J_1, J_2, J_3 = die Tensorinvarianten von \mathfrak{E} ; P_1, P_2, P_3 = die Tensorinvarianten von \mathfrak{P} gewinnt man aus dem Ansatz

$$\frac{\bar{\mathfrak{P}}}{\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}}} = \frac{\bar{\mathfrak{E}}}{\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}}}$$

zusammen mit dem Verfestigungsgesetz von Roß-Eichinger:

$$\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{3}P_1^2 - P_2}} = F\left(\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}}\right)$$

die Beziehung

$$\bar{\mathfrak{P}} = \bar{\mathfrak{E}} \cdot g\left(\sqrt{2\sqrt{\frac{1}{3}J_1^2 - J_2}}\right),$$

woraus sich eine Darstellung der Spannungen durch die Verzerrungen ergibt, falls ein Zusammenhang zwischen P_1 und J_1 in der Form

$$P_1 = f\left(\frac{1}{3}J_1\right)$$

bekannt ist. Die Bestimmung der Verschiebungen soll alsdann durch eine Reihenentwicklung aus den Gleichgewichtsbedingungen erhalten werden.

R. Moufang.

Yamamoto, Y.: Variational principles of equilibrium of an elasto-plastic body. Quart. appl. Math. **10**, 215—224 (1952).

Unter der Voraussetzung der Wegunabhängigkeit von $\int_0^{\mathfrak{E}} (\mathfrak{P}, d\mathfrak{E})$ (\mathfrak{P} = Spannungstensor, \mathfrak{E} = Verzerrungstensor) werden verschiedene Variationsprinzipie aufgestellt für das elastisch-plastische Verhalten eines Körpers, dessen Oberfläche zum Teil durch vorgegebene Kräfte belastet ist, zum Teil vorgegebene Verschiebungen erleidet. Das Verformungsgesetz wird nicht näher spezifiziert, sondern nur der Beschränkung unterworfen, daß $\int_0^{\mathfrak{E}} (\delta \mathfrak{P}, d\delta \mathfrak{E}) \geq 0$ ist für jede zulässige Änderung des Spannungs- und Verformungszustandes. Die wichtigsten Verformungsgesetze werden bezüglich der Gültigkeit dieser Variationsprinzipie diskutiert. *R. Moufang.*

Neményi, P. F. and A. van Tuyl: Two-dimensional plastic stress systems with isometric principal stress trajectories. Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 1—11 (1952).

The two equilibrium equations for the plane stress tensor, Σ , together with a „yield condition“, $g(\sigma_x, \sigma_y, \tau_z) = f(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, [$\sigma_x, \sigma_y, \tau_z$ components of Σ , σ_1, σ_2 principal stresses], are three equations for the three unknown σ_x, σ_y, τ . The authors are interested in the question, whether for a given $f(\sigma_1, \sigma_2)$, there exist among the particular solutions of the above system such solutions, Σ , that their principal stress lines form an isometric net; or, in the authors' terminology they want „... to find all yield functions, f , with which isometric principal stress trajectories beyond the trivial ones are consistent“. The main results are: Every yield function is „consistent“ with certain trivial isometric principal stress lines, [a) Cartesian nets, b) concentric circles and radii.] Moreover there exist certain families of yield functions (explicitely characterized in the paper), which are consistent with certain not trivial isometric nets; among these, for the classical yield condition $(\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \text{const.}$ are the isometric stress trajectories whose 45° trajectories, first fully investigated by E. Schmidt and C. Carathéodory, are „slip lines“, also called Hencky-Prandtl curves. A certain „parabola-condition“, proposed first, 1949 by v. Mises also admits non trivial isometric stress trajectories. — This beautiful paper is one of the last contributions of Neményi, the very gifted, highly learned and original author who unexpectedly died last summer.

H. Geiringer.

Drucker, D. C., W. Prager and H. J. Greenberg: Extended limit design theorems for continuous media. Quart. appl. Math. **9**, 381—389 (1952).

Die Note befaßt sich in allgemeiner Formulierung mit der Festsetzung der mit Sicherheit aufzunehmenden Lasten in einem Material, das Oberflächenkräften oder Verschiebungen unterworfen ist, die verhältnismäßig zunehmen oder wenn zusätzliche Lasten einem gegebenen Vorspannungszustand überlagert werden; früher erhaltene Ergebnisse werden auf ein vollkommen plastisches Material und auf eine beliebige Belastungsgeschichte ausgedehnt. Eine wichtige Frage ist die der Stabilität, d. i. ob der Körper zusammenklappen wird, oder ob seine Verformung bestehen bleibt, nachdem wesentliche Teile plastisch geworden sind. Die Verf. beweisen eine Anzahl von Theoremen analytischen und geometrischen Inhalts, die zu vor größtenteils aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten abgeleitet werden.

Th. Pöschl.

Drucker, D. C. and W. Prager: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. appl. Math. **10**, 157—165 (1952).

Anwendung der allgemeinen Ansätze, die die Verf. in der vorhergehenden Note gegeben haben, auf Probleme der Erdbaumechanik, bei denen die Stabilität von Schüttungen, die Tragfähigkeit von Gründungen und Platten und des Erddrucks auf Stützwände eine Rolle spielen. Alle diese stellen Plastizitätsprobleme dar, wobei die Erde hier als idealisiertes Material angesehen wird, das bis zu einem gewissen Spannungszustand als elastisch betrachtet wird und von da ab Gleiten und Fließen aufweist. In fortgeschrittener Auffassung wird für das Verhalten der Erde ein erweiterter Coulomb-Mohrscher Ansatz eingeführt.

Th. Pöschl.

Pflüger, A.: Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingenieur-Arch. **20**, 291—301 (1952).

Für die rechnerische Ermittlung der Ausbreitung der plastischen Bereiche in Tragwerken bei elastisch-plastischen Beanspruchungen — insbesondere im Falle des plastischen Knickens — bedarf die Engesser-Kármánsche Theorie einer Ergänzung, auf die zuerst F. R. Shanley [J. aeronaut. Sci. **13**, 678 (1946) und **14**, 261 (1947); Proc. Amer. Soc. Civil. Engr. **75**, 759 (1949)] hingewiesen hat, und die seither auch durch Untersuchungen anderer gestützt wurde. Verf. macht darauf aufmerksam, daß es sich dabei einfach darum handelt, „das Problem mathematisch vollständig zu beschreiben und die bisher vergessenen Lösungen zu der seit langem bekannten hinzuzunehmen“. Die angegebene Erweiterung wird für den Rechteckquerschnitt und für den „Zweipunktquerschnitt“ ausgeführt.

Th. Pöschl.

Gaydon, F. A.: On the combined torsion and tension of a partly plastic circular cylinder. Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 29—41 (1952).

Die Gleichungen des Plastizitätsgesetzes von Reuss zusammen mit der Mises'schen Fließbedingung werden integriert für Kreiszyylinder unter kombinierter Beanspruchung durch Längszug und Torsion für verschiedene, jedoch technisch nicht näher diskutierte Versuchsdurchführungen: 1) $dl/d\theta = \text{konst.}$ (l = Länge, θ = Verdrehungswinkel). 2) $\Phi = \text{konst.}$ (Φ = Verdrehungswinkel pro Längeneinheit) und die Längsspannung anwachsend, gemäß der von Hohenemser durchgeführten Versuche an dünnwandigen Rohren. Hierbei ist zu unterscheiden zwischen voll-elastischen und elastisch-plastischem Ausgangszustand der Verdrillung. 3) $\sigma = \text{konst.}$ (σ = Längsspannung), und die Verdrillung anwachsend bei vollelastischem resp. vollplastischem Ausgangszustand der Axialdehnung. Im letzten Falle streben mit wachsendem Φ die Normalbelastung L und das Torsionsmoment T rasch gegen ihre Grenzwerte null resp. $2\pi E a^3/3 \sqrt{3}$ (E = Fließgrenze beim Zugversuch, a = Zylinderradius). 4) $L/T = \text{konst.}$ — Die Spannungen σ, τ werden in allen Fällen als Funktionen von r berechnet.

R. Moufang.

Arutjunjan, N. Ch.: Einige Fragen der Theorie des Kriechens. Priklad. Mat. Mech. **16**, 257—270 (1952) [Russisch].

Diese Arbeit behandelt die Theorie der Kriecherscheinungen im Beton oder analogem Stoff und beginnt mit der Analyse des einachsigen Spannungszustandes. Beton vom Alter τ_1 sei einer mit der Zeit veränderlichen Beanspruchung $\sigma(\tau)$ unterworfen; ist $E(\tau)$ der Elastizitätsmodul, so besteht für die spezifische Dehnung ε zur Zeit t die Relation

$$(1) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{\tau_1}^t f[\sigma(\tau)] \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

worin $C(t, \tau)$ eine Erinnerungsfunktion des Kriechvorganges ist und $f(\sigma)$ eine weitere Funktion bezeichnet, die für $\sigma < R/2$ (R = Betonfestigkeit) gleich σ ist. Der Gl. (1) analog gebaute Beziehungen lassen sich für die Querkontraktion, die Schubverzerrung und die räumliche Deformation aufstellen. Im Gegensatz zu seinen früheren Arbeiten befaßt sich Verf. im folgenden mit dem Fall $\sigma > R/2$, der einer nichtlinearen Relation zwischen σ und ε entspricht. Gl. (1) wird zunächst unter der Sonderannahme $C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - \exp(\gamma \tau - \gamma t)]$, worin γ eine Konstante und $\varphi(\tau)$ eine experimentell zu bestimmende Funktion des Betonalters sind, auf eine Diff.-Gleichung zurückgeführt. Diese wird mit $\varphi(t) = A/t + C_0$, $f(\sigma) = \sigma + \beta \sigma^2$, wobei A , C_0 und $\beta < 1$ wiederum Konstanten bedeuten, weiter spezialisiert und näherungsweise integriert. Einige Anwendungsbeispiele beschließen die Arbeit.

S. Woinowsky-Krieger.

Schwarzl, F. and A. J. Staverman: Time-temperature dependence of linear viscoelastic behavior. J. appl. Phys. 23, 838—843 (1952).

Es wird die Frage behandelt, ob bei der Untersuchung des linear visco-elastischen Verhaltens eines Stoffes eine Änderung der Temperatur vollständig äquivalent ist mit einer Verschiebung (shift) der logarithmischen Skala oder nicht. Wenn das erste zutrifft, wird das Material als „einfach-thermo-rheologisch“ und von der Klasse *A* bezeichnet. Es wird gezeigt, daß in einem solchen Material der mikro-rheologische Vorgang bei Temperaturänderungen unverändert bleibt, d. h. daß in einem solchen Material bei verschiedenen Temperaturen wesentlich dieselben molekularen Vorgänge stattfinden, jedoch mit verschiedenen Geschwindigkeiten. Stoffe, die diese Eigenschaft nicht besitzen, gehören zur Klasse *B*. Th. Pöschl.

Meljachoveckij, A. S.: Die Integralgleichung der freien Schwingungen eines krummen Stabes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 513—516 (1952) [Russisch].

Verf. behandelt freie Querschwingungen eines dünnen Stabes mit undehnbarer Achse, die einer glatten ebenen Kurve folgt und beliebigen Endbedingungen hinsichtlich der beiden Verschiebungskomponenten sowie der Tangentenneigung unterworfen werden kann. Ausgehend von der Greenschen Funktion für die Tangentialverschiebung der Stabelemente und der zugehörigen Diff.-Gleichung sechster Ordnung stellt Verf., nach Trennung der Veränderlichen, ein System zweier Integralgleichungen für die vorgenannte Verschiebung und eine Ableitung von ihr als Ortsfunktionen auf. Dieses System läßt sich auf eine einzige „belastete“ Integralgleichung zurückführen, deren Kern eine Entwicklung nach Eigenfunktionen zuläßt, die sich zunächst auf die tangentialen Verschiebungen beziehen; Eigenfunktionen für die Normalverschiebungen der Stabelemente ergeben sich dann unmittelbar aus dem ersten System von Funktionen. Verf. beweist dabei die Orthogonalität dieser beiden Systeme und die Tatsache, daß die Eigenwerte des Problems sämtlich reell sind.

S. Woinowsky-Krieger.

Klein, Eberhard und Ernst Jenckel: Die Berechnung freier Schwingungen nach der Maxwell'schen Theorie. Z. Naturforsch. 7a, 305—313 (1952).

Ableitung der Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen elastisch-plastischer Körper auf Grund der von Cl. Maxwell gegebenen Vorstellungen; für diese Körper werden mehrere verschiedene Modell-Anordnungen eingeführt, die sich aus elastischen Federn und Flüssigkeitsdämpfungen zusammensetzen. Die Eigen-

schaften der Maxwell'schen Körper sind durch Gleichungen von folgender Form gekennzeichnet: $d\sigma/dt = E d\epsilon/dt - \sigma/\tau$, worin τ die Relaxationszeit bedeutet. Als Modelle werden einfache und zusammengesetzte mechanische Schwinger und ein elektrisches Modell mit Ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität betrachtet. Die Lösungen der bezüglichen Differentialgleichungen ergeben sich in Form von trigonometrischen und Exponentialfunktionen und können durch Einführung eines komplexen E -Modells in bekannter Weise dargestellt werden. Zum Schluß wird eine Theorie der Rückprallelastizität skizziert. *Th. Pöschl.*

Grammel, G.: Zur Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung. Ingenieur-Arch. 20, 170—183 (1952).

E. Mettler (dies. Zbl. 31, 87; 35, 117) hat die Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper angegeben, ohne Dämpfungseinflüsse zu berücksichtigen. Für den achsial pulsierend belasteten Stab hat F. Weidenhammer (dies. Zbl. 44, 401) das Stabilitätsproblem durchgerechnet und die Mettlerschen Ergebnisse auf anderem Wege bestätigt, wobei auch eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung berücksichtigt wurde. Verf. zeigt nunmehr, daß sich die allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper auch unter Berücksichtigung einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung aufstellen läßt. Er erweitert die Gleichgewichtsbedingungen durch die entsprechenden Dämpfungsglieder, welche Ableitungen erster, d. h. ungerader Ordnung darstellen. Durch Abspaltung einer Exponential-Zeitfunktion läßt sich jedoch für die Restfunktionen ein Differentialgleichungssystem herstellen, das nur Ableitungen gerader Ordnung enthält. Verf. deutet dieses System als Bewegungsgleichungen eines Ersatzkörpers, der dieselbe Form und dieselbe Auflagerung besitzt und auch denselben Belastungen unterworfen ist wie der wirkliche Körper. Nur ist hierbei die Federkonstante vom Dämpfungsfaktor abhängig, was Verf. als amplitudenproportionale Dämpfung kennzeichnet (nach Ansicht des Ref. handelt es sich hierbei lediglich um eine Abminderung der Federkonstanten; der Ersatzkörper schwingt aber mit dieser abgeminderten Federkonstanten ungedämpft). Verf. zeigt, daß die weiteren Überlegungen sich ohne Schwierigkeit analog zur Mettlerschen Theorie durchführen lassen und erläutert den Rechnungsgang am Beispiel der Kippschwingungen eines Stabes mit rechteckigen Querschnitt. *H. Neuber.*

Fognolo Massaglia, Bruna: Propagazione di onde elastiche in uno strato sferico ed applicazioni alla sismologia. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 33, 367—379 (1952).

Verf. berechnet die Eigenschwingungen einer ideal-elastischen homogenen Kugelschale mit dem Ziele, die sog. Hauptphase der Erdbeben, d. h. die Love- und die Rayleighwellen durch derartige Eigenschwingungen zu interpretieren. Diese Eigenschwingungen zerfallen in zwei Gruppen, deren geometrische Eigenschaften mit denen der Love- bzw. der Rayleighwellen übereinstimmen. Aus der Bedingung, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen Gruppe dieser Eigenschwingungen gleich der Geschwindigkeit der Lovewellen und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der anderen Gruppe dieser Eigenschwingungen gleich der Geschwindigkeit der Rayleighwellen sein soll, werden Mächtigkeit der Kugelschale und ihre elastischen Eigenschaften bestimmt. — Gegen die Auffassung des Verf. sind einige Bedenken zu erheben. Als Randbedingung für die innere Begrenzungsfläche der Kugelschale fordert der Autor Verschwinden der Verschiebungen. Die richtigen Randbedingungen für diese innere Begrenzungsfläche wären Stetigkeit der Verschiebungen und der Normalkomponenten des Spannungstensors. Es wirkt auch befremdend, daß die experimentell sicher gestellte und auch aus den bisherigen Theorien folgende Dispersion der Oberflächenwellen nicht zum Ausdruck kommt. Als Radius der inneren Kugelfläche ergibt sich ein Wert von 1900 km. Diese Fläche würde also im Erdkern liegen, und von dieser Fläche bis zur Erdoberfläche müßte man ein homogenes Medium annehmen, eine Vorstellung, die im Gegensatz zu allen geophysikalischen Anschauungen über den Aufbau der Erde steht. *H. Menzel.*

Mapleton, Robert A.: Elastic wave propagation in solid media. J. appl. Phys. 23, 1346—1354 (1952).

Es handelt sich um die Ermittlung der geeignetsten Wellenformen zur Verwendung in „Verzögerungsleitungen“ (delay lines), die aus festen Körpern, insbesondere Einkristallen, hergestellt sind. Zuerst wird die Ausbreitung elastischer Wellen in isotropen Platten betrachtet und gezeigt, daß am günstigsten solche Plattenwellen sind, bei denen der Verschiebungsvektor vorwiegend in Richtung der Plattendicke liegt. Beträgt die Plattendicke wenigstens einige Wellenlängen, breiten sich diese Wellen praktisch mit Schubwellengeschwindigkeit aus. — Sodann werden die Wellen in Platten aus Kristallen des kubischen Systems untersucht, für den Fall, daß eine

kristallographische Achse in Richtung der Plattendicke liegt. Die charakteristische Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Plattenwellen wird, wieder für Wellen, deren Verschiebungsvektor vorwiegend parallel zur Plattendicke ist, numerisch für Calciumfluorid und praktisch interessierende Parameter gelöst. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist in der Kristallplatte von der Wellenrichtung abhängig, für Wellen der betrachteten Art und hinreichend dicke Platten jedoch nur vernachlässigbar wenig.

A. Schock.

Doak, P. E.: The reflexion of a spherical acoustic pulse by an absorbent infinite plane and related problems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **215**, 233—254 (1952).

Als primäre Welle wird eine Druckunstetigkeit des Schalldrucks p angenommen: $p_i = u \left(t - \frac{R}{c} \right) / 4\pi R$ (R = Abstand von der Quelle, c = Schallgeschwindigkeit, $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$).

Die Laplace-Transformierte von p_i wird dann nach dem Vorgang von Weyl durch eine Superposition von ebenen Wellen in Form eines Fourierintegrals über deren Richtungen dargestellt, womit das Problem auf das der Reflexion ebener Wellen zurückgeführt ist. Durch Rücktransformation der reflektierten ebenen Partialwellen ergibt sich der Schalldruck p_r der reflektierten Welle; er kann als Summe einer vom Spiegelbild des Quellpunkts ausgehenden Kugelwelle und einer Art Beugungswelle dargestellt werden. Verf. setzt voraus, daß die reflektierende Fläche durch ihre Impedanz ζ (= Verhältnis von Schalldruckamplitude zur Amplitude der Schnelle in Richtung der Flächennormale) gekennzeichnet werden kann und ζ unabhängig von der Art des Schallfeldes lediglich eine Funktion von Frequenz ω und Material ist. Diese Voraussetzung rein lokaler Reaktion des reflektierenden Mediums ist für stark absorbierende Medien annähernd erfüllt. Folgende Fälle werden behandelt: 1. ζ eine reelle Konstante (reine Wirk-Impedanz): p_r kann in analytischer Form angegeben werden, setzt i. a. mit kleinerer Unstetigkeit ein als p_i und nähert sich asymptotisch dem Endwert des gespiegelten p_i . In Aufpunkten, denen strahlengeometrisch eine fast streifende Reflexion entspricht, hat die Unstetigkeit in der reflektierten Welle umgekehrtes Vorzeichen. Anfänglich wird also bei streifender Ausbreitung die primäre Welle durch die reflektierte kompensiert; die Schallausbreitung ist in diesem Fall also ganz der „Beugungswelle“ zuzuschreiben. 2. $\zeta = \mu + i\omega\varepsilon$ bzw. $\zeta = \mu + \kappa/i\omega$ (μ, ε, κ = Konstante, Medium mit Wirk- und Massen- bzw. federartiger Blindimpedanz). 3. $\zeta = \mu + i\omega\varepsilon + \kappa/i\omega$ (Medium mit Resonanzfrequenz). In diesen Fällen werden nur noch Näherungen für p_r gegeben, die qualitativ ähnliches Verhalten wie bei 1. zeigen; im Fall 3. erfolgt der Übergang in den stationären Zustand in Form einer gedämpften Schwingung mit der Resonanzfrequenz. — Der Vergleich der Ergebnisse mit denen der strengen Theorie für ein verlustfreies reflektierendes Medium erweist die befriedigende Brauchbarkeit der Charakterisierung des reflektierenden Mediums durch eine Impedanz im obigen Sinne. — Die Ergebnisse sind von Bedeutung für Fragen der Raumakustik und können bis zu einem gewissen Grade auch auf Detonationswellen angewandt werden.

A. Schock.

Miles, John W.: A note on the damping in roll of a cruciform winged body. Quart. appl. Math. **10**, 276—277 (1952).

Pilatovskij, V. P.: Bestimmung des Debits einer Batterie von Bohrlöchern, die eine Kegelschicht drainieren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 897—900 (1952) [Russisch].

Müller, Wilhelm: Zur Theorie des Reibungsstoßes einer Kugel gegen eine ebene Wand und gegen eine zweite Kugel. Österreich. Ingenieur-Arch. **6**, 196—208 (1952).

Die für den elastischen Stoß von zwei oder drei Kugeln geltenden Gleichungen der älteren Theorie werden aus einem „allgemeinen Ansatz“ — der freilich aus der Arbeit nicht mit ausreichender Präzision erkennbar wird — hergeleitet und die Ergebnisse übersichtlich durch Schaubilder dargestellt, wobei die Fälle des Auftretens von Haft- und Gleitreibung unterschieden werden. Es wird nur das ebene Problem behandelt, das in bekannter Weise 8 unbekannte Größen enthält, für deren Bestimmung die $2 \times 3 = 6$ Bewegungsgleichungen, die Reibungsgleichung und die Newtonsche Stoßgleichung (die vom physikalischen Standpunkt sehr angezweifelt wird) zur Verfügung stehen, so daß das Problem i. a. als dynamisch-bestimmt angesehen werden kann.

Th. Pöschl.

Brechovskich, L. M.: Über einen Fall der Fortpflanzung des Schalls in einem inhomogenen Medium. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **87**, 715—718 (1952) [Russisch].

Mikeladze, M. Š.: Über die Festigkeit eines schnell rotierenden Zylinders. Priklad. Mat. Mech. 16, 706—710 (1952) [Russisch].

Lo, Hsu: A nonlinear problem in the bending vibration of a rotating beam. J. appl. Mech. 19, 461—464 (1952).

Hydrodynamik:

Bilinski, Stanko: Die Diracsche Funktion und ein elementares Problem der Hydrodynamik. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 7, 219—225 und deutsche Zusammenfassg. 225—227 (1952) [Kroatisch].

● Milne-Thomson, L. M.: Theoretical aerodynamics. — 2nd ed. London: Macmillan and Co., Ltd., 1952. XX, 414 p. 40 s. net.

Nadile, Antonio: Su alcune proprietà dello strato vorticoso non omogeneo. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. 11, 279—287 (1952).

Verf. untersucht das Geschwindigkeitsfeld, das von einer nichthomogenen, auf einer Oberfläche σ verteilten Wirbelschicht mit der vektoriellen Intensität $\vec{\omega} = n \times \text{grad}_M F$ (n Normale zu σ) außerhalb dieser Fläche hervorgerufen wird, und zeigt, daß es gleich ist dem Geschwindigkeitsfeld, das durch einen die Berandung von σ bildenden Wirbelfaden s mit der Intensität $2F$ zuzüglich einem Term $\frac{1}{2\pi} \text{grad}_P \int_{\sigma} F \frac{d1/r}{dn} d\sigma$ erzeugt wird. Wenn σ eine geschlossene räumliche Fläche

bildet, verschwindet die Berandung, und das Geschwindigkeitsfeld ist nur durch das genannte Zusatzglied bestimmt. Schließlich wird noch gezeigt, daß ein unendlich kleiner Wirbelring der Intensität J , der eine Fläche $d\sigma$ umschließt, gleich einem Dipol vom Moment $N = J d\sigma$ ist. W. Wuest.

Gorup, Guntram v.: Eine neue Methode zur Berechnung der Strömungsfunktionen bei zeitlich veränderlicher Kontur. Z. angew. Math. Mech. 32, 371—378 (1952).

Für eine zeitlich veränderliche Profilkontur C in ebener Strömung wird die Strömungsfunktion Ω berechnet, die durch die Randbedingung für die Normalkomponenten der Geschwindigkeit und die Regularitätsbedingung im Außenraum festgelegt wird. Mit einer zeitabhängigen Abbildungsfunktion wird C auf eine feste Kontur C_0 abgebildet. Die Randbedingung wird sodann für die reelle Achse und den Einheitskreis als Sonderfälle von C_0 in Funktionalgleichungen für Ω umgeformt und unter Beachtung der Regularitätsbedingung gelöst. Die Berechnung von Ω vereinfacht sich sehr, wenn die Veränderungen von C nur aus starren Verschiebungen und Drehungen bestehen. Wegen der Überlagerbarkeit der Strömungen und Strömungsfunktionen braucht man bei beliebiger Konturänderung, die sich aus reiner Verschiebung und Drehung sowie einer Deformation zusammensetzt, nur den von der Deformation herrührenden Anteil nach dem komplizierteren Verfahren zu bestimmen, das für das Joukowski-Profil durchgerechnet wird. Formeln für Kräfte und Momente am zeitlich veränderlichen Profil sollen in einer späteren Arbeit mitgeteilt werden. J. Pretsch.

Görtler, H.: Zur laminaren Grenzschicht am schiebenden Zylinder. I. Arch. der Math. 3, 216—231 (1952).

Die Berechnung der laminaren Grenzschicht am unendlich langen schräg angeströmten Zylinder ist sowohl vom physikalischen als auch vom mathematischen Standpunkt aus als verhältnismäßig einfacher Fall der dreidimensionalen Grenzschichtströmung von erheblichem Interesse. Der wesentliche Vorteil dieses Falles liegt darin, daß die Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu den Zylindererzeugenden wie beim gerade angeströmten Zylinder berechnet werden kann und die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Zylindererzeugenden anschließend gesondert ermittelt werden kann. Diese als Unabhängigkeitsprinzip

bezeichnete Tatsache wird diskutiert und eine sehr ausführliche Übersicht über bereits bestehende Untersuchungen gegeben. — Verf. behandelt dann den stationären Fall und ergänzt die Blasiusche Reihendarstellung durch eine entsprechende Reihenentwicklung für die Quergeschwindigkeitskomponente. Die dabei auftretenden universellen Hilfsfunktionen wurden bis zum Glied 6. Ordnung vertafelt. Das vorgeschlagene Verfahren ermöglicht auch die Berechnung der Grenzschichtverteilung für die Querkomponente und die Temperaturverteilung für $Pr = 1$ ohne die zugehörige Grenzschichtverteilung für die Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu den Zylindererzeugenden. *J. Rotta.*

Torda, T. Paul: Boundary layer control by continuous surface suction or injection. *J. Math. Physics* 31, 206—213 (1952).

Verf. zeigt, daß das v. Kármán-Pohlhausen-Verfahren bei kontinuierlicher Absaugung zu physikalisch sinnlosen Ergebnissen führen kann, und beseitigt nach einem Vorschlag von v. Kármán diese Unstimmigkeiten, indem er einige der Pohlhausenschen Randbedingungen (am Rande der Grenzschicht) ersetzt durch neue Randbedingungen (an der Wand), die sich unmittelbar aus den Grenzschichtgleichungen ergeben. Die Methode, die auch zur Berechnung der Absauggeschwindigkeit bei vorgegebener Grenzschichtdicke verwandt werden kann, wird an einem Zahlenbeispiel erläutert. *J. Weissinger.*

Berker, Ratip: Sur les forces exercées par un fluide visqueux sur un obstacle. *Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser.* 1, 260—280 (1952).

Die Übertragung des d'Alembertschen Paradoxons von der idealen auf die zähe Flüssigkeit ist nicht statthaft. Das Paradoxon wäre für die dreidimensionale Strömung nur erfüllt, wenn die Geschwindigkeitskomponenten u_i in großem Abstand r vom umströmten Körper wie $r^k \cdot u_i$ ($k \geq 2$) verschwinden würden; entsprechendes müßte für die Ableitungen von u_i bis zur 2. Ordnung gelten. Eine natürliche dreidimensionale Strömung existiert jedoch nur für $k < 2$. Im ebenen Fall gelten entsprechende Bedingungen $k \geq 1$ bzw. $k < 1$. *J. Pretsch.*

Ballabh, Ram: On two-dimensional superposable flows. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* 16, 191—197 (1952).

Bei der Erörterung zweidimensionaler überlagerbarer Strömungen wird gezeigt, daß die Stromfunktion einer drehungsbehafteten Strömung, die einer drehungsfreien Strömung überlagert wird, nur von Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion der drehungsfreien Strömung sowie der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängt. *J. Pretsch.*

Krzywoblocki, M. Z. E.: Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. A. Subsonic flow. *Österreich. Ingenieur-Arch.* 6, 330—360 (1952).

Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die Bergmansche Operatorenmethode in der Theorie kompressibler Strömungen, die bisher nur in verstreuten Aufsätzen mathematischen Charakters zugänglich war, in zusammenfassender Weise so darzubieten, daß der theoretisch arbeitende Aerodynamiker praktischen Gebrauch davon machen kann. Die wesentlich mathematischen Beweisführungen treten daher zurück gegenüber einer vereinfachten Darstellung der Endergebnisse und Formeln. Die ersten beiden Teile behandeln den Unterschallbereich, wobei Verf. im wesentlichen der Darstellung von v. Mises und M. Schiffer (1948) folgt. In einem einleitenden Abschnitt werden in elementarer Form einige Grundtatsachen der Funktionentheorie, insbesondere verschiedene Arten von Singularitäten, kurz zusammengefaßt. Nach Ableitung der Tschaplyginschen Gleichung wird die Transformation auf die „pseudo-logarithmische Ebene“ vorgenommen und die Dualität untersucht, die zwischen der inkompressiblen und der kompressiblen Strömung besteht. Entsprechend der Bergmanschen Methode wird die transformierte Tschaplyginsche Gleichung durch Reihenansätze integriert, deren Konvergenz eingehend erörtert wird. Der 2. Teil behandelt Näherungslösungen unter Annahme vereinfachter Druck-Dichte-Beziehungen, entsprechend dem Vorschlag von v. Mises und M. Schiffer, welche die Näherung von Karman und Tsien verallgemeinert und verbessert haben. *W. Wuest.*

Jones, Robert T.: Theoretical determination of the minimum drag of airfoils at supersonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* 19, 813—822 (1952).

Bei einem mit Überschallgeschwindigkeit in reibungsloser Strömung fliegenden Tragflügel kommt zu dem durch die tragenden Wirbel hervorgerufenen „induzierten Widerstand“ noch ein Wellenwiderstand hinzu. Dieser Wellenwiderstand kann in zwei Anteile aufgespalten werden, nämlich in einen vom Auftrieb und einen von der Flügeldicke abhängigen Anteil. Wegen der vorgenommenen Linearisierung der Differentialgleichungen kann man beide Anteile getrennt berechnen und überlagern. Man kann also einen unendlich dünnen, gewölbten Flügel sowie einen auftriebslosen Flügel mit symmetrischen Profilen für sich betrachten. In einer vorausgehenden Arbeit des Verf. [J. aer. Sci. 18, 75 (1951)] ist gezeigt worden, daß der Widerstand des reibungslosen Flügels dann ein Minimum ist, wenn bei Überlagerung der induzierten Strömungsfelder eines von vorn und von rückwärts angeblasenen Flügels der Abwind an allen Stellen der Flügelfläche konstant ist. Die Strömungsgeschwindigkeiten, aus denen der Widerstand bestimmt werden kann, werden als Lösungen der linearisierten Potentialgleichung durch eine Integraldarstellung von Quellverteilungen gewonnen. Eine hinreichende Bedingung für konstanten Abwind ist dann gegeben, wenn auch bei einem schrägen Schnitt des Flügels die Auftriebsverteilung immer elliptisch ist. Der einfachste Fall liegt offenbar dann vor, wenn der Auftrieb bei elliptischer Grundrißfläche gleichförmig verteilt ist. Man erhält dann für den Widerstandsbeiwert die Formel:

$$c_w = \sqrt{M^2 - 1} \cdot c_a^2 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi A'}\right)^2},$$

wobei $A' = \sqrt{M^2 - 1} \cdot A$ und A das Seitenverhältnis ist. Wenn A' sehr klein ist, verschwindet der Anteil des Wellenwiderstandes, und man erhält wieder die bekannte Formel $c_w = c_a^2 / \pi A$, die für inkompressible Strömung gültig ist. Ähnliche Formeln werden auch für den schiebenden elliptischen Flügel abgeleitet und graphisch für verschiedene Achsenverhältnisse und Schiebewinkel dargestellt. — Die Berechnung des geringsten durch die Flügeldicke hervorgerufenen Widerstandes geht völlig analog vor sich und wird nur im Ergebnis mitgeteilt, und zwar für die beiden Fälle des Flügels von gegebenem Volumen und von gegebener Stirnfläche. W. Wuest.

Pai, S. I.: On the flow behind an attached curved shock. J. aeronaut. Sci. 19, 734–742 (1952).

Es wird die stationäre ebene oder axialsymmetrische Strömung um ein Hindernis mit Ausbildung einer anliegenden, mäßig gekrümmten Kopfwellen theoretisch untersucht (ohne Reibung und Wärmeleitung). Die gesuchte Strömung wird durch zwei Funktionen $\psi(x, y)$ und $S(\psi)$ beschrieben (x, y = Koordinaten, ψ = Stromfunktion, S = Entropie). $\psi(x, y)$ ist zu bestimmen aus einer Differentialgleichung der Gestalt $D_2\psi = \omega \cdot D_1\psi$; hier sind D_2 und D_1 Differentialoperatoren 2. bzw. 1. Ordnung; D_2 ist quasilinear, die Wirbelstärke ω ist durch $dS/d\psi$ ausdrückbar. Die Lösung wird als $\psi = \psi_0 + \psi_1 + \dots$ angesetzt; hier ist ψ_0 eine isentropische Grundlösung (für Keil bzw. Kegel), und jedes ψ_n gehorcht einer linearen Differentialgleichung. Weiter ist $\psi_1 = \psi_{10} + \psi_{11}$, wo ψ_{10} wirbelfrei ist und die richtige Profilbedingung erfüllt (und damit die Stoßlinienform bestimmt), während ψ_{11} dem geraden Grundprofil entspricht, aber die aus der Stoßlinienkrümmung folgende ω -Verteilung berücksichtigt. — Die Fälle $M \geq 1$ (D_2 hyperbolisch bzw. elliptisch) sind getrennt zu behandeln. Beide werden für ebene Strömung weitgehend analytisch durchgeführt. An gewissen singulären Stellen versagt das Verfahren. — Die Problemstellung ist etwas allgemeiner als bei Chu (dies. Zbl. 46, 196); die Methoden sind verwandt. F. Wecken.

Krzywoblocki, M. Z. E.: On the equations of isotropic turbulence in magnetohydrodynamics of compressible medium. Acta phys. Austr. 6, 157–166 (1952).

Turbulente Bewegungen unter dem Einfluß magnetischer Kräfte haben neuerdings für die Untersuchung kosmischer Probleme Interesse gewonnen. Verf. erweitert die von Batchelor und Chandrasekhar (1950) für den inkompressiblen Fall aufgestellten Grundgleichungen auf kompressible Medien, wobei Zähigkeit und elektrische Leitfähigkeit, nicht aber die Strahlungsenergie berücksichtigt werden. Er erhält so ein System von sechs verallgemeinerten Grundgleichungen für die Fortpflanzung der entsprechenden Korrelationsfunktionen. Einige Bemerkungen über die weitere Behandlung dieser Gleichungen werden für eine folgende Veröffentlichung angekündigt. W. Wuest.

Ursell, F.: Edge waves on a sloping beach. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 79–97 (1952).

Am mechanischen Beispiel der Schwerewellen in einem Kanal konstanter Breite wird versucht, die Natur der nach der Theorie kleiner Schwingungen auftretenden Eigenfrequenzen aufzuklären. In reibungsloser Flüssigkeit ist bei endlicher Länge und konstanter Kanaltiefe das Spektrum diskret, bei unendlicher Länge dagegen kontinuierlich, während bei unendlicher Länge und veränderlicher Tiefe ein gemischtes Spektrum zu erwarten ist. Ein gemischtes Spektrum tritt bei dreidimensionaler Strömung gegen die schräg abfallende Küste am Ende eines

halbunendlichen Kanals auf. Die diskrete Frequenz der Stokesschen Uferwelle (edge wave) liegt hier außerhalb des kontinuierlichen Spektrums; ob die Theorie der Schwerewellen ein Beispiel einer im kontinuierlichen Spektrum eingebetteten diskreten Frequenz liefert, ist noch nicht bekannt. Die Zähigkeit hat einen Einfluß auf das Frequenzband nahe der Grenzfrequenz (cut-off frequency) des kontinuierlichen Spektrums. Versuche in einem Wasserkanal zeigen, daß Resonanz bei der Stokes- und Grenzfrequenz auftritt, welche beide Uferwellen darstellen. Es bleibt die Frage offen, ob die Uferwellen mit den Brandungsschlägen gleichgesetzt werden können und ob die lineare Störungstheorie überhaupt zur Deutung der Erscheinungen ausreicht.

J. Pretsch.

Taylor, Sir Geoffrey: Analysis of the swimming of long and narrow animals. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 214, 158—183 (1952).

Aus photographischen Aufnahmen der Schwimmbewegung langgestreckter schmaler Tiere (Aale) scheint zu folgen, daß das Tier Wellen seitlicher Verdrängung erzeugt, die stromab wandern. Unter der Annahme, daß diese Wellen konstante Länge, Amplitude und Geschwindigkeit besitzen, werden die Seiten- und Längskräfte an einem glatten biegsamen Zylinder als „Schwimmdiagramm“ berechnet. Bei bestimmter Form der Oberflächenrauigkeit des Tieres bewirken stromauf ausgesandte Wellen den Vortrieb, wie Aufnahmen an Nereis diversicolor bestätigen.

J. Pretsch.

Elektrodynamik. Optik:

Hoffmann, Banesh: The energy momentum tensor in Dirac's new electromagnetic theory. Nature 170, 1126 (1952).

Iskraut, R. W.: Angular momentum in Dirac's new electrodynamics. Nature 170, 1125—1126 (1952).

• **Sommerfeld, A.:** Electrodynamics. Transl. by E. G. Ramberg. (Lectures on theoretical physics, vol. 3). New York: Academic Press 1952. XIII. 371 p. \$ 6,80.

Miller, M. A.: Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen auf einer ebenen Fläche mit anisotropen, homogenen Randbedingungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 571—574 (1952) [Russisch].

Lysanov, Ju. P.: Zur Frage der Streuung der elektromagnetischen Wellen an einer rauen Oberfläche. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 87, 719—722 (1952) [Russisch].

Bertolini, F.: Sulla capacità di un condensatore sferico. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 852—854 (1952).

Holmberg, B.: A remark on the uniqueness of the potential determined from the asymptotic phase. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 597—604 (1952).

Teichmann, T.: Completeness relations for loss-free microwave junctions. J. appl. Phys. 23, 701—710 (1952).

Es werden zwei „Summenregeln“ für die frequenzunabhängigen Koeffizienten aufgestellt, die in der Leitwertmatrix einer verlustfreien Abzweigung im Zuge eines Hohlleiters auftreten. Mit Hilfe solcher Matrizen wird ein Zusammenhang zwischen den Strömungen und Spannungen, bzw. den führenden elektrischen und magnetischen Feldvektoren hergestellt. Diese Methode, die Wirkung von Abzweigungen zu berechnen, ist das elektromagnetische Analogon zu dem Matrizenformalismus in der Theorie der Kernreaktionen. Die Summen erstrecken sich über die verschiedenen Eigenwellen der Hohlleiter, die in das Abzweigungsstück eintreten, und über die verschiedenen Eigenwellenlängen des Hohlraums, den das Abzweigungsstück selbst vorstellt. Die gewonnenen Ergebnisse werden dazu benutzt, die Wirkung der höheren Eigenwellen auf die Matrix abzuschätzen.

H. Buchholz.

Haacke, Wolfhart: Ein Stabilitätskriterium für Schwingungen in n -fachen Netzen mit pulsierenden Parametern. Arch. elektr. Übertragung 6, 515—519 (1952).

Verf. hebt die Einschränkung seiner früheren Arbeit über die freien Schwingungen in n -fachen Netzwerken mit pulsierenden Parametern (dies. Zbl. 46, 428), daß alle Kapazitäten (bzw.

Induktivitäten) mit demselben Gesetz periodisch veränderlich sein mußten, in der Weise auf, daß jetzt daneben auch konstante Schwingungskreise zugelassen sind. Für diese allgemeineren Netze werden die Bedingungen angegeben, wann die freien Schwingungen bei kleinen Anfangsamplituden mit der Zeit unbeschränkt wachsen und wann sie beschränkt bleiben. Da der früher benutzte Weg der Entkopplung des die Schwingungen beschreibenden Differentialgleichungssystems unter den jetzigen Bedingungen nicht mehr gangbar ist, benutzt Verf. nach Umformung der Schwingungsgleichung Ergebnisse seiner Arbeiten über die Stabilität eines Systems von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten, die von Parametern abhängen [Math. Z. 56, 65–79, 57, 34–45 (1952)]. Hierzu führt Verf. die Rechnungen unter der einschränkenden Annahme durch, daß die Schwankung eine gerade Funktion der Zeit ist. Aus den Wurzeln einer algebraischen Gleichung — „Stabilitäts-gleichung“ — lassen sich bei allgemeinen Anfangsbedingungen die Schwankungsfrequenzen α angeben, die mindestens in einer Masche unbeschränkt aufzuschaukelnde Schwingungen nach sich ziehen. Bei speziellen Anfangsbedingungen ist aber auch in diesem instabilen Fall Beschränktheit von Lösungen möglich. — Ein Konvergenzkreis wird angegeben, innerhalb dessen die Lösungen als Potenzreihen der mittleren Schwankungsamplituden τ konvergieren. Der Fall zweier gekoppelter Schwingungskreise wird näher untersucht. — Verf. betrachtet ungedämpfte Schwingungskreise und berücksichtigt eine Ohmsche Dämpfung wiederum nur „qualitativ“.

O. Emersleben.

Dänzer, H.: Über elektrische und akustische Einschwingvorgänge. Ann. der Phys., VI. F. 10, 395–412 (1952).

Bei den experimentellen Untersuchungen der Eigenschwingvorgänge von Orgelpfeifen hatten F. Trendelenburg und Mitarbeiter gefunden, daß im Einschwingvorgang vorübergehend Teiltöne auftreten, die nicht harmonisch zum stationären Grundton liegen. Die vorliegende Arbeit gibt eine Theorie dieser Erscheinungen, die an Hand eines elektrischen Ersatzschaltbildes (Rückkopplungsschaltung) für das akustische System ausgeführt wird. An den Schwingungskreis ist eine (dem Pfeifenrohr entsprechende) Lecherleitung angekoppelt; die an ihm liegende Spannung $V(t)$ ist darstellbar durch das Fourierintegral

$$V(t) = \int_{-\infty}^t J(t') \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \Re(p) e^{p(t-t')} dp dt',$$

wo $J(t)$ der zugeführte Strom, $\Re(p)$ die Impedanz des Kreises, $p = i\omega$ und ω die Frequenz ist. Wegen der Rückkopplung ist J eine Funktion $J = G\{V\}$, womit sich eine Integralgleichung für $V(t)$ ergibt. Ist $G\{V\}$ linear, gleich Rückkopplungsfaktor θ mal Steilheit S der Rückkopplungsröhre mal V , dann erhält man aus der Integralgleichung die Eigenschwingungen des Systems durch den Ansatz $V = Ae^{Pt}$ und findet die möglichen P aus $\Re(P) = 1/\theta S$. Diejenigen Wurzeln P_v dieser Gleichung, für welche $\text{Re } P_v > 0$, entsprechen angefachten Schwingungen. Durch Anpassung der allgemeinen Lösung $V(t) = \sum_p A_p e^{P_v t}$ an geeignete Anfangsbedingungen

ergeben sich auch die A_p . Diese Rechnungen werden für das untersuchte Problem der Orgelpfeifen im einzelnen durchgeführt und ergeben, daß die Eigentöne — die i. a. nicht harmonisch liegen — bis zu einer gewissen oberen Frequenzgrenze angefacht werden. Die Erklärung des Wiederabklingens der Eigentöne und die Erreichung eines stationären Zustands erfordert die Berücksichtigung der in Wahrheit nicht-linearen Funktion $G\{V\}$. Verf. untersucht diese Phasen des Vorgangs mehr qualitativ für zwei idealisierte Kennlinien $J = G\{V\}$.

A. Schock.

Vasseur, Jean Pierre: Diffraction des ondes électromagnétiques par des ouvertures dans les écrans plans conducteurs. Ann. de Physique, XII. Sér. 7, 506–563 (1952).

Um die Beugung elektromagnetischer Wellen an ebenen, idealleitenden Schirmen zu behandeln, werden die Kirchhoff-Formeln der elektromagnetischen Beugungstheorie mit Hilfe fiktiver elektrischer und magnetischer Flächenbelegungen hergeleitet sowie die Integralgleichungen für die Beugung elektromagnetischer Wellen am ebenen Schirm angegeben. Die verschiedenen möglichen Formeln der Kirchhoffschen Theorie werden mit einem Experiment verglichen, bei welchem die Streuung an einer kreisförmigen Öffnung auf der Achse beobachtet wird. Die Übereinstimmung ist für nicht zu kleine Öffnungen gut, jedoch mäßig, wenn die Öffnung einen Radius kleiner als die Wellenlänge hat. Man müßte daher für so kleine Öffnungen die Integralgleichung numerisch auswerten.

Walter Franz.

• **Schelkunoff, Sergei A. and Harald T. Friis: Antennas: Theory and practice.** (Appl. Math. Series.) New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952. 639 p. \$ 10,00.

Das Buch ist hauptsächlich für Studenten der Radiotechnik geschrieben und setzt ledig-

lich Kenntnisse aus der Experimentalphysik und der Infinitesimalrechnung voraus. Verff. sagen ganz richtig, daß man konstruktionsmäßige Einzelheiten von Geräten am besten durch Übungen im Labor kennenlernt und daß ein Lehrbuch für Studierende daher vor allem die theoretischen Grundlagen erklären soll. Ein Verständnis der theoretischen Grundlagen ist ja auch nötig, um durch Studium von Zeitschriftenartikeln den wissenschaftlichen Fortschritt zu überblicken. — Das Buch wird dieser Problemstellung nicht voll gerecht, da die vorausgesetzten und entwickelten mathematischen Hilfsmittel nicht immer ausreichen, um die mathematisch oft nicht leichten Spezialarbeiten und Zeitschriftenartikel zu verstehen. So wird z. B. von einer Verwendung der Funktionentheorie ganz abgesehen. Auch die Art der mathematischen Entwicklungen ist i. allg. nicht die, die nun einmal bei schwierigeren theoretischen Arbeiten üblich ist. Es wird nämlich möglichst alles unter starker Betonung der Anschauung abgeleitet, was ja an sich zu begrüßen wäre. Doch weiß jeder Theoretiker, daß eine derartige Betrachtungsweise eben auch ihre (individuell verschiedenen) Grenzen hat. — Andererseits kann das Buch als ausgezeichnete Einführung in das Gebiet gelten, und die abgeleiteten Formeln dürften für die meisten Zwecke der konstruktiven Praxis genügen. Sehr angenehm ist es, daß auf den ersten 60 Seiten unter Verwendung besonders vieler Abbildungen ein sehr instruktiver Überblick über den Gegenstand gebracht wird. Der Leser weiß danach, was die nächsten Kapitel nunmehr im Detail bringen. — Alles in Allem: Ein bei stärkerer Beschränkung der mathematischen Hilfsmittel und Methoden didaktisch hervorragend geschriebenes Buch. P. Urban.

● Schelkunoff, Sergei A.: *Advanced antenna theory.* (Appl. Math. Series.) New York: John Wiley and Sons, Inc. 1952. 216 p. \$ 6,50.

Seit den Tagen von Hertz ging bis etwa zu den 30iger Jahren dieses Jahrhunderts die Berechnung der Strahlungseigenschaften von Antennen von einer vorgegebenen Verteilung des Antennenstromes auf dem Antennenleiter aus. Die Auswahl des Verteilungsgesetzes erfolgte teils auf Grund plausibler physikalischer Überlegungen, teils auf Grund von Rechnungen mehr überschläglicher Natur. Physikalisch gesehen wertete diese Näherungstheorie den Antennenleiter nicht als ein Gebilde, das aus metallischen Leitern besteht, an deren Oberflächen die Komponenten der elektrischen Feldstärke gewissen Bedingungen unterworfen sind, sondern auf die einfachste mögliche Art als stofflose Wirbelfäden des magnetischen Feldes. Bei den großen und mittleren Wellenlängen arbeitete dieses Drang- und Zwangverfahren durchaus befriedigend. — Mit dem Vordringen der Kurzwellentechnik wurde es jedoch von dem angegebenen Zeitpunkt an eine immer dringlichere Aufgabe, die Antennentheorie auf eine besser fundierte Grundlage zu stellen. Das Neuartige dieser strengeren Betrachtungsweise des Antennenproblems bildete die Erkenntnis, daß es sich beim Antennenproblem, streng genommen, um ein Eigenwertproblem von allerdings recht verzwicktem Charakter handelt, dessen Lösung dann ganz von selbst u. a. auch über die Stromverteilung in den Antennenleitern Auskunft liefert. Diese Einsicht hatte sich zwar in einzelnen Köpfen schon wesentlich früher ausgebildet, sie wurde aber erst zu der angegebenen Zeit allgemeineres Erkenntnisgut. Zugleich fallen in diese Zeit auch die ersten Arbeiten des Schweden Hallén, in denen die Behandlung dieses speziellen Eigenwertproblems erfolgreich bis zur numerischen Auswertung vorgetrieben wurde. Das hauptsächlichste mathematische Rüstzeug der Methode Halléns bildet die Theorie der Integralgleichungen. Der an diesem speziellen Problemkreis mathematisch interessierte Leser findet alles Wesentliche über diesen Sektor der modernen Antennentheorie von der Problemstellung bis zur Herstellung der Lösung in den Kapiteln 4 und 5 des vorliegenden Buches. Sie beziehen sich auf die Herleitung der maßgebenden Integralgleichungen und auf die spezielle Anwendung bei Zylinderantennen. — In anderer Richtung wurde die Antennentheorie von dem Verf. des Buches weiterentwickelt. Diese Weiterentwicklung trägt in ihrem methodischen Charakter deutliche Spuren der fast gleichzeitig neu in Gang kommenden Hohlleitertheorie. Nach der Auffassung Schelkunoffs kann nämlich das von einer Antenne abgestrahlte elektromagnetische Feld wie im Hohlleiter als das Resultat der Überlagerung einer einfachen oder gar mehrfach unendlichen Zahl von Eigenwellen angesehen werden. Das Leitergebilde ist hier allerdings nicht nach außen abgeschlossen wie beim Hohlleiter oder wie beim Hohlraumresonator, sondern im wesentlichen offen und wird nur von den beiden Antennenleitern begrenzt, die als kegelförmige Keulen aufgefaßt werden. Die endliche Länge dieser Keulen verlangt dann überdies die Aufteilung des Strahlungsraumes in zwei Teile: einen innen liegenden kegelförmigen Bereich, dessen Größe durch die Endquerschnitte der beiden Keulen festgelegt ist, und den außerhalb davon gelegenen unbegrenzten Raum. Dieser Theorie der Antennen als Wellenleiter ist hauptsächlich das zweite Kapitel des Buches gewidmet. Das 1. Kapitel, das von Kugelwellen handelt, dient vornehmlich der Einführung und Vorbereitung der folgenden Teile des Buches. In ihm kommen auch die grundlegenden Voraussetzungen für die späteren Rechnungen zur Sprache. — Das 3. Kapitel des Buches über die „Sphäroid-Antennen“ bespricht als weitere Lösungsmöglichkeit des Antennenproblems die in der theoretischen Physik seit langem bekannte Methode, ein Randwertproblem durch Verwendung eines geeigneten, krummlinigen und orthogonalen Koordinatensystems anzupacken, wobei sich eine der drei Flächenscharen des Koordinatensystems möglichst vollkommen der Oberfläche des Antennenleiters anpaßt. — Schließlich kommen noch im 6. Kapi-

tel die natürlichen Schwingungen einfacher Leitergebilde zur Sprache, wie z. B. die natürlichen Schwingungen eines dünnen Drahtes. Hier handelt es sich um Schwingungen, die nicht durch äußere Kräfte den Leitern aufgezwungen werden. — Am Schluß werden in dem Buch 44 sehr lehrreiche Aufgaben aus der Antennentheorie formuliert, und im Anhang werden die wichtigsten Integrale der Antennentheorie zusammengestellt und einige Zahlentafeln über die Strahlungsimpedanz gebracht. — Sowohl der allein mathematisch interessierte Leser als auch der theoretisch interessierte Ingenieur werden das Buch in jedem Falle mit großem Gewinne lesen. Da fast die gesamte bisherige Literatur über diesen Gegenstand bis in die jüngste Zeit hinein in den einzelnen Abschnitten ihren Niederschlag gefunden hat, erlaubt sie es überdies dem Leser, sich auf die bequemst mögliche Art einen vollständigen Einblick in die bisher erarbeiteten Erkenntnisse und die dabei angewendeten Methoden zu verschaffen.

H. Buchholz.

King, Ronold: Theory of electrically short transmitting and receiving antennas. J. appl. Phys. 23, 1174—1187 (1952).

Auf Grund der dafür geltenden Integralgleichung wird die Stromverteilung auf elektrisch kurzen Sende- und Empfangsantennen von einer Länge h berechnet, für die $2\pi h/\lambda_0 \leq 1$ ist. Die Lösung der von Hallén angegebenen Integralgleichung erfolgt durch Iteration nach dem Verfahren von King-Middleton, und es lassen sich auf diese Weise schon bei alleiniger Berücksichtigung von Störungsgliedern 1. Ordnung zuverlässige Ergebnisse erzielen. Der Gegenstand der Berechnungen in der Arbeit sind die zur Spannung in Phase und in Phasenquadratur stehenden Stromkomponenten sowie die Impedanzen und die effektive Länge der Antenne. Bei der Lösung 1. Ordnung tritt der größte Fehler bei der Berechnung des Widerstandes auf. Nach dem gleichen Verfahren werden unter Berücksichtigung der Störungsglieder 2. Ordnung genauere Impedanzwerte in dem größeren Bereich $0 \leq 2\pi h/\lambda_0 \leq 1,4$ berechnet.

H. Buchholz.

Dunbar, Allen S.: On the theory of antenna beam shaping. J. appl. Phys. 23, 847—853 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Strahlungsintensität, die beim Durchtritt einer elektromagnetischen Welle durch eine Öffnung in einer ebenen Wand hinter dieser auftritt. Dabei wird nach den beiden Fällen unterschieden, daß entweder die Phasenfunktion gleichförmig oder die Amplitudenfunktion der Welle gegeben ist. Die Berechnungsmethode stellt eine Weiterentwicklung eines zuerst von Chu entwickelten Verfahrens dar. Sie wird allgemein formuliert. Die theoretischen Ergebnisse werden auch experimentell überprüft.

H. Buchholz.

Knudsen, L. Lottrup: On the calculation of some definite integrals in antenna theory. Appl. sci. Research, B 3, 51—68 (1952).

Berechnet man den gegenseitigen Strahlungswiderstand zweier linearer Antennen nach einer älteren Arbeit des Verf. mittels des Poyntingschen Vektors, was gewisse formale Vorteile bietet, so treten dabei häufig Integrale auf, die recht schwierig auszuwerten sind. Dieser Schwierigkeit entgeht man, wenn man den Strahlungswiderstand nach der EMK-Methode berechnet. Die Gegenüberstellung beider Berechnungsverfahren liefert die Möglichkeit, gewisse bestimmte Integrale von schwierigem Aufbau durch bekannte Funktionen auszudrücken.

H. Buchholz.

Twersky, V.: On a multiple scattering theory of the finite grating and the wood anomalies. J. appl. Phys. 23, 1099—1118 (1952).

Verf. untersucht den Einfluß der Mehrfachstreuung auf die Beugung einer ebenen Welle an einem endlichen Gitter paralleler Zylinder oder entsprechender Halbzylinder auf einer unendlichen idealleitenden Ebene. Es zeigt sich, daß für Transmissionsgitter beide Polarisationsrichtungen beträchtliche Effekte der Mehrfachstreuung aufweisen können. Beim Reflexionsgitter sind die Effekte stärker, wenn der elektrische Vektor senkrecht zu den Gitterelementen schwingt. Fällt eine Beugungsordnung in die Gitterebene, dann wird der Einfluß der Mehrfachstreuung besonders ausgeprägt. In diesem Falle laufen in beiden Richtungen Wellen an dem Gitter entlang und führen dazu, daß die zugehörige Wellenlänge in den abgestrahlten Beugungsordnungen mit einer um ein Mehrfaches verstärkten Intensität auftritt. Umgekehrt wird die Intensität bis auf ein Viertel vermindert für solche Wellenlängen, für welche eine das Gitter entlanglaufende Welle zwei aufeinanderfolgende Gitterelemente mit entgegengesetzter Phase trifft. Damit erhält Verf. die Theorie der von Wood im Jahre 1902 entdeckten „Gitteranoma-

lien“. Die genaue Lage und Gestalt dieser hellen und dunklen Bänder in den Beugungsspektren werden vom Verf. untersucht. Dabei zeigt sich insbesondere, daß die hellen Streifen sehr schmal sind. Bereits für ein Gitter von 20 Elementen ergeben sich Breiten von weniger als 1 Grad. Die quantitativen Ergebnisse werden für eine größere Anzahl von Beispielen graphisch wiedergegeben.

Walter Franz.

Staras, Harold: Scattering of electromagnetic energy in a randomly inhomogeneous atmosphere. J. appl. Phys. 23, 1152—1156 (1952).

Für einen räumlich und zeitlich gering variierenden Brechungsindex ε wird die Wellengleichung durch Störungsrechnung gelöst. Der erste Störungsterm gibt die gestreuten Felder (§ und §) und daraus die gestreute Energie als räumliches Doppel-Integral (6 Koordinaten). Für ihren zeitlichen Mittelwert tritt die zeitliche Korrelationsfunktion von $\varepsilon_i/\varepsilon_0$ unter dem Integranden auf. Vier naheliegende Annahmen für die Korrelationsfunktion führen für die gestreute Energie auf sehr beträchtliche Unterschiede, vor allem wenn die „Skala“ (Längenparameter der Korrelationsfunktion) groß gegen die Wellenlänge ist. — Abgesehen davon sind die Endformeln formal mit denen von Booker und Gordon [Proc. Radio Engs. 38, 401 (1950)] identisch; deren Herleitung aus einer rein räumlichen Variation von ε wird jedoch abgelehnt.

K. Rawer.

Gibbons, J. J. and R. L. Schrag: A method of solving the wave equation in a region of rapidly varying complex refractive index. J. appl. Phys. 23, 1139—1142 (1952).

Aus der Wellengleichung:

$$\pi'' - (R + jI)\pi = 0$$

erhält man über die Substitution: $\pi = z \cdot e^{jQ}$ die Integro-Differentialgleichung: $\frac{z''}{z} - \left[\frac{1}{z^2} \int I z^2 \cdot dx \right]^2 = R$. Sind R und I numerisch gegeben, so kann die Amplitudenfunktion z durch numerische Integration erhalten werden. Die Ableitung der Phasenfunktion Q ist dann $Q' = \frac{1}{z^2} \int I z^2 dx$. — Die Methode wird für das Beispiel eines Poles des „Brechungsindex“ (R und I am „Pol“ von Größenordnung 10^9) durchgeführt. Man erhält Amplitude, Phase und den Reflexionskoeffizienten (0,983). Zur numerischen Berechnung mußte eine elektronische Rechenmaschine benutzt werden.

K. Rawer.

Middleton, David: On the distribution of energy in noise- and signal-modulated waves. I. Amplitude modulation. Quart. appl. Math. 9, 337—354 (1952).

Es wird die Energieverteilung für geräusch- und signalmodulierte Sinuswellen untersucht und zwar für: I. Eine Trägerwelle, die mit Zufallsgeräusch moduliert ist und II. eine Trägerwelle, die durch ein Signal und durch Geräusch moduliert ist. Die Berechnung des Energiespektrums $W(f)$ erfolgt mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion $R(\tau)$, die für $\tau \rightarrow 0$ die mittlere totale Energie der Welle liefert. Dabei wird berücksichtigt, daß bei Übermodulation keine negativen Werte auftreten, sondern der Strom den Wert Null annimmt (wie z. B. bei einem Elektronenrohr). Das Zufallsgeräusch ist als stationär und ergodisch angenommen und sein Energiespektrum als gaußisch, $W_n(f) = W_0 \exp[-\omega^2/\sigma^2]$. Im Fall I. ergibt sich statt der Spektrallinie ω_0 der Trägerfrequenz ohne Störung eine Glockenkurve der spektralen Verteilung der Leistung. Die Verbreiterung geht jedoch mit wachsender mittlerer Geräuschintensität nur bis zu einer bestimmten oberen Größe und ist nicht sehr erheblich. Mit wachsender mittlerer Geräuschintensität nimmt die gesamte mittlere Leistung zu, aber ebenfalls der Teil, der dem kontinuierlichen Spektrum entspricht, als auch die Leistung, die der Spektrallinie der Trägerfrequenz entspricht. Im Falle II werden die Kurven für die totale Leistung, für den Leistungsanteil des kontinuierlichen Spektrums und für die Spektrallinie des Trägers angegeben. Bei Übermodulation (Stromlücken) wird die Signalleistung in diskrete periodische Terme aufgespalten, die eine Verzerrung des Signals bedeuten. Es treten dann im Spektrum neben der Trägerfrequenz f_0 noch Linien ($f_0 \pm k f_a$) auf, wo f_a die Modulationsfrequenz bedeutet $k = 1$ normale Seitenbänder, $k > 1$ Verzerrungen.

W. O. Schumann.

Hopkins, H. H.: The wave aberration associated with skew rays. Proc. phys. Soc., Sect. B 65, 934—942 (1952).

Aus einem an beliebigen Flächen gebrochenen oder reflektierten Strahlenbündel werden zwei im allgemeinen windschiefe Strahlen herausgegriffen, deren einer etwa der zum Hauptstrahl

erklärte Strahl des Bündels sein kann; gesucht ist beispielsweise die vom Durchstoßpunkt D_P des Hauptstrahls mit der Bildfläche aus gezählte Wellenverbiegung des anderen Strahls (d. i. der auf diesem Strahl gemessene optische Abstand zwischen derjenigen Wellenfläche des Strahlenbündels, die den Durchstoßpunkt D_o des Hauptstrahls mit der Austrittspupille enthält, und der durch D_P gehenden Kugel um D_B). Solche Aufgaben werden zurückgeführt auf die Bestimmung der auf einen „invarianten Brennpunkt“ F bezogenen Wellenverbiegung des zweiten Strahls gegenüber dem ersten (d. i. der auf dem 2. Strahl gemessene optische Abstand zwischen der Wellenfläche, die den 1. Strahl in irgendeinem Punkt P trifft, und der durch P gehenden Kugel um F); ein invarianter Brennpunkt ist ein Punkt, auf den bezogen die Wellenverbiegung für alle Wellenflächen (also unabhängig von der Wahl von P) den gleichen Wert hat. Es gibt zu jedem Strahlenpaar unendlich viele invariante Brennpunkte F , und die Wellenverbiegung hat den gleichen Wert für alle Bezugspunkte F . Der Zuwachs dieser (gegenüber P und F invarianten) Wellenverbiegung bei einer Brechung oder Reflexion wird in einfacher Weise ausgedrückt durch die aus der Durchrechnung beider Strahlen sich ergebenden Daten (Richtungskosinus vor und hinter der brechenden oder reflektierenden Fläche, Koordinaten der Durchstoßpunkte).

H. Marx.

Weinstein, W.: Iterative ray-tracing. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 731—735 (1952).

Ein von T. Smith [Proc. phys. Soc., Sect. A **57**, 286 (1945)] angegebenes Iterationsverfahren, zur Durchrechnung windschiefer Strahlen durch rotationssymmetrische optische Systeme mit sphärischen und asphärischen Flächen, besitzt eine Konvergenz 1. Ordnung. Nach D. R. Hartree (dies. Zbl. **33**, 190) betrachtet man den nach irgendeinem Schritt einer Iteration noch vorhandenen Fehler ε' einer gesuchten Größe als Funktion des Fehlers ε nach dem vorausgegangenen Schritt, und man denkt sich ε' als Potenzreihe nach ε entwickelt: $\varepsilon' = c_1 \cdot \varepsilon + c_2 \cdot \varepsilon^2 + \dots$; ist nun c_n der erste von Null verschiedene Koeffizient dieser Reihe: $\varepsilon' = c_n \cdot \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1})$, so bezeichnet man nach Hartree die Iteration als von n -ter Ordnung. — Verf. gibt ein Iterationsverfahren zur Strahldurchrechnung an, das eine Konvergenz 2. Ordnung besitzt. Diese Konvergenz erreicht er dadurch, daß er beim Übergang eines Strahles zur nächsten Fläche den Schnittpunkt des Strahls mit der Ebene aufsucht, welche die Fläche in dem beim vorausgegangenen Iterationsschritt gefundenen Durchstoßpunkt tangiert, und daß er von diesem Schnittpunkt aus auf einer achsenparallelen Geraden zu der Fläche übergeht; in entsprechender Weise wie die Übergangsformeln werden auch die Brechungsformeln umgeformt. Legt man dem ersten Iterationsschritt Näherungswerte aus einer paraxialen Durchrechnung zugrunde, so liefert der erste Iterationsschritt alle Aberrationen bis zur 5. (Bildfehler-)Ordnung einschl., der zweite Schritt alle Aberrationen bis zur 13. Ordnung einschl., allgemein der N -te Schritt alle Aberrationen bis zur Ordnung $(2^{N+2} - 3)$ einschl. Ref. schätzt mit dieser Zuordnung der einzelnen Iterationsschritte zu den Bildfehler-Ordnungen die Konvergenz der Iteration noch sehr viel besser ein als der Verf. selbst, der durch ein Versehen nur zu dem Schluß kommt, sein Iterationsverfahren liefere beim ersten Schritt die Aberrationen 3. Ordnung (primary aberrations), beim zweiten Schritt dazu die Aberrationen 5. Ordnung (secondary aberrations), allgemein beim N -ten Schritt alle Aberrationen bis zur Ordnung $(2N + 1)$ einschl. Eine solche Konvergenz liegt nach Ansicht des Ref. bei der Iteration nach T. Smith vor.

H. Marx.

Bremmer, H.: The derivation of paraxial constants of electron lenses from an integral equation. Appl. sci. Research, B **2**, 416—428 (1952).

Die paraxialen Elektronenbahnen werden auf Grund der Liouville-Neumannschen Entwicklung der entsprechenden Integralgleichung bestimmt, wodurch — wie Verf. bemerkt — die Zahl der auszuführenden Quadraturen gegenüber der Methode der sukzessiven Annäherung auf die Hälfte reduziert wird. Aus den Bahnen werden Vergrößerung und Brennpunktslagen sowie die oskulierenden Kardinal-elemente berechnet. (Eine partielle Integration bei der Methode der successiven Approximation bewirkt die gleiche Reduktion in der Zahl der Quadraturen, wie bereits öfters bemerkt wurde. Beide Verfahren werden so identisch. Anm. d. Ref.)

W. Glaser.

Relativitätstheorie:

● Laue, M. v.: Die Relativitätstheorie. 1. Band: Die spezielle Relativitätstheorie. (Die Wissenschaft. Band 38.) Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn 1952. 198 S. mit 23 Abb. 5., neu bearb. Aufl.

Die erste Auflage dieser berühmten Darstellung der speziellen Relativitätstheorie war 1911 erschienen, die vierte, vorletzte 1923. Nach 40 Jahren kehrt Verf. zu seinem Erstlingswerk zurück, welches jetzt im wesentlichen neu bearbeitet vorliegt. — Verf. beginnt im Kapitel „Problem-

stellung“ eine eingehende Würdigung der Leistungen L. Langes, Inertialsystem und Inertialzeitskala an Stelle von Newtons absolutem Raum und absoluter Zeit gesetzt zu haben. — Von der Diskussion der empirischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie sei hier besonders hervorgehoben: der Versuch von Sagnac und die von Harres und Pogany, die bis 1928 führen, die Theorie des quadratischen Dopplereffektes und Bestätigung der Einsteinschen Zeitdilatation durch die neueren Versuche von Ives und Stievel (1938), Otting (1939), schließlich Resultate der Erforschung der Höhenstrahlung, wie sie Heisenberg 1943 bekannt gegeben hat, in welchen Dilatationsfaktoren vom Wert 10^2 bis 10^3 aus der Lebensdauer von Mesonen nachgewiesen werden. Im Zusammenhang mit dem Problem der Trägheit der Energie erwähnt Verf. die Untersuchungen von Anderson, Blackett, Occhialini und Jessed du Mond aus den Jahren 1932 bis 1949. — In § 6 von Kapitel I beginnen die ersten mathematischen Erläuterungen mit der Diskussion von Minkowskis vierdimensionaler Welt in bekannter Weise. Zwei interessante Beispiele (linearer stromdurchflossener Leiter und zylindrisches Gefäß mit $2N$ Molekeln pro Volumeinheit) zeigen den heuristischen Wert der vierdimensionalen Betrachtungsweise. — Kapitel II behandelt A. Sommerfelds und H. Minkowskis Weltvektoren und Welttensoren und ihre physikalisch wichtigen Realisierungen. Die Darstellung deckt sich im wesentlichen mit der der älteren Auflagen. — Von Kapitel III (Relativitätstheorie und Elektrodynamik des leeren Raumes) seien die §§ 14 und 15 hervorgehoben. Die vierdimensionale Darstellung der elektrischen Wellen in § 14 enthält neu die Theorie der Aberration und des Doppler-Effekts. Auch die Zusammenhänge von quadratischem Dopplereffekt und der Verlangsamung des Uhrenganges bei Bewegung finden sich wieder. Eine eingehende Theorie der Reflexion am bewegten Spiegel und des Wienschen Verschiebungsgesetzes beschließen dieses Kapitel. — Kapitel IV behandelt Minkowskis Elektrodynamik bewegter Körper. Die Grundergebnisse dieser Theorie werden unter der Annahme hergeleitet, daß der Körper eine gleichförmige Translationsgeschwindigkeit besitzt. Demgegenüber handelt es sich bei Versuchen zur Prüfung der Theorie vielfach um rotierende Körper, und Verf. betont entsprechend jeweils die Genauigkeitsgrenzen, innerhalb welcher die Versuchsergebnisse für die Prüfung der Theorie kompetent sind. Als Beispiele elektromagnetischer Prüfungen werden behandelt: der Wilsonsche und der Eichenwaldsche Versuch, als Beispiele optischer Prüfungen der Zeemansche und der Harressche Versuch. Nach einer interessanten Diskussion der Unsymmetrie des Minkowskischen Welttensors T , die Verf. für unvermeidlich hält, leitet die Behandlung der Transformation der Jouleschen Wärme und der Kraftdichte über zum letzten Kapitel des Buches, „Mechanik und Thermodynamik“. Daß sich die klassische Mechanik nicht dem Einsteinschen Relativitätsprinzip anpassen läßt, belegt Verf. bereits durch den Hinweis, daß sie Überlichtgeschwindigkeiten zuläßt. Die Begründung der Dynamik muß mit deformierbaren Körpern versucht werden, denn der Begriff des starren Körpers läßt sich in der Relativitätstheorie nicht aufrechterhalten. Als konkrete Anwendung der Theorie ergibt sich z. B.: ein Glasblock, der — an seiner Doppelbrechung erkennbare — Eigenspannungen enthält, hat eine höhere Ruhenergie und daher auch eine größere Masse als derselbe Block, wenn man die Spannungen durch Ausheizen beseitigt. Weitere interessante Beispiele wie die mechanische Energieübertragung durch ein gespanntes Zugseil oder eine tordierte Welle fallen in die hier entwickelte Theorie. Als weiteres Beispiel behandelt Verf. die adiabatisch-isobare Dynamik und allgemeiner die relativistische Formulierung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik. Weiterhin behandelt Verf. den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik und zuletzt die Hohlraumstrahlung. — Zusammenfassend kann wohl festgestellt werden, daß die Relativitätstheorie in den fast 50 Jahren ihrer Entwicklung, als ein gewichtiges Stück theoretischer Physik beginnend, über eine hochbedeutsame mathematische, ein wenig auch philosophische mittlere Entwicklungsphase hinweg, heute wieder mehr denn je und in diesem in Rede stehenden Buch mehr als in jedem anderen den gleichen Charakter zeigt wie im Anfang, damals das Produkt genialer Forschartätigkeit, heute jedoch zusammen mit den Errungenschaften der Quantentheorie und der jetzt möglich gewordenen technischen Anwendungen eine Triebfeder des ganzen menschlichen Weltgeschehens. — Mit weniger als 30 Jahren schuf A. Einstein die spezielle Relativitätstheorie — sein Bild aus dieser Zeit schmückt das hier besprochene Buch. M. Pini.

Abelé, Jean: *La vitesse, grandeur qualitative, et la mécanique relativiste.* C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1007—1009 (1952).

Verf. schlägt im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie eine neue Definition der Geschwindigkeit vor und will daraus schließen, daß longitudinale und transversale Masse identisch werden. Diese Behauptung wird nicht näher begründet. F. Cap.

Malvaux, Pierre: *Recherche d'une loi intrinsèque de composition des vitesses.* C. r. Acad. Sci., Paris 235, 1009—1011 (1952).

In dieser Arbeit wird die von Abelé (s. vorsteh. Referat) vorgeschlagene neue Definition der Geschwindigkeit mathematisch durchgeführt und insbesondere auf das Additionstheorem der Geschwindigkeiten angewandt. F. Cap.

Pignedoli, Antonio: Sui moti tautocroni del punto materiale veloce. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena **5** (1950—51), 72—82 (1952).

Das Problem der Tautochrone in der speziellen Relativitätstheorie. Eine isochrone gradlinige Bewegung ist unter Einwirkung einer nur von der Lage abhängigen Kraft unmöglich. Es wird die Kraft als Funktion der Lage und der Geschwindigkeit bestimmt, bei der eine isochrone gradlinige Bewegung möglich ist. *G. Hamel.*

Baccarani, Valeria e Franca Rubbiani: Sul problema della brachistocrona per un punto materiale veloce. Atti Sem. mat. fis. Univ. Modena **5** (1950—51), 105—110 (1952).

Das Problem der Brachistochrone wird unter Annahme der speziellen Relativitätstheorie gelöst. Es tritt ein elliptisches Integral auf. *G. Hamel.*

Takeno, Hyôitirô: On the spherically symmetric space-times in general relativity. Progress theor. Phys. **8**, 317—326 (1952).

Es wird eine Methode angegeben, durch welche man die Frage beantworten kann, ob ein in einem beliebigen Koordinatensystem x^a definierter Riemannscher Raum ($g_{\mu\nu}$ irgendwelche gegebene Funktionen von x^a) kugelsymmetrisch ist; d. h. ob man durch Koordinaten-Transformation zu neuen Koordinaten r, θ, φ, t übergehen kann, so daß das Linienelement von der Form $ds^2 = -\alpha(r, t) dr^2 - \beta(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \gamma(r, t) dt^2$ wird. *A. Papapetrou.*

Vaidya, P. C.: The boundary conditions in gravitational fields of spherical symmetry. J. Univ. Bombay, n. Ser. **21**, Nr. 3 (Sci. Nr. 32), Sect. A, 1—7 (1952).

Diskussion über die Kontinuitätsbedingungen, welche von den Komponenten $g_{\mu\nu}$ eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes erfüllt werden müssen, wenn der Materietensor $T_{\mu\nu}$ sich auf einer Kugel diskontinuierlich ändert. *A. Papapetrou.*

Haywood, J. H.: The equations of motion and coordinate condition in general relativity. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 170—175 (1952).

An Stelle der Einsteinschen Koordinatenbedingung

$$\eta^{\alpha\beta} (h_{\mu\alpha} - \tfrac{1}{2} \eta_{\mu\alpha} \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma}),_{\beta} = 0$$

wird die neue Bedingung

$$\eta^{\alpha\beta} h_{\mu\alpha, \beta} = 0$$

betrachtet. Die Bewegungsgleichungen des Zweikörperproblems werden unter Zugrundelegung dieser Bedingung aufgestellt; sie lassen sich durch geeignete Koordinatentransformation aus den auf Grund der ursprünglichen Koordinatenbedingung aufgestellten Gleichungen des Problems herleiten und unterscheiden sich von diesen durch Glieder zweiter Ordnung, die auf die Schwerpunktsbewegung und die Periastronbewegung ohne Einfluß sind. *R. Kippenhahn.*

McVittie, G. C.: A model universe admitting the interchangeability of stress and mass. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **211**, 295—301 (1952).

Es wird versucht, im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie (einschl. kosmologischem Glied) ein kosmologisches Modell plausibel zu machen, das als Universum mit Materieproduktion gedeutet wird. Die Argumentation hat Ref. nicht in allen Punkten überzeugt, insbesondere was die Schlüsse bei der Aufstellung der Zustandsgleichung des Weltsubstrats und bei der Interpretation der näherungsweise Konstanz der Energiedichte (im mitschwimmenden System) im expandierenden Universum als Massenproduktion angeht. *G. Lüders.*

Kursunoglu, Behram: Gravitation and electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. **88**, 1369—1379 (1952).

Es wird eine Abänderung der Einsteinschen unitären Feldtheorie mit unsymmetrischem $g_{\mu\nu}$ vorgeschlagen. Gegenüber der Einsteinschen enthält die Lagrange-Funktion der neuen Theorie einen zusätzlichen Term, wobei ein konstanter Faktor von der Dimension einer Länge als eine neue Fundamentalkonstante auftritt. Die Feldgleichungen werden für den Fall schwacher Felder diskutiert. Es ergibt sich, daß

die in bezug auf den symmetrischen Teil von $g_{\mu\nu}$ linearen Gleichungen neben anderen Termen quadratische Kombinationen der Komponenten des antisymmetrischen Teils $g_{\mu\nu}$ enthalten, die von der Form der Maxwell'schen Spannungs-Energie-Impulstensors sind.

A. Papapetrou.

Quantentheorie:

Jánosy, L.: The physical aspects of the wave-particle problem. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. 1, 423—467 (1952).

Ausgehend von der Forderung nach einer deterministischen und „materialistischen“ Interpretation der Quanteneffekte wird eine sehr sorgfältige Analyse fundamentaler Experimente gegeben. Der auf das Bohrsche Komplementaritätsprinzip basierten Interpretation wird eine andere, obige Forderungen erfüllende Auffassung entgegengestellt. Die „Reduktion der Wellenpakete“ bei einer Messung, welche nach Bohr eine Anpassung des aus früheren Messungen folgenden potentiellen Geschehens an neue Messungen darstellt, wird hier als eine reale plötzliche Konzentration der (jetzt objektive Realität besitzenden) Wellenfunktion durch den Meßapparat gedeutet. Beispielshalber „ist“ ein von einem Atom ausgesandtes Photon eine Kugelwelle, die sich bei einem Photoeffekt an der Stelle des Elektrons konzentriert. Dieses „Aufsaugen“ des Photons durch das Elektron bringt unvermeidlich Überlichtgeschwindigkeiten herein, so daß Verf. auch die spezielle Relativitätstheorie aufzugeben genötigt ist; die Lorentz-Transformation wird nur in ihrer prärelativistischen Deutung (nach Lorentz und Fitzgerald) beibehalten. Außerdem wird, um dem v. Neumann'schen Einwand der Unmöglichkeit verborgener Parameter in der Interpretation der Quantentheorie sowie weiteren Schwierigkeiten zu entgehen, eine Abänderung der Schrödingergleichung durch Zusatz nichtlinearer Terme gefordert. Diese sollen die unerwünschte Interferenzfähigkeit der Teile eines gespaltenen Lichtstrahls langsam zum Abklingen bringen und außerdem bewirken, daß Superpositionen stationärer Zustände langsam in einen bestimmten stationären Zustand übergehen — dies damit sich die wesentlichen formalen Züge der Beschreibung von Meßanlagen gegenüber der Bohrschen Darstellung nicht ändern. — Das Ganze schwebt natürlich in der Luft, solange nicht (wenigstens prinzipiell) Wege angegeben sind, wie man einerseits das „Aufsaugen“ der Wellenfunktionen verstehen, andererseits die geforderten Nichtlinearitäten konstruieren kann. (Für letzteres wird an einem eindimensionalen Beispiel eine versuchsweise Möglichkeit angegeben, von der jedoch nicht gezeigt ist, daß sie den gestellten Anforderungen genügt.) Ob sich das Programm überhaupt widerspruchsfrei durchführen läßt, selbst bei Inkaufnahme des schwerwiegenden Verzichts auf die Relativitätstheorie und der nicht sehr anziehenden Vorstellung des „Aufsaugens“ einer realen Wellenfunktion, ist also nicht erwiesen. — Bedauerlich ist, daß die scharfsinnige Arbeit nicht frei von politisch-polemischen Einschlag ist.

M. R. Schafer.

Moshinsky, Marcos: Diffraction in time. Phys. Review, II. Ser. 88, 625—631 (1952).

Wird ein Teilchenstrom durch einen ebenen Schieber aufgefangen und dieser Schieber zu einem Zeitpunkt plötzlich weggenommen, dann erhält man klassisch jenseits des Schiebers ein plötzlich unstetiges Ansteigen des Partikelstromes. Behandelt man das Problem dagegen mittels der gewöhnlichen Schrödingergleichung, dann erhält man einen allmählichen Anstieg der Intensität mit nachfolgenden allmählich schwächer werdenden Oszillationen, welche sich aus der Cornuschen Spirale ableiten lassen, genau so wie die räumlichen Schwankungen der Intensität bei der Fresnelschen Beugung an der Halbebene. Dieses Phänomen wird vom Verf. als „Diffraction in time“, d. h. zeitliche Beugung, bezeichnet. Ein ähnlicher Abklingvorgang berechnet sich auch mittels der relativistischen Klein-Gordon-Gleichung, jedoch nicht aus der gewöhnlichen optischen Wellengleichung.

Walter Franz.

Bellomo, E. e A. Loinger: Equivalenza fisica dell'equazione di Dirac-Corben con l'equazione di Dirac. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 1240—1241 (1952).

Loinger, A.: Sulle soluzioni dell'equazione di Dirac-Corben. Nuovo Cimento, Ser. IX 9, 855—856 (1952).

Yamamoto, T.: Generalization of analytical spin. Progress theor. Phys. 8, 570—571 (1952).

Schoch, Arnold und Helmut Steinwedel: Zum Energie-Impuls-Tensor linearer klassischer Feldtheorien. Z. Naturforsch. 7a, 66—70 (1952).

Es wird ein Energie-Impulstensor für skalare und vektorielle Felder vom Bopp-

schen Typ untersucht, der aus einer linearen Überlagerung der üblichen Tensoren für Felder mit verschiedenen Massenkonstanten besteht. Die Forderung nach überall verschwindender Divergenz führt auf dieselbe Bedingung wie die Forderung nach Endlichkeit der Feldmasse einer Punktladung. *H. Lehmann.*

Raje, S. A.: Linear meson wave equation in the sitter space. *Progress theor. Phys.* 8, 384—385 (1952).

Kronig, R. and A. Thellung: On the hydrodynamics of non-viscous fluids and the theory of helium II. *Physica* 18, 749—761 (1952).

Die klassische Hydrodynamik wirbelfreier und reibungsfreier kompressibler Flüssigkeiten wird mit feldtheoretischen Methoden behandelt. Die Quantisierung nach dem üblichen Verfahren führt u. a. auf Ergebnisse, die auf weniger durchsichtige Art früher von Landau und Khalatnikov [*Žurn. eksper. teor. Fiz.* 19, 637, 709 (1949)] gefunden worden waren. Anwendung auf die Theorie des He II. *G. Höhler.*

Bueren, H. G. van: On the attraction between a perfectly conducting plate and a thin perfectly conducting cylinder. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B* 55, 493—499 (1952).

Im Anschluß an Untersuchungen von Casimir berechnet Verf. die Anziehung zwischen einem zylindrischen Draht und einer idealleitenden ebenen Platte infolge Änderung der quantenelektrodynamischen Nullpunktsenergie. Der Effekt ergibt sich einige Zehnerpotenzen zu klein, um meßbar zu sein. *Walter Franz.*

Yamazaki, Kazuo: Operator calculus in quantized field theory. *Progress theor. Phys.* 7, 449—468 (1952).

Zur Behandlung der im Feynman-Kalkül auftretenden Produkte von infinitesimalen unitären Transformationen der Form $I + d\lambda H(\lambda)$, wo I der Einheitsoperator ist und im allgemeinen $H(\lambda')$ und $H(\lambda'')$ für $\lambda' \neq \lambda''$ nicht kommutieren, wird ein neuer Operator „Expansional“ eingeführt, definiert durch

$$\text{Exp} \left[\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = I + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Exp}^{(n)} \left[\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right],$$

$$\text{wo} \quad \text{Exp}^{(1)} \left[\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = \int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda)$$

$$\text{und} \quad \text{Exp}^{(n+1)} \left[\int_{\sigma}^{\tau} d\lambda H(\lambda) \right] = \int_{\sigma}^{\tau} d\mu H(\mu) \text{Exp}^{(n)} \left[\int_{\sigma}^{\mu} d\lambda H(\lambda) \right] \quad (n \geq 1)$$

bedeuten. Es werden die Entflechtungsgesetze aufgestellt, nach denen ein Expansional von Argument $H(\lambda) = F(\lambda) + G(\lambda)$ usw. in Produkte von Exp. bzw. exp von F und G usw. aufgespalten (disentangled) werden kann. Zur Anwendung wird ein harmonischer Oszillator, der einer zeitabhängigen Kraft unterliegt und bei dem überdies Masse und Frequenz gegebene Funktionen der Zeit sind, vollständig durchgerechnet. Man kann nach verwickelten, aber übersichtlichen Umformungen zeigen, daß die Transformationsmatrix mit der klassischen Wirkungsfunktion gebildet ist. Potentiale mit höheren Potenzen der Raumkoordinaten als der zweiten und das Coulombpotential lassen sich leider nicht behandeln. *W. Wessel.*

Neuman, Maurice: Eigenvalue problem in quantum electrodynamics. *Phys. Review, II. Ser.* 85, 129—133 (1952).

Verf. behandelt die als Integralgleichung (mit kausalem Kern) geschriebene Feldgleichung des Elektron-Positron-Feldes mit Hilfe der Fredholmschen Theorie. Am Beispiel von Elektronen im äußeren Feld wird plausibel gemacht, daß man die Fredholmschen Minoren als Wellenfunktionen von Teilchen auffassen kann. Im Fall des quantisierten Maxwellfeldes (das jedoch der homogenen Wellengleichung genügen soll) ergeben sich für diese Wellenfunktionen Integralgleichungen vom Typ der Bethe-Salpeter-Gleichung. Die Gleichung für die Einteilchenfunktion wird genauer diskutiert. *H. Lehmann.*

Hara, Osamu and Haruo Shimazu: A new attempt on the self energy problem of the photon. *Progress theor. Phys.* 8, 265—279 (1952).

Es wird die Möglichkeit angegeben, eine von Null verschiedene Selbstenergie des Photons mit Hilfe einer Renormalisation der Lichtgeschwindigkeit zu deuten, ohne die Eichinvarianz zu zerstören. Wird die Änderung der Lichtgeschwindigkeit mit Δc bezeichnet und ist die Selbstenergie des Photons ΔE , kann man dem Photon die Selbstmasse Null zuschreiben, wenn nur die Beziehung $\Delta E = p \cdot \Delta c$ besteht. Die Größe p ist hier der Impuls des Photons. Die Verff. geben ein formales Rechen-schema an, wonach diese Gleichung aus der gewöhnlichen Formalisierung der Quantenelektrodynamik abgeleitet wird. Es ist wohlbekannt, daß die Größe ΔE oben nicht eindeutig festgelegt ist, sondern von der verwendeten Rechenmethode abhängt und daß man für sie jeden Wert zwischen Null und Unendlich bekommen kann. Durch die Forderung der Eichinvarianz wird aber in der gewöhnlichen Formulierung für ΔE Null eindeutig festgelegt. Die Verff. meinen, daß sie ihre Gleichung zwischen ΔE und Δc in erster störungstheoretischer Näherung aber unabhängig von der Eichinvarianz bewiesen haben.

G. Källén.

Takahashi, Yasushi and Hiroomi Umezawa: On the self-stress. *Progress theor. Phys.* 8, 193—204 (1952).

Previous authors obtained a non-vanishing value for the self-stress which result contradicts the relativistic properties of particles. This problem is investigated anew for rather general types of interacting fields. The authors derive a simple formula for the expectation value of the trace of the energy-momentum-stress tensor in one-particle-states, valid in all approximations of the perturbation calculus. A dimensional analysis shows that the self-stress should vanish identically in all the cases investigated. In view of the dimensional analysis, a non-vanishing self-stress is interpreted as a consequence of the (silent) assumption of a cut-off radius introduced in order to make the integrals (appearing at intermediate stages of the computation) convergent. The difficulty of a non-vanishing self-stress is not primary but is only a consequence of the divergence of the integrals of the self-energy type.

R. Rayski.

Belinfante, Frederik J.: Problems connected with the prohibition of self-interactions in integro-causal quantum field-theory. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 468—473 (1952).

Verf. möchte eine konvergente Quantenelektrodynamik dadurch erhalten, daß virtuelle Übergänge bei Selbstenergieprozessen, die sich weit außerhalb der Energieschale abspielen, durch ein Zusatzpostulat verboten werden. In der Arbeit werden einige Schwierigkeiten dieses Vorhabens diskutiert, ein gangbarer Weg wird nicht angegeben.

H. Lehmann.

Robl, H.: Paarerzeugung im homogenen Magnetfeld. *Acta phys. Austr.* 6, 105—118 (1952).

Verf. berechnet den Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch Lichtquanten in einem konstanten, homogenen Magnetfeld ohne Verwendung der Bornschen Näherung. Die einzige Näherung ist die Entwicklung des Strahlungsfeldes in Potenzen der Elektronenladung. Das Elektron-Positron-Paar im Endzustand wird mit Hilfe der exakten Lösungen der Diracgleichung in einem konstanten, homogenen Magnetfeld beschrieben. Als Ergebnis erhält Verf. einen Wirkungsquerschnitt, der für die experimentell erreichbaren Werte der magnetischen Feldstärke verschwindend klein wird, wenn nicht die Lichtquantenenergie von der Größenordnung 10^8 MeV ist.

G. Källén.

Takahashi, Y. and H. Umezawa: On the interaction representation. *Progress theor. Phys.* 8, 493—494 (1952).

Broglie, Louis de: Sur le tenseur énergie-impulsion dans la théorie du champ soustractif. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 20—22 (1952).

Caianiello, E. R.: Fermion types and ensuing selection rules. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 336—350 (1952).

Wataghin, G.: On the quantum theory of fields. II. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 208—209 (1952).

Corinaldesi, E.: Current fluctuations in quantum electrodynamics. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 194—195 (1952).

Hori, S.: On the convergence of the *S*-matrix series. *Progress theor. Phys.* 8, 569—570 (1952).

Ozaki, S., S. Nagata and Y. Okamura: A note on the gauge transformation in the theory of non-local interaction of the fields. *Progress theor. Phys.* 8, 574—576 (1952).

Pirene, Jean: Covariant theory of radiation damping. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 395—398 (1952).

Verf. betrachtet den Zusammenhang zwischen der kovarianten Formulierung und und der ursprünglichen Heitlerschen Form der Theorie der Strahlungsdämpfung. Außerdem werden Rekursionsformeln angegeben, die (im Rahmen einer Entwicklung nach der Kopplungskonstante) zur Berechnung des Reaktionsoperators aus der *S*-Matrix geeignet sind. *H. Lehmann.*

Wada, W. W.: Scattering of charge symmetric pseudoscalar mesons by nucleons. *Phys. Review*, II. Ser. 88, 1032—1036 (1952).

H. J. Bhabha hat gezeigt (dies. Zbl. 22, 187), daß für Mesonenenergien, für die der Impuls des Einzelmesons klein gegen die Nukleonenmasse ist, eine klassische Behandlung des Mesonenfeldes ausreicht. Darauf und auf der Theorie der räumlich ausgedehnten Nukleonen (W. Pauli, *Meson Theory of Nuclear Forces*, Interscience Publishers, New York 1946) aufbauend, behandelt Verf. die Streuung positiver und negativer π -Mesonen nach der symmetrischen, geladenen pseudoskalaren Mesonentheorie mit Gradient-Kopplung. Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von π^+ -Mesonen an Protonen ergibt sich bei geeigneter Wahl des Parameters der Spinträgheit usw. sowie der Kopplungskonstante als sehr stark energieabhängig und als 2.25 mal so groß als der Wirkungsquerschnitt für π^- -Mesonen, was bekanntlich mit dem Experiment in Einklang steht. Auch die Wirkungsquerschnittskurven selbst zeigen gute Übereinstimmung mit der Erfahrung. *F. Cap.*

Lewis, H. W.: Multiple meson production in nucleon-nucleon collisions. *Reviews modern Phys.* 24, 241—248 (1952).

Horie, Hisashi, Taro Tamura and Shiro Yoshida: Effects of tensor forces on the neutron-deuteron scattering. *Progress theor. Phys.* 8, 341—354 (1952).

Der Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung von Neutronen (n) an Deuteronen wird bei 90 MeV auf Grund der Bornschen Näherungsmethode berechnet. Dabei wird angenommen: 1. Der Grundzustand des Deuterons ist ein reiner *S*-Zustand; 2. die Wellenfunktion in diesem ist die Hulthénsche: $N(e^{-\alpha r} - e^{-\beta r})/r$; 3. die Wechselwirkungspotentiale $n-n$ und $n-p$ werden wesentlich durch die Tensorpotentiale mitbestimmt und 4. die Wechselwirkung $n-n$ ist die gleiche wie die Wechselwirkung $p-p$. Ein Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt, daß die auf Grund dieser Annahmen erzielte Übereinstimmung mit den Experimenten besser ist als bei allen bisherigen Berechnungen des gleichen Problems. *Th. Seel.*

Blatt, John M. and L. C. Biedenharn: The angular distribution of scattering and reaction cross sections. *Reviews modern Phys.* 24, 258—272 (1952).

Corinaldesi, E., L. Trainor and Ta-You-Wu: The Oppenheimer approximation for the scattering of electrons. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 436—439 (1952).

Biedenharn, L. C., J. M. Blatt and M. E. Rose: Some properties of the Racah and associated coefficients. *Reviews modern Phys.* 24, 249—257 (1952).

Yamada, Masami and Masato Morita: On the f -ray angular correlations. *Progress theor. Phys.* 8, 431—448 (1952).

Ferroni, S.: Relation between even and odd couplings in beta-decay theory. *Nuovo Cimento*, Ser. IX **9**, 1103—1105 (1952).

Hole, N.: Zur statistischen Analyse des radioaktiven Zerfalls. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* **24**, Nr. 19, 85—89 (1952).

Verf. hat in zwei vorausgegangenen Mitteilungen (dies. Zbl. **42**, 222) eine Theorie zur Auswertung der Zerfallskonstante einer radioaktiven Substanz an Hand statistischer Methoden gegeben. Diese Überlegungen führen zunächst zu einer Beziehung zwischen der Meßdauer, der Zerfallskonstanten und der Summe der Beobachtungszeiten der Zerfallsvorgänge. Eine statistische Untersuchung liefert eine Verteilungsfunktion für die letzte Größe und damit auch für die Zerfallskonstante λ . Die vorliegende Arbeit enthält neue ergänzende Bemerkungen zur Herleitung dieser statistischen Verteilung. *G. Ecker.*

Le Couteur, K. J.: Statistical fluctuations in nuclear evaporation. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **65**, 718—737 (1952).

Während frühere Behandlungen der Kernverdampfung nur Mittelwerte in Betracht zogen und die Schwankungen um dieselben vernachlässigten, betrachtet der Verf. gerade diese Schwankungen in allen Einzelheiten. Insbesondere wird die Schwankung der Anzahl der Neutronen und der Gesamtenergie bei den Verdampfungssternen gegebener Größe berechnet. Allerdings spielen diese Schwankungen nur bei Sternen, die durch π -Mesonen oder künstlich beschleunigte Teilchen erzeugt werden, eine Rolle, während bei den großen, durch kosmische Strahlen erzeugten die Mittelwertsüberlegungen hinreichen. *Th. Sexl.*

Spiers, J. A. and R. J. Blin-Stoyle: A formulation of beta-decay theory for forbidden transitions of arbitrary order. I. Selection rules and energy spectra. II. Angular distributions. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **65**, 801—808, 809—814 (1952).

Les AA. introduisent une méthode de représentation des éléments de matrices qui utilise les valeurs propres du moment cinétique total $J = 0, 1, 2$ du système électron + neutrino traité comme un ensemble. Ces éléments de matrices s'expriment par des sommes de termes classés suivant les valeurs $L = 0, 1, 2, \dots$ et $S = 0, 1$ du moment cinétique orbital total et du spin total du système. On obtient alors des règles simples pour le degré d'interdiction d'une émission β entre des états nucléaires de spin et de parité donnés ainsi que pour les propriétés de la répartition angulaire des particules émises pour des degrés arbitraires d'interdiction. — Cette méthode est utilisée dans (II) pour l'évaluation de la répartition angulaire des rayons β émis dans les transitions entre les sous-niveaux magnétiques d'états nucléaires de spins et de parités donnés pour un degré d'interdiction quelconque et en tenant compte du champ coulombien du noyau. *G. Petiau.*

Kotani, Tsuneyuki, Hisao Takebe, Minoru Umezawa and Yoshio Yamaguchi: Notes on the decay of the neutron. I. *Progress theor. Phys.* **7**, 469—480 (1952).

Verff. versuchen aus dem β -Spektrum des Neutrons die genaue Form der β -Kopplung zu ermitteln. Dabei wird auch darauf hingewiesen, daß die Winkelkorrelation zwischen Proton und Elektron eine wertvolle Information darstellt, welche gegenüber der Form der β -Wechselwirkung sensitiv ist. *Thirring.*

Morpurgo, G.: Sull'energia di legame dell' H^3 e dell' He^4 . *Nuovo Cimento*, Ser. IX **9**, 461—476 (1952).

Thomas, R. G.: An analysis of the energy levels of the mirror nuclei C^{13} and N^{13} . *Phys. Review*, II. Ser. **88**, 1109—1125 (1952).

Die „mirror“-Kerne $^{13}_6\text{C}$ und $^{13}_7\text{N}$ weisen neben einer abgeschlossenen S- und $2p_{3/2}$ -Schale ein unpaariges Neutron bzw. Proton in der $2p_{1/2}$ -Schale auf. Ihr Kernspin beträgt $1/2$ und ihr Grundzustand ist als $2p_{1/2}$ -Zustand zu charakterisieren. Die wesentlichen Probleme der beiden Kerne können daher in guter Näherung als Einkörperprobleme behandelt werden und eignen sich daher besonders zur Überprüfung von Hypothesen über eine mögliche Gleichheit von $n-n$ - und $p-p$ -

Kräften usw. Außerdem hat man den Vorteil, die um und für das Deuteron entwickelten mathematischen Hilfsmittel weitgehend heranziehen zu können. Es zeigt sich, daß die Unterschiede im Verhalten von ^{13}C - und ^{13}N -Kernen tatsächlich weitgehend durch Einkörperbetrachtungen verstanden werden können. *Th. Sexl.*

Woeste, K.: Der Atomkern als kompressibler Tropfen. II. Der schwingende Kerntropfen. Z. Phys. 133, 370—393 (1952).

Verf. hat zusammen mit F. Flügge in einer vorausgegangenen Arbeit (dies. Zbl. 46, 222) den Grundzustand des Atomkerns an Hand des klassischen Tropfenmodells behandelt. Die vorliegende Untersuchung beschreibt die angeregten Zustände als Eigenschwingungen des Kerntropfens. Dabei wird die Kernflüssigkeit entweder als einheitliche Substanz unter Berücksichtigung der Kompressibilität behandelt, oder als inkompressible Proton-Neutron-Mischung. Als Schwingungsvorgänge ergeben sich neben Oberflächen- und Kompressionswellen Schwingungen der Protonen- gegenüber der Neutronenflüssigkeit. Transversalwellen treten infolge der Vernachlässigung der Zähigkeit und der Formelastizität der Kernmaterie nicht auf. Die Rotationsbewegung des Kernes läßt sich abseparieren. Im ersten Fall der einheitlichen kompressiblen Substanz geht die Berechnung von den Differentialgleichungen der Bewegung aus, die sich aus den Grundgleichungen der Elektrodynamik und der Hydrodynamik ergeben. Im zweiten Teil der inkompressiblen Proton-Neutron-Mischung werden die Überlegungen dagegen unter Verwendung des Energiesatzes durchgeführt. Die Gegenüberstellung der erzielten Ergebnisse mit den Resultaten des inkompressiblen einkomponentigen Tropfens zeigt ein Absinken der Eigenfrequenzen als Folge der größeren „Weichheit“ der diskutierten Modelle. Die Zahl der Anregungsterme ist naturgemäß erheblich vermehrt. *G. Ecker.*

Messel, H. and H. S. Green: The angular and lateral distribution functions for the nucleon component of the cosmic radiation. Phys. Review, II. Ser. 8, 738—747 (1952).

Verff. entwickeln eine Methode, um die Winkelverteilung und die räumliche Verteilung der Nukleonen-Komponente in der Luft zu berechnen, begründet auf der Möglichkeit, eine integrierbare Funktion $f(x)$ in die Reihe:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_{(k)} \delta^{(k)}(x)/k!$$

zu entwickeln, wobei $\delta^{(k)}$ die k^{te} Ableitung der Diracschen δ -Funktion darstellt und

$$f_{(k)} = \int_{-a}^h x^k f(x) dx.$$

Numerische Resultate werden berechnet für den Fall eines einfallenden Potenzspektrums mit dem Exponenten gleich 1,1 und für einen Querschnitt des Stoßes Nukleon-Nukleon (im Schwerpunktsystem) der Form $R + S \cos^2 \theta$, was zu einer zu breiten Verteilung im Vergleich zu den Experimenten führt. Dies wird von den Verff. als Hinweis auf eine engere Winkelverteilung des Querschnittes angenommen.

P. Budini.

Nordheim, L. W.: Die Momente der lateralen Streuung in Schauern. Z. Phys. 133, 94—100 (1952).

Die hier entwickelte Methode besteht in einer Konstruktion der Momente der lateralen und Winkelabweichungen in Schauern. Sie führt zu einer Rekursionsformel zwischen den Momenten verschiedener Ordnung, die nur den Ausdruck für die longitudinale Verteilung $P(E_0, E, t)$ enthält:

$$P^{2n}(E_0, E, t) = \frac{2n(2n-1)}{2} \int_E^{E_0} \frac{1}{2} \left(\frac{E_0}{E'} \right)^2 dE' \int_0^t dt' t'^2 P(E_0, E', t-t') P^{2n-1}(E', E, t').$$

Die Ableitung erfolgt in zwei Schritten. Zuerst wird die Beziehung aufgestellt, die zwischen den Momenten bestehen würde, wenn die Geschichte aller Teilchen

dieselbe wäre. Die zweite Operation ist dann die Mitteilung über alle möglichen Vergangenheiten der Teilchen. — Die ersten Momente der radialen Streuung, auf der Tiefe gemittelt, werden berechnet im Grenzfall $E_0 \rightarrow \infty$. Die Verteilung scheint einen größeren Ausläufer für große r als diejenige von Molière zu haben: die Molièresche Lösung (für hohe Energien) gibt r^2 und \bar{r}^4 ziemlich gut wieder, fällt aber immer noch zu schnell für große r ab. — Ausdehnung der Resultate für niedrigere Energie und verschiedene Tiefen erscheint mühsam, aber möglich zu sein. *P. Budini.*

Budini, P. e G. Lanza: Sulla componente „N“ dei raggi cosmici alle alte energie. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 381—390 (1952).

Schönberg, M.: Ionization loss at relativistic energies and polarization effects. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 372—375 (1952).

Messel, H. and R. B. Potts: Cascade theories with ionization loss. *Phys. Review*, II. Ser. 87, 759—767 (1952).

Lösungen für das Problem der Schwankungen der Elektronen-Photonen- und Protonen-Neutronen-Kaskade mit Berücksichtigung der Ionisationsbremsung (Annäherung 'B') werden gegeben. Die Integrodifferentialgleichungen für die Differentialmomente der Verteilungsfunktionen werden bei Reihenentwicklung gelöst. Bei Integration über die Energie-Variablen werden die Factorial-Momente erhalten. — Eine Verallgemeinerung einer Methode von Rhabha und Chakrabarty erlaubt die Resultate in eine für numerische Rechnung angepaßte Form zu setzen; doch sind die allgemeinen Resultate so kompliziert, daß man nur mit Hilfe einer elektrischen Rechenmaschine verwendbare Werte erhalten könnte. *P. Budini.*

Charwat, A.: Note on the two-dimensional losses in cascades. *J. aeronaut. Sci.* 19, 851—852 (1952).

Peaslee, D. C.: Cosmic rays underground. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 61—73 (1952).

Bau der Materie:

Frosch, R. A. and H. M. Foley: Magnetic hyperfine structure in diatomic molecules. *Phys. Review*, II. Ser. 88, 1337—1349 (1952).

Während frühere Arbeiten, z. B. von Kellogg u. a. [*Phys. Review*, II. Ser. 57, 677 (1940)], nur zweiatomige Moleküle mit verschwindendem resultierendem Elektronenspin- und -bahnmoment betreffen, wird nun eine allgemeine Theorie der magnetischen Hyperfeinstruktur zweiatomiger Moleküle entwickelt. Die magnetische Hyperfeinwechselwirkung wird von der Dirac-Gleichung für das Elektron im Potentialfeld des Moleküls abgeleitet. Mikrowellenspektren von $N^{14}O^{16}$ und $O^{16}O^{17}$ ermöglichen einen Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit experimentellen. *E. Kreyßig.*

Rahman, A.: Computation of intensities of vibrational transitions in the electronic ground state of a Morse anharmonic oscillator. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 38, 967—974 (1952).

Im Gegensatz zu den bisherigen Methoden, die keine geschlossenen Ausdrücke für die genannten Intensitäten liefern, gelingt deren Angabe nun mit Hilfe eines finiten Rekursionsverfahrens von Manneback (dies. Zbl. 44, 237). *E. Kreyßig.*

Massey, H. S. W. and C. B. O. Mohr: Strong coupling in inelastic collisions of electrons with atoms. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 845—853 (1952).

Watari, Wataro: Electronic states of F_2 - and O_2 -molecules. *Progress theor. Phys.* 8, 524—530 (1952).

Corinaldesi, E. and L. Trainor: Evaluation of integrals in the theory of atomic scattering of electrons. *Nuovo Cimento*, Ser. IX 9, 940—945 (1952).

Budden, K. G.: The theory of the limiting polarization of radio waves reflected from the ionosphere. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 215, 215—233 (1952).

In einem inhomogenen, doppelbrechenden Medium tritt an Stelle der Wellengleichung

ein System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das Försterling (1942) aufgestellt hat. Als Koeffizienten der Kopplungsterme tritt eine Kopplungsfunktion ψ und ihr Gradient auf, die ihrerseits nur von der örtlichen (ordentlichen) Hauptpolarisation und deren Gradienten abhängt. (Im homogenen doppelbrechenden Medium gibt es zwei Hauptpolarisationen, die als einzige bei der Ausbreitung unverändert erhalten bleiben.) — Daß Kopplung besteht, wenn die Hauptpolarisationen sich rasch mit der Höhe ändern, ist bekannt (Försterling, Rydbeck). Eine Art Kopplung kann aber auch in Gebieten sehr geringer Elektronendichte auftreten, wenn nämlich die (an sich sehr schwachen) Kopplungswellen aus verschiedenen Höhen sich phasenrecht addieren. In den Ionosphärenlotungen könnte dadurch beim Verlassen des ionisierten Gebietes eine Grenzpolarisation entstehen, die mit der örtlichen Hauptpolarisation nicht mehr exakt übereinstimmt. — Die letztgenannte Kopplung wird als Störung aufgefaßt; aus den Lösungen π des kopplungsfreien Systems erhält man durch „Variation der Parameter“ eine Näherungslösung für den Kopplungsfall, einfach durch Multiplikation mit einem höhenabhängigen Faktor A . Für A gilt eine Differentialgleichung, in der noch die Lösungen π stecken; sie werden durch WKB-Näherung erhalten. Für den interessierenden Fall der unteren Ionosphäre sind einige Terme zu vernachlässigen, so daß man schließlich zu linearen, homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung kommt. Der entscheidende Koeffizient enthält einerseits ψ^2 , andererseits die Differenz ($\mu_0 - \mu_e$) des ordentlichen und außerordentlichen Brechungsindex. Solange der zweite Term überwiegt, wird die Welle sich jeweils den örtlichen Hauptpolarisationen anpassen. Wird jedoch die Elektronendichte sehr gering, so überwiegt der Kopplungsterm ψ^2 , und dann bleibt jede Polarisation unverändert erhalten (weil nämlich der jeweils durch Kopplung entstehende Zusatz die örtliche Variation der Hauptpolarisation gerade aufhebt). Das Übergangsgebiet, in dem die Grenzpolarisation sich einstellt, liegt dort, wo beide Terme etwa gleich sind. — Die numerische Berechnung zeigt, daß die so erhaltene Grenzpolarisation praktisch nicht von dem Wert verschieden ist, den man aus der Appleton-Hartree-Formel im Grenzfall verschwindender Elektronendichte und Stoßzahl erhält. Durch Messung der Grenzpolarisation kann man also keine neue Auskunft über die untere Ionosphäre erwarten. *K. Rawer.*

Prigogine, I. et J. Philippot: *Théorie moléculaire du point λ de l'hélium liquide.* Physica 18, 729—748 (1952).

Eine Verallgemeinerung des Zellenmodells von Lennard-Jones und Devonshire wird auf das He II angewandt. Wegen des großen Nullpunktsvolumens des He II (etwa gleich dem dreifachen Volumen der Moleküle) können in einer Zelle, deren Größe gleich dem mittleren Volumen pro Molekül im He II ist, beträchtliche Schwankungen der Molekülzahlen auftreten. Sie werden in Abhängigkeit von Statistik und Spin der Moleküle berechnet und ergeben ein Maximum der spezifischen Wärme ungefähr bei 2°K im Falle des He^4 , im Falle des He^3 tritt praktisch kein solcher Effekt auf. Verfeinerungen des zunächst groben Modells, das nur grundsätzlich die Möglichkeit eines λ -Punktes zeigen sollte, werden in einer späteren Untersuchung diskutiert werden. *J. Meixner.*

● **Nowacki, Werner:** *Fouriersynthese von Kristallen und ihre Anwendung in der Chemie.* (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Chemische Reihe. Band VI). Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 237 S.

Ein für Kristallographen, Mineralogen, Chemiker und Physiker geschriebenes Lehrbuch der Fouriersynthese kristalliner Materie. Der Mathematiker findet in dieser ausführlichen und glänzend disponierten Monographie einesteils schöne Beispiele zur Fourieranalyse, andererseits dürfte das Material Anregung zur weiteren theoretischen Forschung bieten. Inhaltsübersicht: Fouriersynthesen, Pattersonsynthesen, Harkersynthesen, Buegersynthesen. Zum Schluß werden die verschiedenen graphischen und rechnerischen Hilfsmittel zusammengestellt. Druck, Illustration und Ausstattung sind hervorragend. *J. J. Burckhardt.*

Vidro, L. I. und B. I. Stepanov: *Die Intensitätsverteilung in den Schwingungsspektren linearer Ketten.* Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 557—560 (1952) [Russisch].

Ultrarot- und Streuspektrum werden am Modell der linearen Kette diskutiert. *G. Leibfried.*

Fischer, Peter und Albert Kochendörfer: *Über die Entstehung von Versetzungen.* Z. Naturforsch. 7a, 735—741 (1952).

Das Verhalten einer Versetzung im Halbraum wird untersucht. Zugrunde ge-

legt wird die Peierlsche Gleichung. Es zeigt sich, wie nicht anders zu erwarten, daß die Verhältnisse bereits durch die rein elastische Theorie richtig beschrieben werden, solange die Versetzung nicht zu nahe an der Begrenzung des Halbraums liegt. In der Nähe der Berandung versagt der Peierlsche Ansatz, zudem müßte bei Stufenversetzungen die Oberflächenbildung berücksichtigt werden. Insgesamt liefert die Arbeit keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. *G. Leibfried.*

Fröhlich, H.: Interaction of electrons with lattice vibrations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **215**, 291—298 (1952).

Verf. führt durch eine kanonische Transformation den Hamiltonoperator des gekoppelten Elektron-Schallquanten-Feldes in einen anderen über, so daß der Wechselwirkungsterm möglichst klein wird. Der neue Hamiltonoperator beschreibt in 0. Näherung Elektronen, die von Gitterdeformationen begleitet sind. Entsprechendes gilt für die Gitterschwingungen, wobei die Beteiligung der Elektronen zu einer „renormierten“ Schallgeschwindigkeit führt. Hinzu kommt schon in 0. Ordnung eine Wechselwirkung der Elektronen über das Schallquantenfeld, die für die Metalltheorie von Bedeutung ist, weil sie die effektive Masse bei tiefen Temperaturen erhöht. Verf. diskutiert das Ergebnis im Hinblick auf seine Theorie der Supraleitung (dies. Zbl. **37**, 430) und insbesondere auf die Widerlegung des Einwandes von Wentzel (dies. Zbl. **43**, 445). *G. Höhler.*

Conwell, E. M.: Mobility in high electric fields. Phys. Review, II. Ser. **88**, 1379—1380 (1952).

Hoffmann, T. A.: Some investigations in the field of the theory of solids. III. Plane and space lattice of similar atoms. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **2**, 97—106 (1952).

In Fortsetzung der früher referierten Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **42**, 232; **43**, 443) wird das rein kubische, einatomige Flächen- und Raumgitter untersucht. Die Bestimmung der Energiewerte führt auf eine Säkulardeterminante, welche die Determinante des linearen Falles als wesentliches Bauelement aufweist. Die Determinante des ebenen Problems wiederum tritt als wesentliches Element in der Säkulardeterminante für das Raumgitterproblem auf. Auch die Lösungen der Säkulargleichung vermag Verf. mittels eines von D. E. Rutherford angegebenen Determinantensatzes auf die Lösungen des linearen Falles zurückzuführen. Hinsichtlich des Baues der Bänder treten dabei jedoch charakteristische Unterschiede zwischen dem ein-, zwei- und dreidimensionalen Gitter zutage. Während bei der linearen Kette die Zustandsdichte an den Bandrändern unendlich wird, im übrigen aber endlich bleibt, erhält Verf. beim ebenen Fall in der Bandmitte unendliche Zustandsdichte, welche nach den Rändern hin auf einen endlichen Wert abnimmt. Im dreidimensionalen Fall dagegen bleibt die Zustandsdichte überall endlich und nimmt an den Bandrändern auf Null ab. *Walter Franz.*

Hoffmann, T. A.: Some investigations in the field of the theory of solids. IV. A-B-type ordered binary systems in the plane and the space. Acta phys. Acad. Sci. Hungar. **2**, 107—127 (1952).

Im Anschluß an die Untersuchung des Verf. über die lineare binäre Kette (dies. Zbl. **43**, 443; s. a. vorsteh. Referat) wird die geordnete binäre Legierung vom Typ A-B in der ebenen und räumlichen kubischen Anordnung untersucht. Es ergibt sich wie im linearen Fall eine Aufspaltung der Bänder des einatomigen Gitters in zwei Teilbänder und ebenso wie in der vorstehenden Untersuchung ein typischer Unterschied zwischen dem linearen ebenen und räumlichen Fall hinsichtlich des Verlaufs der Besetzungsdichte in den Energiebändern, welche im linearen Fall an den Bandgrenzen unendlich wird, im ebenen Fall nach außen auf einen endlichen, im räumlichen Fall auf den Wert Null abfällt. Die Betrachtung der Dissoziationsenergie als Funktion der Gitterkonstante zeigt, daß das Raumgitter bei kleineren Gitterabständen stabil sein sollte als das ebene und lineare Gitter. *Walter Franz.*

Dekker, A. J. and A. van der Ziel: Theory of the production of secondary electrons in solids. Phys. Review, II. Ser. 86, 755—760 (1952).

Für das aus Primär- und Gitterelektron bestehende System wird die Übergangswahrscheinlichkeit in einen Zustand abgeleitet, in dem das Gitterelektron genügend Energie besitzt, um das Metall verlassen zu können. Durch Spezialisierung bezüglich der Eigenfunktionen des Gitterelektrons gelangt man zu den bekannten Theorien von Wooldridge, Baroody und Rudberg-Slater. Bei ersterer fehlt hier allerdings ein Faktor, der nahe bei 1 liegt, dessen Fortlassen jedoch bei der Berechnung der Ausbeute zu einem mit der Erfahrung im Widerspruch stehenden Ausdruck führt. Andere, fast gleichzeitig erschienene Arbeiten zur Wooldridge-Theorie von Baroody und Marshall machen die Abschätzungen über die relative Bedeutung der verschiedenen Prozesse zweifelhaft.

W. Brauer.

Baroody, E. M.: A note on Wooldridge's theory of secondary emission. Phys. Review, II. Ser. 86, 915—916 (1952).

Wooldridge (dies. Zbl. 23, 88) fand in Übereinstimmung mit dem Experiment ein Maximum für die Ausbeute in Abhängigkeit von der Primärenergie. Verf. zeigt, daß dieses Ergebnis Folge einer nicht gerechtfertigten Näherung ist.

G. Höhler.

Born, M.: Kopplung der Elektronen- und Kernbewegung in Molekeln und Kristallen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl., math.-phys.-chem. Abt. 1951, Nr. 6, 3 S. (1952).

Im Gegensatz zu einer Bemerkung in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 43, 442) kann Verf. nun doch ein „adiabatisches“ Verfahren zur Elimination der Elektronenbewegung angeben.

G. Höhler.

Muto, Toshinosuke and Mitsukuni Watanabe: Theory of the nuclear magnetic relaxation in crystalline solids. I. Direct process. Progress theor. Phys. 8, 231—251 (1952).

Verff. berechnen mittels des üblichen Störungsformalismus die Größe der magnetischen Kern-Relaxation. Neu gegenüber früheren Theorien ist, daß diese Relaxation zurückgeführt wird auf das Zusammenwirken der magnetischen Dipol-Dipol-Wechselwirkung zwischen Atomkernen und Kristallelektronen mit der Wechselwirkung zwischen den Gitterschwingungen und den Kristallelektronen. Nach recht umfangreichen Rechnungen gelangen Verff. zu Zahlenwerten der Relaxationszeit, welche im Bereich der experimentell bestimmten Zeiten liegen.

G. Heber.

Klein, O.: On the emission of sound waves from an electron in a metal and the theory of superconductivity. Ark. Fys. 5, 459—469 (1952).

Verf. untersucht für Elektronen oberhalb der Fermienergie die Wahrscheinlichkeit für die spontane Emission von Schallquanten. Durch Summation erhält er die Lebensdauer im Ausgangsterm und damit seine Energieunschärfe. Als Kriterium für das Eintreten der Supraleitung wird angenommen, daß für kleine Abstände von der Fermienergie die Unschärfe größer als der Abstand sein muß, während sie für große Abstände relativ klein bleibt. Kleinere Energiebeträge, die den Elektronen zugeführt werden, gehen dann sehr schnell ans Gitter über. Da mit dem Blochschen Wechselwirkungsansatz bei der üblichen Störungsrechnung das Kriterium nicht erfüllt ist, diskutiert Verf. kurz eine andere Annahme über das Wechselwirkungspotential.

G. Höhler.

Singwi, K. S.: Electron-lattice interaction and superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 87, 1044—1047 (1952).

Ausgehend von der schon von Bardeen verwendeten Bloch-Nordsieck-Transformation diskutiert Verf. die Wechselwirkung zweier Elektronen über das Schallquantenfeld und ihre Bedeutung für die Theorie der Supraleitung. Vgl. Bohm and Staver, Phys. Review, II. Ser. 84, 836 (1951) und O. Klein. Eine Korrektur gibt Buckingham, Proc. Phys. Soc. A 66, 601—607 (1953).

G. Höhler.

Valatin, Jean G.: Sur l'état supraconducteur. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 132—134 (1952).

Verf. gibt das Programm für eine Theorie des supraleitenden Zustandes, die diesen nur durch Vermittlung elektrodynamischer Wechselwirkung, ohne Zuhilfenahme der Gitterwechselwirkung, erklären soll. Die neue Diracsche Theorie des Elektrons in ihrer ursprünglichen, nur den wirbelfreien Fall umfassenden Form (dies. Zbl. 43, 428) liefert zwischen Viererpotential A_μ und Viererstromdichte s_μ die Beziehung

$$(1) \quad s_\mu = -\lambda A_\mu; \quad \lambda = \lambda(x_i).$$

Mit $\lambda = \text{const.}$ führt dies unmittelbar auf die Londonschen Gleichungen. Für eine skalare Welle $\psi = a \cdot e^{i\theta}$ dagegen nimmt der quantenmechanische Stromausdruck die Form an

$$(2) \quad s_\mu = -2 \frac{e}{c} a^2 \left\{ \frac{e}{c} A_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\hbar \theta) \right\}.$$

Bringt man die Eichung des Potentials A in Verbindung mit der Phase θ der Welle, so nimmt (2) die Form (1) an, mit a^2 an Stelle λ . Der supraleitende Zustand wird somit durch $a = \text{const.}$ charakterisiert. Diese Bedingung soll durch die energetisch tiefste Eigenfunktion der stationären Wellengleichung geliefert werden. Die Aussonderung der wirbelfreien Strömungen, die klassisch zu den Londonschen Gleichungen führt, würde somit ihre wellenmechanische Erklärung finden. (Nach Ansicht d. Ref. ist jedoch der Einfluß des äußeren Feldes auf die Elektronen-Wellenfunktionen nicht vernachlässigbar.) Verf. glaubt, der Isotopeneffekt beweise lediglich die Bedeutung der Gitterwechselwirkung für den Phasenübergang, nicht aber die Notwendigkeit, diese zur Erklärung des supraleitenden Zustandes heranzuziehen. Das Programm ist ähnlich dem von F. London („Superfluids“, Teil I, New York 1950, dies. Zbl. 41, 585) aufgestellten.

F. Beck.

Kuper, C. G.: On the destruction of superconductivity by large currents. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 1264—1275 (1952).

Die Londonsche Theorie des Überganges eines supraleitenden Drahtes in den normalleitenden Zustand bei Überschreiten der Grenzstromstärke (F. London, „Superfluids“, Teil I, New York 1950, S. 120) wird erweitert durch Berücksichtigung dreier, bei London vernachlässigter Effekte: 1. Die Streuung von Elektronen beim Auftreffen auf die Grenzfläche Normal-Supraleiter, die wesentlich wird, wenn die Größe der normalleitenden Bereiche im Zwischenzustand von der Größenordnung der freien Weglänge der Elektronen wird. 2. Der Verlauf der Stromlinien in dem sich im Zwischenzustand befindlichen Kern des Drahtes. 3. Der Einfluß der Oberflächenenergie der Grenzfläche Normal-Supraleiter. Der Beitrag von 3. zur freien Enthalpie G erweist sich als vernachlässigbar klein. Aus 2. wird über das Minimum von G auf Form und Größe der den Zwischenzustand bildenden, abwechselnd supra- und normalleitenden, wie bei London diskusartig angenommenen Bereiche geschlossen. 1. führt schließlich zu einem gegenüber London geänderten Zusammenhang zwischen Widerstand R und Stromstärke I ($> I_c = \text{Grenzstromstärke}$). Der Vergleich mit den bisher allerdings sehr spärlich vorliegenden Experimenten zeigt eine bessere Annäherung der Meßergebnisse an die vom Verf. gegebene als an die Londonsche Beziehung für $R(I)$.

F. Beck.

Berlin, T. H. and M. Kac: The spherical model of a ferromagnet. Phys. Review, II. Ser. 86, 821—835 (1952).

Das Isingsche Modell des Ferromagnetikums wurde so abgeändert, daß die Zustandssumme auch im 3-dimensionalen Falle exakt berechenbar bleibt. Man kommt so zu zwei neuen Modellen, welche man „Sphärisches“ bzw. „Gaußsches“ Modell des Ferromagnetikums nennt. Es ist zwar klar, daß sie physikalisch nicht das reale Ferromagnetikum darstellen. Aber da man das reale Modell nur in grober Näherung behandeln kann, diese idealisierten Gebilde aber mathematisch streng, ist es durchaus sinnvoll, auch letztere zu diskutieren. Es zeigt sich z. B., daß das Sphärische Modell das Curie-Weißsche Gesetz der paramagnetischen Suszeptibilität enthält. Die Aussagen über die Existenz oder Nichtexistenz von Ferromagnetismus in den verschiedenen Gittertypen sind hier ähnlich wie in früheren Theorien.

G. Heber.

Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abelé, Jean (Mécanique relativiste) 445.
 Aczél, Jean (Ungleichungen) 53.
 Aeschlimann, F. (Représentation géométrique des corpuscules) 212.
 Agmon, Shmuel (Taylor series) 312.
 — — and Lipman Bers (Pseudo-analytic functions) 321.
 Agnew, Ralph Palmer (Tauberian series) 64; (Evaluation of sequences) 65; (Inclusion relations) 300; (Approximation) 303.
 Agostinelli, Cataldo (Equazioni della propagazione di onde elettromagnetiche) 199.
 Agostini, Amedeo (Leonardo da Vinci) 4.
 Ahlfors, Lars V. (Neumann-Poincaré integral equation) 79.
 Aigner, Alexander ($x^3 + y^3 = z^3$) 274.
 Aiken, D. J. and K. B. Henderson (Algebra. II.) 16.
 Aitken, A. C. (Determinants) 18.
 Aiyar, T. V. Vedamurti s. C. T. Rajagopal 244.
 Ajzenstat, N. D. (Poissonsche Differenzengleichung) 333.
 Akivis, M. A. (Geometrie der Hyperflächen) 152.
 Albrecht, Rudolf (Schmiegungsverfahren) 81.
 Alder, Kurt (Richtungskorrelation) 224.
 Alexits, Georg (Orthogonalpolynomentwicklungen) 68; (Approximation par les sommes de Fejér) 69.
 Allen, A. C. (Theorem by Hardy and Littlewood) 293.
 Amaldi, Ugo s. T. Levi-Civita 172, 173.
 Amir, Amnon (Jakimovski) (Converse of Abel's Theorem) 66.
 Anastassiadis, Jean (Fonctions semi-monotones) 361.
 Anaut, Vicente Ayuso (Konvergenzcharakter von Reihen) 298.
 Ancker jr., C. J. s. C. W. Nelson 430.
 Ancochea, Germán (Singuläre ebene Kurvenelemente) 407; (Singularités des courbes) 407.
 Anderson, R. D. (Continuous curves) 164.
 — — and V. L. Klee jr. (Convex functions) 157.
 — jr., Oskar (Business test of IFO-institute) 138.
 Andersson, Josef (Flächensatz) 391.
 — Sven (Disturbed motion) 175.
 Andrews, E. G. (Bell Laboratories' digital computer) 119.
 Angot, André (Compléments de mathématiques) 284.
 Ankeny, Nesmith C. (Representations of primes) 275; (Diophantine equations) 276.
 Anscombe, F. J. (Sequential estimation) 134.
 Aoyama, Hirojiro (Midzuno's inequality) 374.
 Apostol, T. M. (Generalized Dedekind sums) 45.
 Aquaro, Giovanni (Teorema di media) 423.
 Arai, Tadashi s. E. Ishiguro 232.
 Arens, Richard (Normed rings) 358.
 Arf, C. (Elastic plane body) 430.
 Arfken, G. B. s. M. E. Rose 223.
 Arfwedson, G. (Semi-convergent series) 387.
 Armitage, P. (Statistical theory) 136.
 Arustamov, Ch. A. (Aufgabensammlung Darstellende Geometrie) 171.
 Arutjunjan, N. Ch. (Elastizitätstheorie) 432.
 Arvesen, Ole Peder (Axiometrische Methode) 171.
 Aržanych, I. S. (Spannungstensor) 198.
 Atkinson, F. V. (Theorem of Yosida) 344; (Spectral problem) 360.
 Auluck, F. C. (Ingham's Tauberian theorem) 280.
 Aumann, Georg (Elementargeometrische Figuren) 138.
 Azlekkij, S. P. (Sylowrang) 25.
 Baccarani, Valeria e Franca Rubbiani (Brachistocrona) 446.
 Backes, F. (Analyse vectorielle) 149; (Variation des constantes) 334.
 Baer, Reinhold (Existenz eines Einselementes) 265.
 Baeyer, Hans J. von und Ronald Knechtli (Mehrlittersysteme) 200.
 Bagchi, Hari das and Phatik chand Chatterji (Functional equations) 308.
 Baggis, H. F. De s. DeBaggis, H. F. 330.
 Bai, C. Lakshmi s. Lakshmi Bai, C. 2.
 Bajada, Emilio ($p = f(x, y, z, q)$ e l'unicità) 334.
 Bajčorov, Ch. Ja. (Strömung einer idealen Flüssigkeit) 192.
 Bakaev, Ju. N. (Differentialgleichung des Pendels) 366.
 Bakel'man, I. Ja. (Glatte Flächen) 156.
 Balagangadharan, K. (Quasitauberian theorem) 300.
 Balaguer, F. Sunyer i s. Sunyer i Balaguer, F. 316.
 Baldassarri, Mario (Involuzioni ∞^α dello S_n) 395; (Gruppi generati da serie razionali) 395.
 Baldock, G. R. (Electronic bound states) 235.
 Baliah, Rani (General conic) 143.
 Ball, B. J. (Collections of arcs) 420.
 Ballabh, Ram (Superposable flows) 437.

- Balmaña, R. Mallol s. Malloí Balmaña, R. 22.
- Bambah, R. P. and H. Davenport (Covering by spheres) 51.
- Banerji, R. B. (Third ionospheric echo) 202.
- Bang, Thøger (Primzahlen) 44.
- Bar-Hillel, Y. (Bolzano's logic) 12.
- Baranger, M., F. J. Dyson and E. E. Salpeter (Vacuum polarization) 218.
- Barbašin, E. A. (Stabilität der Lösung) 86.
- — — und N. N. Krasovskij (Stabilität einer Bewegung) 330.
- Barbuti, Ugo ($x'' + B(t)x = 0$) 328.
- Barenblatt, G. I. (Automodierte Bewegungen) 192.
- Bari, N. K. (Primitive Funktionen und trigonometrische Reihen) 69.
- Barlaz, J. s. O. Szász 298.
- Barlotti, A. s. L. Campedelli 143.
- Barnes, E. S. (Bilinear form) 281.
- — — and H. P. F. Swinerton-Dyer (Binary quadratic forms. II.) 281.
- Baroody, E. M. (Wooldridge's theory) 456.
- Barratt, M. G. and G. F. Paechter ($\pi_r(V_{n,r})$) 167.
- Barrett, W. (Remainders of numerical formulae) 115; (Numerical integration formulae) 115.
- Barrucand, Pierre (Transformation de Stieltjes) 101.
- Bartle, Robert G. and Lawrence M. Graves (Mappings between function spaces) 109.
- Bartlett, James H. (Helium wave equation) 229.
- Barton, D. E. and K. E. Dennis (Gram-Charlier and Edgeworth curves) 122.
- Bassali, W. A. s. A. F. Stevenson 326.
- Basu, N. M. (Partitions) 43.
- Bates, Grace E. and Jerzy Neyman (Accident prone-ness. I.) 134; (II.) 135.
- Batschelet, Eduard und Hans Rudolf Striebel (Nomogramm einer Gleichung vierten Grades) 367.
- Bauer, Friedrich L. (Tenseurs) 216.
- Beauregard, Olivier Costa de s. Costa de Beauregard, Olivier 212.
- Beckenbach, E. F. (Harmonic functions) 344.
- Béjar, Juan (Asymmetrie-Koeffizienten) 129.
- Bekefi, G. (Diffraction of waves) 202.
- Belinfante, Frederik J. (Integro-causal quantum field-theory) 449.
- Bellman, Richard (Dynamic programming) 138; (Iteration of power series) 324; (Games involving bluffing) 377.
- — — and Harold N. Shapiro (Arithmetic functions) 278.
- Bellomo, E. e A. Loinger (Equazione di Dirac-Corben e equazione di Dirac) 447.
- Belz, M. H. s. J. H. Michell 52.
- Benderskij, A. M. (Verteilung der maximalen Abweichung) 130.
- Bereis, R. (Ebene Bewegung) 149.
- Berezanskij, Ju. M. (Fastperiodische Funktionen bezüglich Verschiebung in hyperkomplexen Systemen) 82.
- Berezina, L. Ja. (Evenloppe einer Normalenkongruenz) 151; (Flächen mit konstanten Abständen) 151; (Paare von Kongruenzen) 152.
- Berger, J. M., L. L. Foldy and R. K. Osborn (Pseudoscalar coupling) 217.
- Bergman, Gösta (Theorem of Nagell) 273.
- Stefan (Coefficient problem) 342.
- Berker, Ratip (Fluide visqueux) 437.
- Berkovitz, Leonard D. (Sturm-Liouville expansions) 304.
- Berlin, T. H. and M. Kac (Ferromagnet) 457.
- Berlinkov, M. L. (Gruppen mit kompaktem Untergruppenverband) 257.
- Berman, D. L. (Approximation durch Interpolationspolynome) 68; (Interpolationstheorie) 303.
- G. N. (Aufgabensammlung) 53.
- S. D. (Darstellungstheorie) 28.
- Bernard, Michel (Aberration de sphéricité) 201.
- Bernardi, S. D. (Development of the theory of schlicht functions) 79.
- Bernštejn, S. N. (Werke. I.) 73; (Antimajoranten) 75.
- Bers, Lipman s. Sh. Agmon 321.
- Bertein, F. (Calcul des trajectoires en optique électronique) 203.
- Bertolini, Fernando (Aggregati gruppali d'insiemi) 417; (Capacità di un condensatore) 439.
- Best, Gilbert C. s. H. Reismann 183.
- Beth, Herman J. E. (Systèmes plans à deux paramètres) 149.
- Betts, D. D. s. A. D. MacDonald 232.
- Bhatia, A. B. and E. Wolf (Zernike circle polynomials) 202.
- Bibb, S. F. s. C. I. Palmer 283.
- Biedenharn, L. C., J. M. Blatt and M. E. Rose (Racah and associated coefficients) 450.
- — — s. J. M. Blatt 450.
- — — s. M. E. Rose 223.
- Biermann, L. (Magnetfelder in Plasmen) 240.
- Biernacki, M. (Fonctions de distances) 297.
- Bilharz, Herbert (Genäherte Quadratur) 115.
- Bilinski, Stanko (Diracsche Funktion) 436.
- Bilo, J. (Relation entre triangles) 140.
- Binnie, A. M. (Flow of water under a sluice-gate) 192.
- Birkhoff, Garrett (Induced mass) 183.
- Birnbaum, Z. W. (Kolmogorov's statistic) 381.
- Blackman, Jerome (Heat equation) 337.
- Blanc, D. s. P. Maignan 122.
- Blanc-Lapierre, André (Théorème d'interpolation) 376.
- Blanch, Gertrude (Numerical solution) 365.
- Blanco Loizelier, Enrique s. Loizelier, Enrique Blanco 128.
- Blaschke, Wilhelm (Integralgeometrie) 160.
- Blatt, John M. and L. C. Biedenharn (Angular distribution of scattering) 450.
- — — s. L. C. Biedenharn 450.

- Bledsoe, Woodrow W. and A. P. Morse (Covering theory) 289.
- Blij, F. van der (Binary quadratic forms) 282.
- Blin-Stoyle, R. J. s. J. A. Spiers 451.
- Block, H. D. (Laws of attraction) 175.
- Boas jr., R. P. (Fourier transforms) 104.
- Bobynin, M. N. (Vollständig additive Mengenfunktionen) 59.
- Bochner, S. (Bessel functions) 350.
- Bodewig, E. (Algebraische Eigenwertprobleme. II.) 364.
- Bohm, David (Quantum theory) 212.
- — s. D. Pines 237.
- Bohr, Aage (Nuclear surface oscillations) 229.
- Bojanić, Ranko (Folge von Polynomen) 63.
- Bol, G. (Projektive Differentialgeometrie der Kurven) 407.
- Bompiani, E. (Connessioni affini) 412.
- Bonč-Bručvič, V. L. (Energiespektren von Mehrteilchensystemen) 232.
- Bononcini, V. E. s. L. Onofri 284.
- Bonsall, F. F. and Morris Marden (Self-inversive polynomials) 20.
- Born, M. (Elektronen- und Kernbewegung) 456.
- Borodnikov, V. (Schnitt von Simplexen) 420.
- Borowitz, Sidney and Walter Kohn (Stress tensor of the electron) 218.
- Bose, B. N. s. S. C. Mitra 348.
- R. C. and W. S. Connor (Group divisible block designs) 129.
- Bött, Raoul (Combinatorial invariants) 420.
- Bottema, O. (Euklid) 391.
- Botts, T. A. s. E. J. McShane 294.
- Bouligand, Georges (Axiomatique comparée) 138.
- Bourgin, D. G. (Sets of visibility) 289.
- Bowman, F. (Cyclic pentagons) 394.
- Box, G. E. P. (Multi-factor designs) 129.
- Boyer, Carl B. (Descartes and the radius of the rainbow) 5.
- Braams, C. M. (Motion of a top) 176.
- Bradley, Ralph Allan and Milton E. Terry (Rank analysis. I.) 129.
- Branden, B. H. (Deuteron production) 222.
- Brandt, H. (Ternäre quadratische Formen) 48.
- Brasch, Frederick E. (Newton's principia) 5.
- Brauer, Alfred (Matrices) 253.
- Brechovskich, L. M. (Fortpflanzung des Schalls) 435.
- Breidenbach, W. (Delisches Problem) 139.
- Breit, G. and R. M. Thaler (Magnetic moments of nuclear particles) 219.
- Brelot, Marcel (Problème de Dirichlet) 344.
- Bremmer, H. (Paraxial constants of electron lenses) 444.
- Brock, P. and F. J. Murray (Step by step integration. II.) 367.
- Bröcker, W. (Grenze der Welt) 1.
- Brogie, Louis de (Théorie du champ soustractif) 449.
- Bronowski, J. (Logic of experiment) 246.
- Bronštejn, I. N. (Nachlaß Lobačevskijs) 245.
- Brooke, A. W. s. J. A. Goetz 369.
- Brouwer, L. E. J. (Häufungskerne) 59.
- Browder, Felix E. (Dirichlet problems) 95.
- Brown, G. E. and J. B. Woodward (Scattering of gamma-rays) 223.
- L. M. (Configuration) 142.
- Brownell, F. H. (Invariant measure) 108.
- Bruijn, N. G. de (Difference property for Riemann integrable functions) 62.
- — — — — and D. van Dantzig (Inequalities concerning determinants) 19.
- — — — — P. Erdős (Recursion formulas. II.) 63.
- Brusotti, Luigi („Piccola variazione“) 398.
- Brzezicki, A. de Castro s. Castro Brzezicki, A. de 181, 328.
- Bucurius, Hans (Klassische Mechanik) 175; (Saturnring) 239; (Lineare Gleichungen) 254.
- Buck, E. Creighton (Zeros of an entire function) 315; (Operator algebras) 357.
- Budden, K. G. (Limiting polarization) 453.
- Budini, P. (Ionisation und Energieverlust eines Teilchens) 234.
- — e G. Lanza (Componente „N“ dei raggi cosmici) 453.
- Bueren, H. G. van (Attraction) 448.
- Buess, R. s. I. Prigogine 196.
- Bulgakov, B. V. (Teilbarkeit rechteckiger Matrizen) 19.
- Bullen, K. E. (Mechanics) 175.
- Bundgaard, Svend (Homotopy in complexes) 421.
- Bureau, Werner (Grundmannigfaltigkeiten) 144.
- Burchall, J. L. (Determinants) 71.
- Bureau, Florent (Transformations engendrées par des systèmes de fonctions) 324.
- Burgess, C. E. (Continua and their complementary domains. II.) 419.
- Burhop, E. H. S. (Auger effect) 236.
- Burkill, J. C. (Rearrangements of functions) 61.
- Burniat, Pol (Modèles de surfaces canoniques) 399.
- Burton, L. P. and William M. Whyburn (Differential systems) 328.
- Bush, K. A. (Theorem due to MacNeish) 17; (Orthogonal arrays) 17.
- Butler, S. T. (Nuclear shell model) 228.
- Bykov, Ja. V. (Integro-Differentialgleichungen) 346.
- Cabannes, Henri (Courbure au sommet d'une onde de choc) 188.
- Caccioppoli, Renato (Généralisation des familles normales) 321; (Généralisation des fonctions analytiques) 321.
- Cafiero, Federico (Ordine d'integrazione) 292.
- Caianiello, E. R. (Fermion types) 450.
- Calderon, A. P. and A. Zygmund (Singular integrals) 102.
- Callen, Herbert B. and Richard F. Greene (Irrever-

- sible thermodynamics) 193.
- Campedelli, Luigi (Esercitazioni di geometria) 143.
- Cap, Ferdinand (Relativitätstheorie und Feldtheorie) 211; (Wechselwirkung von Leptonen) 220.
- Carathéodory, C. (Conformal representation) 79.
- Čarin, V. S. (Lobačevskische Geometrie) 139.
- Carleson, Lennart (Zeros of functions) 76; (Bounded analytic functions) 353.
- Carlitz, Leonard (Paper of Shanks) 16; (Bernoulli and Euler polynomials) 254; (Index divisors) 273.
- Carlson, K. H. and L. C. Young (Harmonic surfaces) 61.
- Carmody, Francis J. (Planetary theory) 3.
- Carnap, Rudolf (Continuum of inductive methods) 372.
- Carpani, Ada (Funzione ipergeometrica confluyente) 309.
- Cartan, Henri („Chaines de syzygies“) 145.
- Casal, Pierre (Énergie cinétique) 183.
- Casas, Pablo (Gruppentheorie. I. II.) 22.
- Cassels, J. W. S. (Paper of Niven and Zuckerman) 44; (Linear forms) 49; (Perronscher Satz) 51.
- Cassina, U. (Ideografia) 7.
- Castellano, Vittorio (Statistische Methodenlehre) 378.
- Castro Brzezicki, A. de (Bewegung der Raketen) 181; (Bemerkung zu $xy'' + ny' + axy = 0$) 328.
- Cavallaro, Vincenzo G. (Teoremi di geometria piana) 139; (Stereometry) 139; (Trisezione dell'angolo) 244.
- Cavé, René (Contrôle statistique) 379.
- Centre Belge de Recherches Mathématiques (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique) 145.
- Cesari, Lamberto (Retrazione per superficie) 60.
- Četaev, N. G. (Instabilität des Gleichgewichts) 179.
- Četković, Simon (Équations d'ensemble) 56.
- Chabauty, Claude (Empilement de sphères) 51; (Géométrie des nombres) 51.
- Chambers, R. G. (Twoband effect) 235.
- Chance, J. and G. F. Sims (Mathematics of technology) 128.
- Chandler, K. N. (Record values) 383.
- Chandrasekhar, S., Donna Elbert and Ann Franklin (Isotropic scattering. I.) 372.
- Chandrasekharan, K. and S. Minakshisundaram (Typical means) 299.
- Charrueau, André (Complexes linéaires) 144.
- Chartres, B. A. and H. Mesel (Angular distribution for nuclear collisions) 223.
- Charwat, A. (Losses in cascades) 453.
- Chatterji, Phatik chand s. Hari das Bagchi 308.
- Chazy, Jean (Déterminant fonctionnel de la mécanique céleste) 238.
- Chester, W. (Decay of shock waves) 189.
- Cheston, W. B. (Interaction of pi-meson with deuteron) 220.
- Chiang, Tse-Pei (Normalcy of operators) 112.
- Chincin, A. Ja. s. B. V. Gnedenko 121.
- Chisini, O. (Corrispondenza) 396.
- Chung, Kai Lai and Harry Pollard (Renewal theory) 124.
- — — J. Wolfowitz (Limit theorem) 124.
- Church, Alonzo and W. V. Quine (Definability and decidability) 9.
- Churchill, R. V. (Integral transforms) 103.
- Clagett, Marshall (De Sphaera) 1; (J. de Muris) 242.
- Clarion, Claire s. J. Valensi 193.
- Clarke, F. Marion (Perlis-Jacobson radical) 32.
- Clement, Mary Dean (Space • of immersion) 408.
- Clemmow, P. C. and Cara M. Munford (Table) 202.
- Clendenin, W. W. s. R. E. Meyerott 364.
- Clowes, J. S. (Groups of odd order) 26.
- Coburn, N. (Homogeneous turbulence) 183.
- Cocchi, Giovanni (Coefficienti di Coriolis) 177.
- Cochran, William G. (χ^2 -test) 131; (Biometrie) 136.
- Coddington, E. A. and N. Levinson (Convergence of successive approximations) 83; (Perturbations of linear systems) 87.
- Coffman, Moody L. (Velocity-dependent potentials) 177.
- Cohen, I. Bernhard s. I. Newton 5.
- Cohn, Harvey (Periodic algorithm) 48.
- P. M. (Theorem of Magnus) 25; (Tensor-spaces) 259.
- Cohn-Vossen, S. s. D. Hilbert 388.
- Cole, Julian D. (Fundamental solution of $w_{yy} + w_{zz} = 0$) 345.
- Colmez, Jean (Espaces pré-compacts) 162.
- Colombo, Giuseppe (Sistema non-lineare) 331.
- Serge (Équation intégrale différentielle) 346; (Équations intégrales de Volterra) 347.
- Conforto, Fabio (Numeri reali) 53.
- — e Francesco Gherardelli (Classificazione delle superficie ellittiche) 147.
- Connor, W. S. s. R. C. Bose 129.
- Consael, R. (Processus de Poisson) 125.
- Conte, Luigi („Figura di Torricelli“) 5; (Caso irriducibile dell'equazione cubica) 6; (Fermat) 244.
- Conti, Roberto (Equazione di Liénard) 88; (Nucleo della equazione integrale) 332.
- Conway, H. D. s. M. K. Hwang 425.
- Conwell, E. M. (Mobility in electric fields) 455.
- Coolidge, J. L. (Story of curvature) 4; (Polar coordinates) 4.
- Cooperman, Philip (Ordinary differential equations) 99.
- Corben, H. C. (Current density) 218.
- Corinaldesi, E. (Current fluctuations) 450.
- — and L. Trainor (Atomic scattering of electrons) 453.
- — L. Trainor and Ta-You Wu (Scattering of electrons) 450.

- Corrsin, Stanley (Problem of Rayleigh) 184.
- Costa de Beauregard, Olivier (Reality problem in quantum mechanics) 212.
- Costabel, Pierre s. J. E. Hofmann 243.
- Couchet, Gérard (Efforts aérodynamiques) 183.
- Coulson, C. A. (Waves) 91.
- Courant, Richard, Eugene Isaacson and Mina Rees (Nonlinear hyperbolic differential equations) 117.
- Court, Nathan Altshiller (Orthological triangles) 392; (Tétraèdres orthologiques) 392; (Tetrahedron) 392.
- Couteur, K. J. Le s. Le Couteur, K. J. 451.
- Cox, D. R. (Double sampling) 132; (Systematic experimental designs) 379.
- Craig, Homer V. (Jacobian extensors) 403.
- William and W. V. Quine (Symmetric relation) 9.
- Crespo Pereira, R. (Problem von Pedrayes) 6.
- Crocco, Luigi and Lester Lees (Mixing theory for flows and streams) 185.
- Croisot, R. s. M. L. Dubreil-Jacotin 55.
- Cundy, H. M. and A. P. Rollett (Mathematical models) 388.
- Čunichin, S. A. (Untergruppen einer endlichen Gruppe) 26.
- Curry, Haskell B. (Definition of negation) 251.
- Curtis, Charles W. (Additive ideal theory) 32.
- M. L. and G. S. Young (Dimension) 163.
- Czwalina, Arthur s. Diophantos aus Alexandria 2.
- Dalénus, Tore (Optimum stratification) 128; (Geschichtetes Stichprobenverfahren) 380.
- Dantzig, D. van s. N. G. de Bruijn 19.
- Dänzer, H. (Einschwingvorgänge) 440.
- Darling, D. A. (Addition of random variables) 375.
- Daudel, Raymond (Notion de couche) 227.
- Davenport, H. (Covering by spheres) 50; (Algebraic number-field) 274.
- — s. R. P. Bambah 51.
- David, F. N. and N. L. Johnson (Analysis of variance tests) 383.
- H. A. (Maximum F -ratio) 129.
- Davis, Anne C. et Waclaw Sierpiński (Types d'ordre distincts) 57.
- R. B. (Boundary value problem) 336.
- Day, J. W. R. (Bernoulli numbers) 81.
- Dean, Burton Victor (Near rings) 267.
- DeBaggis, H. F. (Dynamical systems) 330.
- Debreu, Gerard (Equilibrium existence theorem) 388.
- Dedò, Modesto (Trasformazione analitica) 146.
- Dekker, A. J. and A. van der Ziel (Production of secondary electrons) 456.
- Delange, Hubert (Formule de Tehebichef) 115; (Théorème taubérien) 314.
- Delcourte, M. (Résidus quadratiques) 45.
- Delerue, Paul (Image en calcul symbolique) 103.
- Denjoy, Arnaud (Ensemble ordonné) 286.
- Dennis, K. E. s. D. E. Barton 122.
- Deny, Jacques (Balayage) 344; (Familles fondamentales) 344.
- Deppermann, K. s. W. Franz 202.
- Destouches-Février, P. (Prévisions) 212.
- Detœuf, J.-F. s. P. Maignan 122.
- Deuring, Max (Elliptische Funktionenkörper) 271.
- Deverall, L. I. and C. J. Thorne (Special functions) 307.
- Diaz, J. B. and R. C. Roberts (Dirichlet difference boundary value problem) 366.
- Diemer, G. and H. Dijkgraaf (Langmuir's ξ, η tables) 372.
- Dijkgraaf, H. s. G. Diemer 372.
- Dilworth, R. P. and J. E. McLaughlin (Distributivity in lattices) 261.
- Dingle, R. B. (Theories of helium II.) 232.
- Diophantos aus Alexandria (Arithmetik) 2.
- Dirac, G. A. (Equichordal points) 158; (Abstract graphs) 170; (Colouring of maps) 170; (Map-colour theorems) 422.
- Dirac, P. A. M. (Is there an aether?) 207.
- Dive, Pierre (Impossibilité d'une stratification) 239.
- Dixmier, J. (Algèbres quasi-unitaires) 356; (Applications) 357.
- D'jakov, G. P. (Sättigung von Paareffekten) 233.
- Doak, P. E. (Reflexion of acoustic pulse) 435.
- Dolanský, Ladislav and Marie P. Dolanský (Table) 372.
- Marie P. s. Ladislav Dolanský 372.
- Domínguez, Alberto González s. González Domínguez, Alberto 354.
- Donoghue jr., William F. and Kennan T. Smith (Locally convex spaces) 106.
- Douglis, Avron (Existence theorems) 91.
- Dragonette, Leila A. (Mock theta series) 279.
- Draper, J. (Distributions) 121.
- Drazin, M. P. and J. Stanley Griffith (Decimal representation of integers) 44.
- Drell, S. D. and E. M. Henley (Meson-nucleon scattering) 221.
- Dressel, F. G. s. J. J. Ger-gen 322.
- Driest, E. R. van (Turbulent boundary layer) 186.
- Drion, E. F. (Distribution-free tests) 382.
- Drucker, D. C. and W. Prager (Soil mechanics and plastic analysis) 432.
- — — W. Prager and H. J. Greenberg (Limit design theorems) 432.
- Dubjago, A. D. (Lobačevskijs Reise nach Penza) 245.
- Dubreil-Jacotin, Marie-Louise (Treillis et demi-groupes réticulés) 30.
- — — et R. Croisot (Équivalences régulières) 55.
- Dufresnoy, Jacques et Charles Pisot (Problème de M. Siegel) 275.
- Dunbar, Allen S. (Antenna beam shaping) 442.
- Duncan, Acheson J. (Quality control) 379.
- Dunford, Nelson (Spectral theory. II.) 359.

- Dungen, F. H. vanden (Équation des ondes. II.) 118.
- Duparc, H. J. A. (Canonical forms) 253; (Carmichael numbers) 277.
- Durham, F. P. (Supersonic flow) 191.
- Dye, H. A. (Radon-Nikodým theorem) 111.
- Dynkin, E. B. (Maximale Untergruppen) 23; (Topologische Invarianten der linearen Darstellungen der unitären Gruppe) 260.
- Dyson, F. J. s. M. Baranger 218.
- Džrbašjan, M. M. (Eindeutigkeit und Darstellbarkeit analytischer Funktionen) 74.
- Eckert, Hans U. (Turbulent boundary layer) 186.
- Eden, R. J. (Bound states. I.) 219.
- Eder, Gernot (Marchsche Theorie einer universellen Länge) 212; (Bindungszustände) 228.
- Edmonds, A. R. and B. H. Flowers (*jj*-coupling. II. III.) 227.
- Edrei, Albert (Mappings) 163.
- Edwards, R. E. (Function holomorphic in a half-plane. II.) 108.
- S. F. (Interaction of alpha-particles) 229.
- Efimov, N. V. (Starrheit und Unverbiegbarkeit) 150.
- Eggleston, H. G. and S. J. Taylor (Equilateral triangles) 158.
- — — — H. D. Ursell (Analytic functions) 310.
- Ehrmann, Hans (Freie ungedämpfte Schwingung) 178.
- Eichler, Martin (Kristallgitter) 31.
- Eilenberg, Samuel and Norman Steenrod (Algebraic topology) 414.
- Einstein, Albert s. H. A. Lorentz 206.
- — s. I. Newton 5.
- Eisenhart, Luther P. (Generalized Riemann spaces. II.) 153.
- Elbert, Donna s. S. Chandrasekhar 372.
- Elfving, G. (Linear regression theory) 134.
- Eliassen, Arnt (Meridional circulation) 240.
- Elliott, Joanne (Integral equations) 347.
- Ellis, David (Construction of homology groups) 55; (Abstract distance geometry. III.) 254.
- J. W. (Set-separation) 286.
- El'sgol'c, L. E. (Variationsrechnung) 98.
- Eltermann, H. (Rekursive Folgen) 363.
- Emch, Arnold (Catcaustica) 4.
- Emersleben, Otto (Potenzreihen) 302.
- Emerson, Marion Preston (Modular lattices) 264.
- Emory, F. L. s. P. S. Marquis de Laplace 372.
- Epheser, Helmut und Friedemann Stallmann (Konforme Abbildung eines Parallelstreifens) 318.
- Epperson, E. R. s. G. W. Spenceley 371.
- Epstein, Saul T. (Impulse approximation) 223.
- Erdős, P. (Riemann integral) 62; (Euler summability) 301.
- — and L. Mirsky (Divisor function $d(n)$) 46.
- — s. N. G. de Bruijn 63.
- Erginsoy, Cavid (Energy states in semiconductors) 236.
- Ericksen, Jerald L. (Jets) 183.
- Erismann, Th. (Integrieranlage) 368.
- Errera, Alfred (Polyèdres de genre zéro) 169; (Problème des quatre couleurs) 422.
- Erugin, N. P. (Automatische Reglersysteme) 179; (Differentialgleichungssysteme) 328.
- Escardó, E. Linés s. Linés Escardó, E. 22.
- Estill, Mary Ellen (Primitive dispersion set) 164.
- Evans, Trevor (Embedding theorems) 21.
- Everett, R. R. (Whirlwind I computer) 370.
- Evgrafov, M. A. (Umkehrung des Abelschen Satzes) 311.
- Fabroni, Evelio O. (Zeitreihen) 379.
- Fabre de la Ripelle, Michel (Équations de perturbation) 211.
- Faddeev, D. K. und I. S. Sominskij (Höhere Algebra) 252.
- Faggiani, Dalberto (Proposizioni primitive della fisica) 172.
- Falk, Sigurd (Iterationsverfahren) 363.
- Fan, Ky (Theorem of Banach) 285; (Fixed-point theorems) 351; (Tucker's combinatorial lemma) 420.
- Fáry, István (Anneaux spectraux. I. II.) 165.
- Favre, Henry et Bernhard Gilg (Plaque rectangulaire) 423.
- Fawaz, A. Y. (Analytic theory of numbers) 279.
- Federhofer, K. (Stabilität) 427.
- Fedorov, F. I. (Relativistische Wellengleichungen) 216.
- Feldman, David (Meson-nucleon scattering) 223.
- Felker, J. H. (Transistor) 119.
- Fell, J. M. G. and Alfred Tarski (Algebras whose factor algebras are Boolean) 264.
- Feller, William (Associated semi-groups of transformations) 93.
- Féron, Robert (Convexité et information) 135.
- Ferrari, Carlo (Laminar boundary layer) 186.
- Ferroni, S. (Couplings in beta-decay theory) 451.
- Fert, Charles (Trajectoires électroniques paraxiales) 204.
- Feshbach, Herman and S. I. Rubinow (Scattering) 223.
- — s. M. Lax 221.
- — s. R. L. Pease 228.
- Fettis, Henry E. (Wave-guide fed slots) 202.
- Fialho, G. E. A. and J. Tiomno (Gamma radiation) 230.
- Fialkow, Aaron and Irving Gerst (Transfer function of networks) 199.
- Fichera, Gaetano („Kernel function“) 319; (Derivata obliqua) 343.
- Ficken, F. A. (Parabolic problems) 337.
- Finetti, Bruno de (Représentation graphique pour grandeurs actuarielles) 387.
- Finn, Robert (Théorème de Picard) 322.

- Finney, D. J. (Probit analysis) 128.
- Finzi, Arrigo (Théorème de Liouville) 157.
- Bruno (Discontinuità dei campi elettromagnetici) 197; (Spazio-tempo come modello) 207; (Teoria relativistica unitaria) 210; (Principio della minima azione. II.) 214.
- Fischer, Dietert (Fokussierungseigenschaften) 205.
- Joh. (Projektive Papiere) 119.
- Peter und Albert Kochendörfer (Versetzungen) 454.
- Flowers, B. H. (Nuclear f -shell) 226; (jj -coupling. I.) 226; (IV.) 227.
- — — s. A. R. Edmonds 227.
- Floyd, E. E. (Periodic maps) 421.
- Flügge, S. (Zwei-Nukleonen-Problem) 228.
- Fognolo Massaglia, Bruna (Propagazione di onde elastiche) 434.
- Fogel, K.-G. (Wave equation) 225.
- Fokker, A. D. (Tracks of tops' pegs) 176.
- Foldy, Leslie L. s. J. M. Berger 217.
- — — s. N. M. Kroll 221.
- Foley, H. M. s. R. A. Frosch 453.
- Foll, Jean Le s. Le Foll, Jean 192.
- Fomin, S. V. (Systeme mit invariantem Maß) 89.
- Föppl, Ludwig (Elliptischer Hohling) 425.
- Forrester, Amasa (Involutory transformations) 421.
- Jay W. (Digital computers) 119.
- Forsythe, George E. and Theodore S. Motzkin (Gauss' transformation) 362.
- Fortet, Robert et Édith Mourier (Loi des grands nombres) 124.
- Foster, F. G. (Markov chains) 125; (Markov chain derivation) 376.
- Fourès, L. (Surfaces de Riemann) 73.
- Frank, Ernest (Electric potential) 198.
- R. M. and K. L. Yudowitch (X-ray scattering) 234.
- Frank-Kameneckij, D. A. (Schwingungen in Sternen) 240.
- Franklin, Ann s. S. Chandrasekhar 372.
- Franz, Walter (Innere Feldemission) 236; (Elektronische Leitung) 236.
- — und K. Deppermann (Beugung am Zylinder) 202.
- Fraser, D. A. S. (Statistics and selection) 133; (Confidence bounds) 380.
- Fréchet, Maurice (Solutions non commutables) 18; (Familles de fonctions) 322.
- Freud, Géza ((C;1)-Summierbarkeit) 304; (Orthogonale Polynomreihen) 305; (Satz von Fejér) 311.
- Fricke, W. (Geschwindigkeitsverteilung im Sternsystem) 238.
- Fridman, M. M. (Verbiegung einer Platte) 425.
- Friis, Harald, T. s. S. A. Schelkunoff 440.
- Frisch, Ragnar (Index numbers) 138.
- Fröhlich, H. (Interaction of electrons) 455.
- Frosch, R. A. and H. M. Foley (Magnetic hyperfine structure) 453.
- Fuchs, L. (Subdirect unions. I.) 30; (Zappa extension) 256.
- — and T. Szele (Complex numbers) 53.
- Fujinaka, Hiroshi (Integral inequality) 295.
- Fulks, W. (Heat equation) 93.
- Fuller, F. B. (Trajectories in a torus) 89.
- Fusa, Carmelo (Lemma di Chisini) 396.
- Gaeta, Federico (Complementi alla teoria delle varietà algebriche V_{r-2}) 400; (Curve origini di una catena di resti minimali. II.) 400.
- Gagaev, B. M. (Fourierintegral) 295; (Integrodifferentialgleichungen) 345.
- Gaier, Dieter (Summierbarkeit an der Konvergenzgrenze) 312.
- Galafassi, Vittorio Emanuele (Falde delle rigate) 147; (Problema algebrico) 400.
- Gallarati, Dionisio (Superficie) 400.
- Gallego-Diaz, José (Nuova metrica) 172.
- Galli, Mario (Deformazioni relativistiche. II.) 208.
- Gamba, Augusto (Théorie des groupes et physique quantique) 261.
- Gandini, Carla („Grandi indici“) 77.
- Gandz, Solomon (Division of the hour) 2.
- Garabedian, P. R., H. Lewy and M. Schiffer (Cavitational flow) 182.
- García, Godofredo (Absoluter Differentialkalkül) 409.
- Pradillo, Julio (Permutationen) 17; (Monogenität) 323.
- Gardner, A. („Problem of intervals“) 376.
- G. H. F. (Rigid body motions in special relativity) 207.
- Gaschütz, Wolfgang (Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen) 27; (Fundamentalsatz von Maschke) 27.
- Gatteschi, Luigi (Limitazione dell'errore) 307.
- Gavrilov, N. I. (Stabilität) 329.
- Gaydon, F. A. (Torsion and tension) 432.
- Geerk, J. und C. Heinz (Fokussierung) 204.
- Géhéniau, J. (Espace du noyau et structure en couches) 227.
- Gel'fond, A. O. (Differenzenrechnung) 332; (Interpolationsproblem) 332.
- Geltman, S. s. R. E. Meyerott 364.
- Georgiev, G. (Automorphismes à points fixes) 169.
- Gephart, Landis (Linear algebraic systems) 120.
- Gerber, Robert (Écoulements plans) 183.
- Gergen, J. J. and F. G. Dressel (p -regular mapping) 322.
- Germay, R. H. (Méthode des fonctions majorantes) 347.
- Gerst, Irving s. A. Fialkow 199.
- Getmancev, G. G. und V. L. Ginsburg (Radioausstrahlung der Sonne) 240.
- Ghaffari, A. (Écoulement compressible subsonique) 185.
- Gherardelli, Francesco s. F. Conforto 147.

- Ghizetti, Aldo (Trasformazione di Laplace) 348.
- Gibbons, J. J. and R. L. Schrag (Wave equation) 443.
- Gilbert, C. (Statistical systems of particles) 209.
- Gilg, Bernhard s. H. Favre 423.
- Gillis, Paul P. (Forme différentielle) 89; (Équations de Monge-Ampère) 336.
- Gillman, Leonard (Ordered sets) 288.
- Gini, Corrado (Concetto di media) 244.
- Ginsburg, V. L. s. G. G. Getmancev 240.
- Giuliano, Landolino (Unità della soluzione per una classe di equazioni differenziali) 92.
- Glandsdorff, P. (Variation d'une intégrale multiple) 100.
- Glaus, Rudolf (Kursreglung) 180.
- Glebskij, Ju. V. (Konvergenz dem Inhalt und dem Funktional nach) 100.
- Gloden, A. (Diophantine equations) 40; (Systèmes multigrades remarquables) 40.
- Gluškov, V. M. (Nilpotente Gruppen) 24.
- Gnedenko, B. V. und A. Ja. Chinčenko (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 121.
- — — und V. S. Michalevič (Empirische Verteilungsfunktionen) 122.
- Godeaux, Lucien (Transformées d'une conique) 144; (Involutions rationnelles. II.) 147; (Points de diramation) 147; (Cubiques planes) 397; (Singularités des points de diramation) 397; (Point de diramation) 398; (Surfaces desmiques) 400.
- Goetz, J. A. and A. W. Brooke (Electron tube experience) 369.
- Goldberg, Michael (Squaring of surfaces) 140.
- Gol'dman, M. A. und S. N. Kračkovskij (Nullelemente eines linearen Operators) 360.
- Gombás, P. (Statistische Theorie des Atomkerns. II.) 224.
- González, Mario O. (Durch Differentialgleichung definierte Funktion) 311.
- González Domínguez, Alberto (Distributionen) 354.
- Goodman, Leo A. (Probabilistic approach) 374; (Samples from k lists) 382.
- Goormaghtigh, M. R. (Lemoine's theorem) 140; (Pôle multi-angulaire) 140; (Quadrilatère complet) 392.
- Gordon, W. L. and C. W. McArthur (Uniform Cauchy points) 417.
- Görtler, H. (Laminare Grenzschicht. I.) 436.
- Gorup, Guntram v. (Strömungsfunktionen) 436.
- Götllind, Erik (Article by R. K. P. Singh and R. Shukla) 6; (Sheffer functions) 16.
- Gottschalk, W. H. (Extremum law) 285.
- Gotusso, Guido (Corrispondenza tra due piani) 323.
- Govinda Rao, N. S. s. Rao, N. S. Govinda 6.
- Grad, Harold (Profile of a shock wave) 188.
- Graf, Ulrich und Hans-Joachim Henning (Statistische Methoden) 127; (Ausreißerproblem) 129.
- Graffi, Dario (Problema della derivata obliqua) 343.
- Graiff, Franca (Parallelogrammi chiusi) 412.
- Grammel, G. (Erzwungene Schwingungen) 434.
- Graves, Lawrence M. s. R. G. Bartle 109.
- Gray, C. A. M. (Slabs under loads) 425.
- Green, H. S. (Second virial coefficient) 195.
- — — s. H. Messel 452.
- J. A. (Groups with prime-power exponent) 25.
- John W. (Approximately convex functions) 296.
- Greenberg, H. J. s. D. C. Drucker 432.
- Greene, Richard F. s. H. B. Callen 193.
- Grenander, Ulf und Murray Rosenblatt (Spectral analysis) 125.
- Griffith, B. A. and K. W. Smillie (Punched-card method) 118.
- J. Stanley s. M. P. Drazin 44.
- Grobman, D. M. (Differentialgleichungssysteme) 86.
- Grosberg, Ju. I. (Inhomogene Randbedingungen) 94.
- Grotemeyer, Karl-Peter (Integralsätze der affinen Flächentheorie) 406; (Affinsphären) 406.
- Grünsch, H. J. (Fehlerabschätzung) 97.
- Guggenheimer, H. (Vierdimensionale Einsteinräume) 207.
- Guillotin, R. (Cubique et familles de triangles associés) 391.
- Gupta, Hansraj (Sums of powers) 16.
- K. K. (Fierz-Pauli equation) 216.
- Suraj N. (Einstein's gravitational field) 215.
- Guth, E. s. J. A. Thie 229.
- Guy, Roland (Équations opératorielles intégrales) 100.
- Guzzo, Augusto (Euclide) 1; (Archimede) 1; (Tolomeo) 2.
- Haack, Wolfgang (Randwertprobleme höherer Charakteristik) 340.
- Haacke, Wolfhart (Stabilität eines Systems von Differentialgleichungen. I.) 330; (Stabilitätskriterium für Schwingungen) 439.
- Haag, Rudolf (Kanonischer Formalismus) 175.
- Haantjes, J. (Satz von Ptolemäus) 138.
- Haar, D. ter (Perfect Bose-Einstein gas) 195.
- Hadwiger, H. (Einlagerung von Kugeln) 159.
- — — und A. Kirsch (Zerlegungsinvarianz des Integrals) 292.
- Hagstroem, K.-G. (Pensions de retraite) 137.
- Hall jr., Marshall (Abelian groups) 27.
- Hällström, Gunnar af (Quasikonforme Abbildung) 318.
- Halperin, Israel (Supremum of additive functions) 358.
- Max (Truncated samples) 133; (Truncated distribution) 133.
- Halpern, Otto (Condensation phenomenon. II.) 195; (Quantum mechanics) 212; (Neutron optics) 222.
- Halphen, Étienne (Famille de fonctions) 71.
- Hamada, T. and M. Sugawara (Isotopic spin of nucleons) 226.

- Hammersley, J. M. (Lagrangian integration coefficients) 115; (Slutzky-Fréchet theorem) 123; (Asymptotic forms of frequency functions) 123.
- Hara, Osamu and Haruo Shimazu (Non-local field. I.) 219; (Self energy problem of the photon) 449.
- Hardy, G. H. (Pure mathematics) 283.
- — — J. E. Littlewood and G. Polya (Inequalities) 53.
- Hartley, H. O. (Autoregressive schemes) 385.
- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Geodesic torsions) 150; (Geodesic fields) 153.
- Haselgrove, C. B. s. F. C. Auluck 280.
- Hasenjaeger, G. (Peano-Arithmetik) 11.
- Hashitsume, Natsuki (Irreversible production) 194.
- Hasse, Helmut (Mathematik) 6; (Artinsche Vermutung) 42.
- Haupt, Otto (Abbildungssatz von Béla Sz. Nagy) 154; (Additive Funktionen) 290.
- Havas, Peter (Motion of point particles. I.) 213; (Paires de corpuscules) 216.
- Hawley, N. S. (Complex fiber bundles) 422.
- Haywood, J. H. (Equations of motion) 446.
- Head, J. W. (Decomposition of functions) 68.
- Heffter, Lothar (Gleichmäßige Differenzierbarkeit und Stetigkeit) 310.
- Heider, L. J. (Banach spaces) 352.
- Heilbronn, Georges ($s + f(y, x, z, p, q, r) = 0$) 334.
- Heinrich, G. (Strömende Medien) 183, 184.
- Wladimír Wáclav (Satellite problem of three bodies) 180.
- Heinz, C. s. J. Geerk 204.
- Heisenberg, W. (Mesonenerzeugung) 220.
- Hellwig, Günter (Randwertprobleme mit Anwendung auf Verbiegung von Flächenstücken) 96; (Elliptisches System) 340.
- Henderson, K. B. s. D. J. Aiken 16.
- Henley, E. M. s. S. D. Drell 221.
- Henning, Hans-Joachim s. U. Graf 127, 129.
- Henrici, Peter
 $(d \int e^{b(x + \alpha \cos x)} dx)$ 70.
- Hermes, Hans (Grenze in der Mathematik) 285.
- — und H. Scholz (Mathematische Logik) 248.
- Hernandez, Enrique Juan (Wahrscheinlichkeitsgesetze von Laplace-Gauss und Cauchy. II.) 121.
- Herrmann, A. (Poincarésche Formel) 103.
- Herz, Jean-Claude (Polynome différentiels) 326.
- Herzfeld, K. F. s. H. Sponer 232.
- Hesselbach, Benno (Konstruktion eines E^3) 391.
- Hickerson, T. F. (Beam deflection) 426.
- Higman, Donald Gordon (Focal series) 258.
- Graham (Divisibility in abstract algebras) 34.
- Hilbert, D. and S. Cohn-Vossen (Geometry and imagination) 388.
- Hiramatu, Hitosi (Projective collineations) 414.
- Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder (Quasi-analytic functions) 297.
- Hitotumatu, Sin (Maximal ideals of analytic functions) 352.
- — and Osamu Kôta (Ideals of meromorphic functions) 324.
- Hjelmstev, Johannes (Monotone Raumkurven im R_n) 156.
- Hlavatý, Václav (Unified theory of relativity) 209; (Relativity. A.) 210.
- Hlawka, Edmund (Figurengitter) 50.
- Hochart, M. (Bénéfices de mortalité) 387.
- Hochschild, G. and T. Nakayama (Cohomology in class field theory) 38.
- Hodge jr., P. G. (Sign of a function) 62.
- Hodges jr., J. L. and E. L. Lehmann (Statistical decisions) 383.
- Hoerner, Sebastian von (Rotierende Gasmasse) 191.
- Hoffmann, Banesh (Dirac's theory) 198; (Energy momentum tensor) 439.
- Ernst s. Nikolaus von Cues 242.
- T. A. (Theory of solids. III, IV.) 455.
- Hofmann, Josef Ehrenfried (Näherungsweise Kreisquadratur) 5.
- — — s. Nikolaus von Cues 242.
- — — et Pierre Costabel (Problème de Roberval) 243.
- Josepha s. Nikolaus von Cues 242.
- Hogarth, J. E. and W. H. McCrea (Rigid rod) 207.
- Hole, N. (Radioaktiver Zerfall) 451.
- Holmberg, B. (Uniqueness of potential) 439.
- Honerjäger, R. (Elektromagnetische Wellenleiter) 199.
- Hönl, H. (Feldmechanik des Elektrons) 213.
- — und A.-W. Maue (Beugungstheorie) 201.
- Hopkins, H. H. (Wave aberration) 443.
- Hori, Shoichi (S -matrix) 217; (S -matrix series) 450.
- Horie, Hisashi, Taro Tamura and Shiro Yoshida (Neutron-deuteron scattering) 450.
- Horváth, J. (Primzahlen. I.) 44.
- — I. und A. Moór (Finslersche Geometrie) 211.
- Horvitz, D. G. and D. J. Thompson (Sampling without replacement) 383.
- Hsiung, Chuan-Chih (Curves in Riemannian space) 409.
- Huang, Kerson (Zitterbewegung of the Dirac electron) 212.
- M. K. and H. D. Conway (Bending of a plate) 425.
- Hugenholtz, N. M. (Tops rising by friction) 177.
- Huth, J. H. (Thermal stresses) 430.
- Hyers, D. H. and S. M. Ulam (Approximately convex functions) 295.
- Hyrenius, Hannes (Sampling) 379.
- Igusa, Jun-ichi (Domain of regularity) 323.
- Ikeda, M. (Fundamental equations of physics) 207.

- Inaba, Eizi (Relatively complete fields) 270.
- Inagaki, Takeshi (Ensemble partiellement ordonné) 286.
- Ingraham, Richard L. (Conformal relativity) 207.
- Inoue, Nobuo (Flow of compressible fluid) 191.
- Isaacson, Eugene s. R. Courant 117.
- Ishaq, M. s. S. M. Shah 316.
- Ishiguro, Eiichi, Tadashi Arai and Masataka Mizushima (Molecular integrals. III.) 232.
- Iskraut, Richard W. (Remarks concerning a paper by Wilker) 177; (Angular momentum) 439.
- Issmann, Samuel (La Définition. I.) 247.
- Itô, Hiroshi (Continuous information) 135.
- Noboru (Theorem of L. Rédei and J. Szép) 257.
- Seizô (Brownian motions in a topological group) 126.
- Ivanenko, D. und N. Kolesnikov (Teilchen Elektrino) 216.
- Iwasawa, K. (Algebraische Funktionen) 270.
- J**ackson, James R. (Spaces of mappings on topological products) 418.
- Jacobsen, L. S. (Solving differential equations by phase-plane displacements) 367.
- Jaeger, Arno (Differentialgleichungen in Körpern) 36; (Ordered division rings) 266.
- Jaiswal, J. P. (Meijer transform. II.) 350.
- Jakimovski s. A. Amir 66.
- Jánossy, L. (Wave-particle problem) 447.
- Jauho, Pekka (Harmonic oscillator) 213.
- Javorskij, B. M. s. L. A. Vajnštejn 213.
- Jaynes, Edwin T. (Impedance) 199.
- Jean, Maurice (Couplage intermédiaire. I.) 218.
- Jeffery, G. B. s. H. A. Lorenz 206.
- Jeffreys, Bertha (Multipole radiation) 201.
- Harold (Gyroscopic systems) 87; (Thermal instability) 240.
- Jenckel, Ernst s. E. Klein 433.
- Jerrard, R. P. s. H. Poritsky 204.
- John, Fritz (Integration of parabolic equations. I.) 337.
- Johnson, N. L. (Parametric and random models) 132.
- — — s. F. N. David 383.
- R. E. (Domains of integrality) 31.
- Jones, C. W. (Table for Bessel functions) 372.
- F. (Set of pairs) 285.
- Robert T. (Minimum drag of airfoils) 437.
- Joos, G. und Th. Kaluza (Höhere Mathematik) 52.
- Jost, Res und Walter Kohn (Potential from a phase shift) 224; (Equivalent potentials) 225.
- Jowett, G. H. (Adding machine) 119.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 79, 103.
- Juan Hernandez, Enrique s. Hernandez, Enrique Juan 121.
- Jung, Hans (Elastisch gelagerte Kreisplatten) 429; (Plastischer Körper) 431.
- Juringius, Nils (Viereck) 140.
- Jurkat, W. und A. Peyerimhoff (Mittelwertsätze) 64.
- K**ac, A. M. (Kriterium für die Güte einer Regulierung) 180.
- M. s. T. H. Berlin 457.
- Kadison, Richard V. (Schwarz inequality) 357.
- Kadosch, Marcel (Variables de Lagrange) 192.
- — — s. J. Le Foll 192.
- Kahane, Jean-Pierre (Théorème de Carlson) 76.
- Kakutani, Shizuo (Quadratic diameter) 109.
- Kalicki, J. (Grau's ternary algebra) 15.
- Kalmár, László (Markov-Post theorem) 11.
- Kaluza, Th. s. G. Joos 52.
- Kamefuchi, S. (Radiative corrections to β -decay) 230.
- Kamenomostskaja, S. L. (Gleichungen vom elliptischen Typus) 341.
- Kametani, Shunzi (Normed fields) 114.
- Kamke, E. (Quasilineare Differentialgleichung) 90.
- Kamynin, L. I. (Wärmeleitungsgleichung) 92.
- Kanagasabapathy, P. (Product of linear forms) 49.
- Kanellos, Spyridonos G. (Wahrscheinlichkeitslehre. Bd. 1) 120.
- Kanitani, Joyo (Transformation infinitésimale) 413.
- Kanold, Hans-Joachim (Diophantische Gleichungen) 276; (Befreundete Zahlen) 277.
- Kaplan, E. L. (Tensor notation) 131.
- Wilfred (Advanced calculus) 283.
- Kaplansky, Irving (Orthogonal similarity) 107; (Banach algebras) 110; (Abelian groups) 258; (Algebras of type I.) 357.
- Kappos, Demetrios A. (Äquimeßbare Funktionen) 290.
- Karhunen, Karl (Wahrscheinlichkeitsrechnung) 126.
- Karpelevič, F. I. (Reelle Liesche Gruppen) 23; (Gruppe der komplexen unimodularen Matrizen) 268.
- Karplus, Robert and Abraham Klein (Atomic energy levels. I.) 231.
- — Abraham Klein and Julian Schwinger (Atomic energy levels. II.) 231.
- Kartha, Gopinath s. G. N. Ramachandran 234.
- Karunes, B. (Dislocation in a plate) 423.
- Kaščenko, Ju. D. s. L. D. Kudrjavcev 61.
- Katayama, Y. (Non-local field) 220.
- Katsurada, Yoshie (Craig ex-covariant differential) 403.
- Katz, Leo (Isolates in a social group) 126.
- Kawaguchi jr., Michiaki (Extensor) 403; (Multiple parameter extensor) 403.
- Kawai, Ryoichiro (Riemann-Roch-Weil's theorem) 39.
- Kearsley, M. J. (Curves) 158.
- Keilson, Julian and James E. Storer (Brownian motion) 195.
- Kelley, Henry J. (Stability characteristics) 180.
- Kemchadze, Š. S. (Reguläre p -Gruppen) 258.

- Kennedy, E. S. (Fifteenth-century planetary computer. II.) 3.
- Kibre, Pearl (Lewis of Caerleon) 4.
- Kikuchi, Shigetaka (Subspace in Finsler space) 412.
- Kilburn, T. s. F. C. Williams 370.
- Kimura, Toshiei s. H. Suura 217.
- King, Ronold (Antennas) 442.
- Kinoshita, Shin'ichi (Set of fixed points) 162.
- Kiro, S. N. (Analytische Lösungen) 335.
- Kirsch, A. (Zerlegungsgleichheit von Funktionen) 292. — s. H. Hadwiger 292.
- Kita, Hideji (Relativistic two-body problem) 219.
- Klee jr., V. L. (Invariant metrics) 29. — — — s. R. G. Anderson 157.
- Kleene, S. C. (Metamathematics) 7; (Gentzen's calculi) 250; (Finite axiomatizability) 250.
- Klein, Abraham s. R. Karplus 231. — Eberhard und Ernst Jenckel (Berechnung freier Schwingungen) 433. — O. (Emission of sound waves from an electron) 456.
- Kleinfeld, Erwin (Alternative division rings) 31.
- Knechtli, Ronald s. H. J. von Baeyer 200.
- Knödel, Walter (Primzahlen. II.) 45.
- Knopp, Konrad (Abelsche Sätze) 349.
- Knudsen, L. Lottrup (Integrals in antenna theory) 442.
- Kober, H. (Monotone singular function) 78.
- Kochendörfer, Albert s. P. Fischer 454.
- Kohler, Max (Erhaltungssätze der Energie und des Impulses) 208.
- Kohn, Walter (Periodic lattices) 235. — s. S. Borowitz 218. — s. R. Jost 224, 225.
- Kokoris, L. A. (Power-associative commutative algebras) 268.
- Koksma, J. F. (Continued fractions) 283.
- Koksma, J. F. and C. G. Lekkerkerker (Mean-value theorem) 315.
- Kolchin, E. R. (Picard-Vessiot theory) 333.
- Kolesnikov, N. s. D. Ivanenko 216.
- Kolodnyj, D. P. (Strahlungskoeffizienten) 240.
- Komatu, Yūsaku (Probability-theoretic investigations on inheritance VI. VII. VII₂. VII₃. VII₄. VII₅. VII₆. VIII₁. VIII₂. VIII₃) 386; (IX₁. IX₂. IX₃. IX₄. X₁. X₂. X₃. XI₁. XI₂) 387.
- König, H. W. (Elektromagnetisches Wellenbild) 211.
- Konishi, Isao (Uniform topologies) 162.
- Koppe, H. (Elektrische Leitfähigkeit von Metallen. I.) 236.
- Kopzon, G. I. (Zweidimensionaler Stoß) 183.
- Korn, Granino A. (Difference analyzer) 368.
- Koseki, Ken'iti (Ausnahmewerte der meromorphen Funktionen) 76.
- Košljakov, N. S. (Differentialgleichungen) 309.
- Kôta, Osamu s. S. Hitotumatu 324.
- Kotani, Tsuneyuki, Hisao Takebe, Minoru Umezawa and Yoshio Yamaguchi (Decay of neutron. I.) 451.
- Kothari, L. S. (Riesz potential) 224.
- Köthe, Gottfried (Randverteilungen) 352.
- Kožeurov, P. Ja. (Trigonometrie) 391.
- Kozlova, Z. I. (Mehrfache Trennbarkeit) 57.
- Kračkovskij, S. N. und A. A. Vinogradov (Gleichmäßige Konvexität eines Raumes) 351. — — s. M. A. Gol'dman 360.
- Kraitchik, Maurice (Factorization of $2^n \pm 1$) 39.
- Krasnosel'skij, M. A. (Abschätzung der Anzahl der kritischen Punkte von Funktionalen) 99; (Zerlegung von Operatoren) 359. — — und S. G. Krejn (Verteilung der Fehler bei der Lösung eines Systems linearer Gleichungen) 114; (Iterationsprozeß) 362.
- Krasovskij, N. N. (Stabilität von Bewegungen) 86. — — — s. E. A. Barbašin 330.
- Krat, V. A. (Bildung der Sterne) 240.
- Krbek, Franz von (Eingefangenes Unendlich) 241.
- Krejn, S. G. s. M. A. Krasnosel'skij 114, 362.
- Krelle, W. (Nationalökonomie) 137.
- Krieger, Cecilia s. W. Sierpiński 160.
- Kroll, Norman M. and Leslie L. Foldy (Charge symmetry on nuclear reactions) 221. — — — and Franklin Pollock (Radiative corrections) 231.
- Kronig, R. and A. Thellung (Hydrodynamics of non-viscous fluids) 448.
- Krüger, M. (Thermische und elektromagnetische Felder) 196.
- Krull, Wolfgang (Algebra) 18; (Halbgeordnete Gruppen) 22; (Hilbertscher Raum) 112.
- Kruppa, Erwin (Gegenstücke zum Meusnierschen Satz) 404.
- Krzywoblocki, M. Z. E. (Bergman's linear integral operator) 437; (Isotropie turbulence) 438.
- Kubo, Ryogo (Thermal ionization) 236. — Tadao (Bounded analytic functions) 317.
- Kucharski, W. (Hamel) 6.
- Kudrjavcev, L. D. und Ju. D. Kaščenko (Mehrfaches Lebesgue-Integral) 61; (Transformation im Integral) 61.
- Kuhn, H. W. (Subgroup theorems) 23.
- Kuipers, L. (Elementary functions) 295.
- Kullback, S. (Multivariate analysis) 135.
- Kunin, I. A. (Abweichungen, bei denen die Bewegungen stabil bleiben) 329.
- Kuper, C. G. (Superconductivity) 457.
- Kuramochi, Zenjiro (Potential theory) 96.
- Kuratowski, Kazimierz und Andrzej Mostowski (Mengenlehre) 53.
- Kurepa, Djuro (Produit de nombres complexes) 53; (Problème de Suslin) 287; (Matrices) 288.

- Kürşunoğlu, Behram (Gravitation and electrodynamics) 446.
- Kuwagaki, Akira (Fonctions de deux variables) 361; (Fonction inconnue de deux variables) 362.
- Kyhl, H. (Primzahlen) 278.
- Ladopoulos, P. D. (Métrique des courbes algébriques) 144.
- Lafoucrière, J. (Trajectoires) 204.
- Laguardia, Rafael (Iteration der Laplace-Transformation) 349.
- Lah, Ivo (Zinsfußproblem) 137.
- Lakshmana Rao, S. K. s. Rao, S. K. Lakshmana 306.
- Lakshmi Bai, C. (Multiplication of the Ethiopians) 2.
- Laman, G. (Distance geometry) 254.
- Lambe, C. G. (Statistics) 378.
- Landauer, Rolf (Hamilton-Jacobi theory) 177.
- Landsberg, P. T. (Semiconductors) 235.
- Lang, Serge and John Tate (Luroth's theorem) 38.
- Lanza, G. s. P. Budini 453.
- Laplace, Pierre Simon Marquis de (Probabilities) 372.
- Laptev, B. L. (Lobačevskijs frühe Arbeiten) 245.
- G. F. (Differentialgeometrische Untersuchungen) 409.
- Laue, M. v. (Relativitätstheorie. 1. Band) 444.
- Lauwerier, H. A. (Random walk) 376.
- Lawden, D. F. (Linear difference equations) 82.
- Lawrence, B. E. (Conic) 141.
- Lax, Melvin (Scattering of waves. II.) 235.
- and Herman Feshbach (Mesons in deuterium) 221.
- Peter D. (Green's function) 98.
- Le Couteur, K. J. (Nuclear evaporation) 451.
- Le Foll, Jean et Marcel Kadosch (Écoulements inertes) 192.
- Lebedinskij, A. I. (Diffuse Nebel) 239.
- Ledoux, P. (Asymétrie des courbes) 239.
- Lee, T. D. (Magneto-hydrodynamical fields) 196.
- Lees, Lester s. L. Crocco 185.
- Lefschetz, Solomon (Differential equations) 329.
- Lehmann, E. L. (Distributions) 384.
- — — s. J. L. Hodges jr. 383.
- H. (Strahlungskorrekturen) 218.
- Lehner, Joseph (Fuchsian groups) 82.
- Leighton, Walter (Differential equations) 325.
- Lekkerkerker, C. G. s. J. F. Koksma 315.
- Lelong, Pierre (Pseudo-convexité) 323; (Convexité et fonctions analytiques) 323.
- Leman-Schoeneberg (Vom Dezimalbruch zur Zahlentheorie) 39.
- Lenz, Hanfried (Schwarzsche Polygonabbildung) 318.
- Lepage, Th. (Polynômes irréductibles) 19.
- Lepore, Joseph V. (Meson theory) 224.
- Lesieur, Léonce (Condition de chaîne descendante) 263; (Décomposition dans demi-groupes) 263.
- Leslie, R. T. and E. R. Love (Mercer's theorem) 66.
- LeVeque, Wm. J. (Equation $a^x - b^y = 1$) 41; (Farey sections) 52.
- Levey, Martin (A. Savasorda) 242.
- Levi-Civita, Tullio e Ugo Amaldi (Meccanica razionale. I.) 172; (II., 1, 2) 173.
- Levinson, N. s. E. A. Codrington 83, 87.
- Levintov, I. I. („3/2-Gesetz“) 205.
- Levitin, B. M. (Satz von H. Weyl) 83.
- Levy, M. (Analyse des graphiques) 104.
- Lévy, Paul (Lois de probabilité) 122; (Séries aléatoires) 375.
- Lewis, H. W. (Meson production) 450.
- — — and G. H. Wannier (Model of a ferromagnet) 238.
- Lewy, H. s. P. R. Garabedian 182.
- Lieberman, Gerald J. (Inspection schemes) 128.
- Liepman, Hans W. (Turbulence problem. I. II.) 189.
- Liesse, Cl. (Théorie des couches nucléaires) 228.
- Linés Escardó, E. und R. Mallol Balmaña (t-Gruppen) 22.
- Linke, Paul F. (Eigentliche und uneigentliche Logik) 246.
- Linnik, Ju. V. (Primzahlen und Potenzen) 45; (Lineare Statistiken) 380.
- Lipschutz, Miriam (Theorem of Chung and Feller) 375.
- Littlewood, J. E. (Conjectural inequalities) 316.
- — — s. G. H. Hardy 53.
- Ljapunov, A. A. (P. S. Novikov) 6.
- Ljunggren, Wilhelm ($x^3 + 1 = 2y^2$) 41; (Problem proposed by Lucas) 41.
- Lloyd, Stuart P. (Successive nuclear radiations) 224.
- Lo, Hsu (Bending vibration) 436.
- Locher-Ernst, L. (Regelmäßige Polyeder) 394.
- Lochin, I. F. (Reihen von Dirichletschen Polynomen) 75.
- Lohr, Erwin (Mechanik der Festkörper) 172.
- Loinger, A. (Equazione di Dirac-Corben) 447.
- — s. E. Bellomo 447.
- Loizelier, Enrique Blanco (Statistische Qualitätskontrolle) 128.
- Łojasiewicz, S. (Équation fonctionnelle) 114.
- Loomis, L. H. (Theorem of Mackey) 355.
- Lopuchin, V. M. (Erregung von Schwingungen) 205.
- Loraine, Phyllis K. (Orthogonal comparisons) 379.
- Lorch, E. R. (Convexity) 106.
- Lorentz, G. G. (Subadditive functions) 59.
- H. A., A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl (Principle of relativity) 206.
- Lotze, A. (Pfaßsche Formen) 149.
- Love, E. R. (Mercer's summability theorem) 302.
- — — s. R. T. Leslie 66.
- Lowry, H. V. (Polygons) 394.
- Lozinskij, S. M. (Interpolationsprozesse) 66.
- Lüders, Gerhart (Quantisierte Feldtheorien) 216.
- Ludloff, H. F. s. L. Ting 187.

- Ludwig, Rudolf (Iterationsfolge) 363.
- Lukacs, Eugene (Distribution functions) 105; (Stochastic independence) 381.
- — and Otto Szász (Analytic characteristic functions) 105.
- Luke, P. J. s. R. E. Meyerott 364.
- Yudell L. (Bessel function) 70; (Mechanical quadrature) 367.
- Lyche, R. Tambs s. Tambs Lyche, R. 244.
- Lyndon, R. C. (Nilpotent groups) 256.
- Lysanov, Ju. P. (Streuung der elektromagnetischen Wellen) 439.
- Ma, S. T. (Bound states) 219.
- Macbeath, A. M. (Non-homogeneous lattices) 49.
- Maccacferri, Eugenio (Proprietà dei numeri interi) 39.
- MacDonald, A. D. and D. D. Betts (Gas discharge) 232.
- III, William M., John M. Richardson and Leon P. Rosenberry (Representation of nonlinear field functions by Thiele semi-invariants) 350.
- Machler, Michaël (Transformation de série en série) 300.
- Macintyre, Sheila Scott (Two-point expansions) 313.
- MacKenzie, Robert E. (Cyclotomic fields) 37.
- MacLellan, A. G. (Surface tension) 195.
- Maehly, Hans J. (Eigenwerte hermitescher Operatoren) 116.
- Magenes, Enrico (Minimo relativo) 99; (Equazione del calore. I. II.) 338.
- Maignan, Paul, D. Blanc et J.-F. Detœuf (Fonctions génératrices) 122.
- Makar, Raouf H. (Binomial series) 353.
- Malenka, Bertram J. (Meson theory) 224.
- Malinvaud, E. (Strong independence axiom) 138.
- Malkin, I. G. (Reglersysteme) 179.
- Mallol Balmaña, R. (Note) 22.
- — s. E. Linés Escardó 22.
- Malvaux, Pierre (Composition des vitesses) 445.
- Mamuzić, Zlatko (Sets in Hausdorff's space) 161.
- Manacorda, Tristano (Integrali di equazioni differenziali) 85.
- Mandl, F. and T. H. R. Skyrme (Double Compton effect) 218.
- Manfredi, Bianca (Equazioni alle derivate parziali) 90.
- Manikarnikamma, S. N. (Curvature of a geodesic) 409.
- Mapleton, Robert A. (Wave propagation in solid media) 434.
- Marchand, Henri (Loid d'union sélective) 386.
- Marden, Morris s. F. F. Bon-sall 20.
- Maritz, J. S. (Family of discrete distributions) 373.
- Markus, Lawrence (Invariant measures) 291.
- Marmion, Alphonse (Notion d'orthopôle) 140.
- Maruhn, Karl (Potentiale von Belegungen) 98.
- Marx, G. (Elektrodynamik der Magnete) 198.
- Marziani, Marziano (Propagazione del fronte d'onda) 199.
- Masani, P. (Function) 285.
- Massaglia, Bruna Fogagnolo s. Fogagnolo Massaglia, Bruna 434.
- Massey, H. S. W. and C. B. O. Mohr (Inelastic collisions) 453.
- Masuda, Katsuhiko (Galois algebras) 269.
- Matschinski, Matthias (Équations de Maxwell) 240.
- Matsumoto, Toshizō (Integral representation of Mathieu functions) 72.
- Matsusaka, Teruhisa (Generating curve of Abelian variety) 148.
- Maue, A.-W. s. H. Hönl 201.
- Maurice, H. (Taux dans les opérations financières) 388.
- Maxwell, Edwin Arthur (Coordinate geometry) 141.
- May, Kenneth O. (Elementary analysis) 283; (Simple majority decision) 384.
- Mayrhofer, K. (Inhalt und Maß) 289.
- Mazur, P. (États à production d'entropie minimum) 194.
- McArthur, C. W. s. W. L. Gordon 417.
- McCarthy, John (Limit cycles) 327.
- McCrea, W. H. s. J. E. Hogarth 207.
- McFadden, J. A. (Spherical blast) 187.
- McKay, C. D. s. A. E. Scheidegger 195.
- McKean jr., H. P. (Hermite functions) 72.
- McLaughlin, J. E. s. R. P. Dilworth 261.
- McShane, E. J. and T. A. Botts (Riemann-Stieltjes integral) 294.
- McVittie, G. C. (Interchangeability of stress and mass) 446.
- Mejman, N. N. (Verteilung der Nullstellen) 75.
- Meljachoveckij, A. S. (Integralgleichung der Schwingungen eines Stabes) 433.
- Memmert, G. (Streuung von Neutronen) 222.
- Meng, Chao-Li (Shear deflection of beams) 426.
- Menger, Karl (Calculus) 293.
- Merkulov, V. I. (Problem von Žukovskij) 179.
- Meschkowski, Herbert (Konforme Abbildung) 80.
- Messel, H. and H. S. Green (Distribution functions for nucleon component) 452.
- — and R. B. Potts (Cascade theories) 453.
- — s. B. A. Chartres 223.
- Metelicyn, I. I. (Gyroskopische Stabilisierung) 179.
- Metz, André (Rotation dans la théorie de relativité) 208.
- Meyer, R. E. (Waves in ducts. I. II.) 185.
- Meyer-König, W. (Limitierung von Funktionen) 102.
- Meyer zur Capellen, W. (Instrumentelle Mathematik) 368.
- Meyerott, R. E., P. J. Luke, W. W. Clendenin and S. Geltman (Variational method) 364.
- Michael, Ernest (Transformations from linear space) 107.
- — A. (Topological algebras) 355.
- Michalevič, V. S. (Empirische Verteilungsfunktionen) 122.
- — s. B. V. Gnedenko 122.
- Michell, J. H. and M. H. Belz (Mathematical analysis. I. II.) 52.

- Middleton, David (Energy in noise-and signal-modulated waves. I.) 443.
- Mikeladze, M. Š. (Festigkeit eines Zylinders) 436.
- Miles, John W. (Rectangular wing in supersonic flow) 191; (Oscillating wing in subsonic compressible flow) 191; (Damping in roll) 435.
- Milkutat, E. (Geoid-Undulation) 240.
- Miller, Clair (Homology group) 257.
- J. C. P. (Sum of integral parts in arithmetical progression) 302.
- Kenneth S. (Green's functions) 331; (Differential systems) 331.
- M. A. (Ausbreitung von Wellen) 439.
- Milloux, H. (Fonctions méromorphes) 317.
- Milne-Thomson, L. M. (Aerodynamics) 436.
- Milner, S. R. (Eddington's E -numbers. I. II.) 402.
- Mimura, Yoichi s. H. Suura 217.
- Yukio (Theorem of O. Toeplitz) 358.
- Minakshisundaram, S. s. K. Chandrasekharan 299.
- Minasjan, R. S. (Randwertproblem der Laplaceschen Gleichung) 342.
- Minkowski, H. s. H. A. Lorentz 206.
- Minorsky, Nicolas (Systèmes oscillatoires) 87.
- Mirsky, L. s. P. Erdős 46.
- Mishra, R. S. (Skewness of distribution) 405; (Hyperasymptotic curves) 409.
- Mišina, A. P. (Direkte Summen Abelscher Gruppen) 24.
- Mitchell, B. E. s. W. V. Parker 253.
- Mitra, S. C. and B. N. Bose (Operational calculus) 348.
- Miyazaki, Hiroshi (Paracompact spaces) 418; (Covering homotopy theorems) 421.
- Mizohata, Sigeru (Nonlinear circuits) 88.
- Mizushima, Masataka s. E. Ishiguro 232.
- Modenov, P. S. s. P. Ja. Kožuevov 391.
- Moessner, Alfred (Potenzen der natürlichen Zahlen) 16.
- Mohr, C. B. O. s. H. S. W. Massey 453.
- Moise, Edwin E. (Affine structures. II. III. IV.) 168.
- Moiseev, N. D. s. E. L. Nikolai 174.
- N.-N. (Schwingungen einer Flüssigkeit) 193.
- Molière, G. und F. Sauter (Vielfachstreuung) 234.
- Møller, C. (Theory of relativity) 206.
- Molnár, J. (Sphärisches Polygon) 141.
- Mönnig, Paul (Hamilton-Jacobische Differentialgleichung) 90.
- Moon, Parry and Domina Eberle Spencer (Separability) 345.
- Moór, A. s. H. I. Horváth 211.
- Moran, P. A. P. (Poisson distribution) 373.
- Mordell, L. J. ($ax^3 + by^3 + c \equiv 0 \pmod{xy}$) 41; (Minima of non-homogeneous functions) 49.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. D. (Krümmung der Raumkurven im Lobačevskischen Raume) 152.
- Moreau, Jean-Jacques (Théorie tourbillonnaire) 183.
- Morgan, A. J. A. (Partial differential equations) 334.
- J. B. s. A. W. Siddons 62.
- Morgantini, Edmondo (Equazione diofantea) 40.
- Morishima, Taro (Fermat's last theorem) 47.
- Morita, Masato s. M. Yamada 450.
- Moriya, Mikao (Halb-topologische Gruppen) 260; (Klassenkörpertheorie im Kleinen) 272.
- Morozov, V. V. (Lobačevskijs Manuskripte) 245.
- Morpurgo, G. (Energia di legame dell' H^3) 451.
- Morse, A. P. s. W. W. Bledsoe 289.
- Moshinsky, Marcos (Diffraction in time) 447.
- Moskvitin, V. V. (Restspannungen) 427.
- Mosteller, Frederick (World series competition) 128.
- Mostowski, Andrzej (Products of theories) 7; (Theory of Kurt Gödel) 9.
- s. K. Kuratowski 53.
- Motzkin, Theodore S. s. G. E. Forsythe 362.
- Mourier, Édith s. R. Fortet 124.
- Muchin, I. S. (Fehler bei numerischer Integration) 117.
- Mullen, Earle B. (Vector identity) 149.
- Müller, Claus (Vektoranalysis) 401.
- Hans Robert (Hüllkurven monofokaler Kegelschnitte) 144.
- Rolf (Beugung an Schlitzblenden) 201.
- Wilhelm (Pilzdecken) 429; (Fundamentplatten und Pilzdecken) 429; (Reibungsstoß einer Kugel) 435.
- Mullin, Charles J. s. J. A. Thie 229.
- Munford, Cara M. s. P. C. Clemmow 202.
- Münster, Arnold (Mechanik der Phasenumwandlungen. II.) 195.
- Murachini, Luigi (Trasformazioni cremoniane) 394; (Trasformazioni puntuali) 408.
- Murakami, Shingo (Automorphisms of Lie algebra) 35.
- Murnaghan, F. D. (Parametersysteme für Drehungsgruppe und unitäre Gruppe) 259; (Parameters for the unitary group) 259.
- Murray, F. J. s. P. Brock 367.
- Muto, Toshinosuke and Mitsukuni Watanabe (Nuclear magnetic relaxation in crystalline solids. I.) 456.
- Myhill, John (Derivation of number theory) 14.
- Myrberg, Lauri (Greensche Funktionen) 319.
- Myrhol, A. M. S. (Wurzelausziehen) 372.
- Myškis, A. D. (Systeme von Telegraphengleichungen) 93; (Systeme linearer Differentialgleichungen) 335; (Randwertproblem) 342.
- Nabarro, F. R. and J. H. O. Varley (Stability of hexagonal lattices) 233.
- Nachbin, Leopoldo (Duality theorem) 259.
- Nadile, Antonio (Traiettorie dinamiche) 177; (Strato vorticoso) 436.
- Nagata, Jun-iti (Uniform spaces) 419.
- S. s. S. Ozaki 450.

- Nagell, Trygve (Théorème d'Axel Thue) 277.
- Nagumo, Mitio (Degree of mapping) 421.
- Nagura, Jitsuro (Interval containing at least one prime number) 44.
- Shohoi (Kernel functions) 319.
- Nakai, Yoshikazu (Algebraic curves) 396.
- Nakamura, Tutô (Spin wave theory) 237.
- Nakano, Tadao and Kazuhiko Nishijima (Pion reactions) 221.
- Nakayama, Tadas (Automorphisms of rings) 33; (Frobenius- and quasi-Frobenius-algebras) 268.
- s. G. Hochschild 38.
- Narasinga Rao, A. s. Rao, A. Narasinga 6.
- Náray, Zs. (HCl-Molekül) 232.
- Narayan, Shanti (Analytical solid geometry) 141.
- Nardini, Renato (Stress per particolari sollecitazioni) 426.
- Nasu, Yasuo (Torse-forming directions in Finsler spaces) 154.
- National Bureau of Standards (Tables of normal probability integral) 372.
- Natucci, Alpinolo (Leonardo geometra) 244.
- Neamtan, S. M. and E. Vogt (Mechanics of fields) 217.
- Neiß, Fritz (Zahlentheorie) 39.
- Nejšuler, L. Ja. (Superposition von Funktionen) 118.
- Nelson, C. W., C. J. Ancker jr. and Ning-Gau Wu (Stresses in a flat) 430.
- Neményi, P. F. and A. W. Sáenz (Stress fields) 423.
- — — and A. van Tuyl (Plastic stress systems) 431.
- — s. D. Hilbert 388.
- Nemyckij, V. V. (Differentialgleichungen) 83.
- Neugebauer, Hans E. J. (Diffraction problems) 202.
- O. (Tamil astronomy) 3.
- Th. (Diracscher Singulett-pol) 198.
- Neuman, Maurice (Eigenvalue problem) 448.
- Nevanlinna, Rolf (Metrische lineare Räume. III.) 108; (Vertauschbarkeit der Differentionen) 293; (Polygondarstellung einer Riemannschen Fläche) 320.
- Newman, Morris (Modular identities) 43.
- M. H. A. (Coincidence theorems) 420.
- Newton, Sir Isaac (Opticks) 5.
- Neyman, Jerzy s. G. E. Bates 134, 135.
- Niče, Vilko (Géométrie du tétraèdre) 393.
- Nicolas, Marcel (Statistik) 127.
- Niini, Risto (Nicht-konstruierbare Riemannsche Fläche) 320.
- Nikodým, Otton Martin (Locally convex spaces) 106; (Boolean lattices. I.) 263.
- Nikolai, E. L. (Theoretische Mechanik. I. II.) 174.
- Nikolaus von Cues (Mathematische Schriften) 242.
- Ninomiya, Nobuyuki (Suite convergente de distributions de masses) 97; (Problème de Dirichlet) 97.
- Nishijima, Kazuhiko s. T. Nakano 221.
- Noble, William J. (Foucault pendulum) 177.
- Nomokonov, M. K. (Integralgleichungen mit stochastischem Kern) 100.
- Norden, A. P. (Lobačevskische Geometrie) 390.
- Nordheim, L. W. (Laterale Streuung) 452.
- Northcott, D. G. (Intersection theorem for ideals) 33.
- Norton, Donald A. (Row-latin squares) 17.
- Novikov, P. S. (Unentscheidbarkeit des Identitätsproblems) 249.
- Novljanskaja, M. G. (A. A. Markov) 6.
- Nowacki, Werner (Fouriersynthese) 454.
- Noyes, H. P. (Decay of meson) 220.
- Numakura, Katsumi (Bicom-pact semigroups) 255.
- Nyström, E. J. (Variationsrechnung) 98.
- O'Brien, Stephen and John L. Synge (Jump conditions at discontinuities in general relativity) 208.
- Obláth, Richard (Problème de Goldbach) 42; (Fermatische Gleichung) 46.
- Ohmann, D. (Quermaßintegrale. I.) 159.
- Ohnishi, Masao (Linear order on a group) 22.
- Okamura, Y. s. S. Ozaki 450.
- Olds, Edwin G. (Uniform distributions) 123.
- Olejník, O. A. (Randwertprobleme) 341.
- — — und A. I. Žižina (Randwertaufgabe) 328.
- Olevskij, M. N. (Taylor-Del-sartesche Formel) 113.
- Olver, F. W. J. (High-degree polynomials) 363.
- Onofri, L. e V. E. Bononcini (Analisi matematica) 284.
- Ore, Oystein (Subsequences) 278.
- Orgeval, B. d' (Surface intersection) 399.
- Orts, José-Maria (Pseudogleichschenkliges Dreieck) 139; (Legendresche Polynome) 307.
- Osborn, R. K. s. J. M. Berger 217.
- Osborne, M. F. M. (Electron gas) 238.
- Osima, Masaru (Representations of groups) 28; (Symmetric groups) 28; (Induced characters) 258; (Cartan invariants of algebras) 268; (Schur relations) 268.
- Ossicini, Alessandro (Prodotti di polinomi) 308.
- Ostrowski, Alexandre (Fonctions convexes et concaves) 296.
- Ōtsuki, Tominosuke (Spaces with normal projective connexions. I. II.) 413.
- Ott, H. (Energie-Impulstensor) 197.
- Ouchi, T. (S-matrix in non-local interaction) 219.
- Owchar, Margaret (Wiener Integrals) 110.
- Owens, O. G. (Arc length for Finsler spaces) 160.
- Ozaki, S., S. Nagata and Y. Okamura (Gauge transformation) 450.
- Padmavally, K. (Minimally bicom-pact spaces) 162.
- Paechter, G. F. s. M. G. Barratt 167.
- Page, Chester H. (Spectra) 377.
- Pai, S. I. (Flow behind an attached curved shock) 438.
- Pailloux, Henri (Calcul fonctionnel) 422.

- Palamà, Giuseppe (Aritmo-
quadrilatero inscritibile)
140; (Zeri consecutivi di
 $H_n(x)$) 308.
- Palazzo, Elena (Punti di un
triangolo) 139.
- Palmer, C. I. and S. F. Bibb
(Practical mathematics)
283.
- — — and C. E. Stout
(Practical calculus) 283.
- Pan, T. K. (Normal curva-
ture) 404.
- Panov, D. Ju. (Numerische
Lösung von Differential-
gleichungen) 118.
- Papoulis, A. (Numerical solu-
tion of differential equa-
tions) 117.
- Papuš, P. N. (Reguläre halb-
stabile Grenzyklen) 87.
- Papy, Georges (Équations
aux dérivées partielles
non linéaires) 89; (Ir-
réductibilité de sous-espa-
ces) 149.
- Parameswaran, M. R. (Con-
verse theorems on summa-
bility) 302.
- Parker, W. V. and B. E. Mit-
chell (Elementary divi-
sors) 253.
- Parreau, M. (Classification
des surfaces de Riemann)
320.
- Partington, J. R. (Thermody-
namics) 193.
- Pastides, M. Nicolas (Équa-
tions fonctionnelles) 361.
- Paulson, Edward (k -sample
slippage problem) 382.
- Pauncz, R. (Fermische For-
mel) 235.
- Pearce, S. C. (Latin square
type) 128.
- Pearcey, T. (Automatic com-
puter) 119.
- Pearson, E. S. (Distribution
of the range) 130.
- Pease, Robert L. and Herman
Feshbach (Hydrogen three)
228.
- Peaslee, D. C. (Photon-indu-
ced reactions) 236; (Cos-
mic rays) 453.
- Pedersen, Peder (Restrin-
giertes Vierkörperpro-
blem) 181.
- Pelseneer, Jean (Principia de
Newton) 5.
- Pentikäinen, T. (Net reten-
tion) 137.
- Pereira, R. Crespo s. Crespo
Pereira, R. 6.
- Peremans, W. (Free alge-
bras and direct products
of algebras) 15.
- Perret, Eduard, Ernst Roth,
Raymund Sängner und Hans
R. Voellmy (Leitstrahl-
raketen) 181.
- W. s. H. A. Lorentz 206.
- Perron, Oskar (Alfred
Pringsheim) 6; (Moessner-
scher Satz) 16.
- Petersen, G. M. (Divergent
series) 299.
- Petiau, Gérard (Section ef-
ficace de diffusion coulom-
bienne) 216.
- Petresco, Julian (Théorie
relative des chaînes. II.)
262.
- Petričević, Feodor (Apolo-
nisches Problem) 143.
- Peyerimhoff, Alexander (Ce-
sàrsche Summierbarkeit)
299.
- — s. W. Jurkat 64.
- Pfeiffer, Paul E. (Finite mea-
sures) 291.
- Pflanz, Erwin (Beschleunig-
ung der Konvergenz) 64.
- Pflüger, A. (Knickung gerader
Stäbe) 432.
- Philippot, J. s. I. Prigogine
454.
- Phillips, Lewis W. (Elementary
mathematics) 16.
- R. S. (Semigroups of li-
near operators) 110.
- Physikalisches Wörterbuch
171.
- Phytian, J. E. (Energy distri-
bution) 189.
- Piaget, Jean (Logistique
axiomatique) 246.
- Pickert, Günter (Galois-Ver-
bindungen) 264; (Carte-
sische Gruppen) 264.
- Pidduck, F. B. (Integral re-
presentations) 311.
- Pieruschka, E. (Stoffgesetz-
ansatz) 423.
- Pietrosanti, Aldo (Sistema
d'iofanteo) 40.
- Pignedoli, Antonio (Moti tau-
tochroni) 446.
- Pilatovskij, V. P. (Debit
einer Batterie von Bohr-
löchern) 435.
- Pines, David and David
Bohm (Description of elec-
tron interactions. II.) 237.
- Pini, Bruno (Equazioni line-
ari a derivate parziali) 96;
(Problema di valori al con-
torno) 339.
- Pinl, M. (Isotrope Vektoren)
401.
- Pipes, Louis A. (Dielectric
amplifier) 199.
- Pirani, F. A. E., A. Schild
and R. Skinner (Einstein's
gravitational field equa-
tions. II.) 211.
- Pirenne, Jean (Radiation
damping) 450.
- Pirverdjian, A. M. (Bewegung
eines Gemischs) 193.
- Pisot, Charles s. J. Dufres-
noy 275.
- Platrier, Charles (Tensions
et déformations) 423.
- Plessis, N. du (Laplace se-
ries) 305.
- Plotkin, B. I. (Auflösbare
Gruppen ohne Torsion)
23; (Nichtkommutative
Gruppen) 24.
- Pochop, F. (Stabilität der
Rechteckplatte) 428.
- Poel, W. L. van der (Electro-
nic digital computer) 369.
- Pogorzelski, W. (Équation
intégrô-différentielle) 346.
- Poincelot, Paul (Régimes
transitoires) 199.
- Pollaczek, Félix (Intégrale
d'Hadarnard) 84; (Délais
d'attente des avions) 126;
(Périodes d'occupation in-
interrompue d'un guichet)
373; Fonctions caractéristi-
ques de répartitions) 373.
- Pollard, B. W. (Large-scale
digital computer) 370.
- Harry s. K. L. Chung 124.
- Pollock, Franklin s. N. M.
Kroll 231.
- Pol'skij, N. I. (Methode von
Galerkin) 113.
- Polya, Georges (Méthode des
différences finies) 366.
- — s. G. H. Hardy 53.
- Pope, N. K. (Neutron diffrac-
tion. I.) 222.
- Popken, J. (Arithmetical
theorem) 80.
- Poplavskaja, G. Ja. (Inhalt
stetiger Funktionen) 60.
- Popoff, Kyrille (Processus ir-
réversibles) 194; (Rela-
tions d'Onsager) 194.
- Popova, Hélène (Quasi-groupes
finis) 21; (Quasi-groupes)
255.
- Poritsky, H. and R. P. Jer-
rard (Electron motion in
electric and magnetic field)
204.
- Postnikov, A. G. (Bruchteile
der Exponentialfunktion)
52.

- Potts, R. B. s. H. Messel 453.
 Poudevigne, J. (Détermination des annuités) 388.
 Povzner, A. Ja. (Cauchysches Problem) 91.
 Prachar, K. (Satz von Hardy und Ramanujan) 275.
 Pradillo, Julio García s. García Pradillo, Julio 17, 323.
 Prager, W. s. D. C. Drucker 432.
 Prasad, B. N. and U. N. Singh (Strong summability) 69.
 Prigogine, I. et R. Buess (Distribution de matière. I. II.) 196.
 — et J. Philippot (Point λ de l'hélium liquide) 454.
 Pryce, M. H. L. (Spinor formulation of beta-decay) 230.
 Pugsley, A. G. (Suspension bridge cable) 430.
 Purcell, Edwin J. (Cremona transformation in $[n]$) 146.
 Purushotham, S. (Principal axes and planes of a quadric) 143.
 Putnam, C. R. (Hilbert space correspondences) 353.
Quine, W. V. s. A. Church 9.
 — — — s. W. Craig 9.
R.-Salinas, Baltasar (Schlichte Funktion) 79.
 Rachajsky, M. B. (Fonctions caractéristiques) 90.
 Radek, H. (Verkettete Wahrscheinlichkeiten) 376.
 Rado, R. (Intersection of sets) 157; (Sequences of convex sets) 158; (An inequality) 297.
 Raffin, R. (Immersion dans un domaine à division) 265.
 Rahman, A. (Morse anharmonic oscillator) 453.
 Rainville, Earl D. (Differential equations) 83.
 Rajagopal, C. T. (Tauberian theorems) 301.
 — — — and T. V. Vedamurti Aiyar (Approximation to π) 244.
 Rajčič, Lav (Géométrie d'espace de Lobatchevsky) 139.
 Raje, S. A. (Linear meson wave equation) 448.
 Ramachandran, G. N. and Gopinath Kartha (X-ray antireflections) 234.
 Rahmakrishna, B. S. (Engineering mathematics) 6.
 — — — s. S. K. Lakshmana Rao 306.
 Ramanathan, K. G. (Units of quadratic forms) 48; (Abelian quadratic forms) 282.
 Ramberg, E. G. s. A. Sommerfeld 439.
 Rao, A. Narasinga (Mathematics in engineering) 6.
 — C. R. (Biometric research) 386.
 — N. S. Govinda (Mathematics in engineering) 6.
 — S. K. Lakshmana and B. S. Ramakrishna (Trigonometric summations) 306.
 — U. R. Shankarnarayana (Testing for divisibility) 39.
 Raševskij, P. K. (Homogene Räume) 29.
 Raychaudhuri, Amalkumar (Cosmologic models) 209.
 Raymond, François-Henri (Stabilité d'un asservissement) 371.
 Read, A. H. (Functional equation) 113.
 Rédei, L. (Schreiersche Erweiterungstheorie) 266; (Vollidealringe) 266.
 — — und O. Steinfeld (Ringe mit gemeinsamer multiplikativer Halbgruppe) 265.
 Reeb, Georges (Existence de mouvements périodiques) 88; (Variétés symplectiques) 154.
 Rees, Mina s. R. Courant 117.
 Régnier, André (Conservation de la charge) 218.
 Reifenberg, E. R. (Parametric surfaces. III.) 60.
 Reismann, Herbert (Bending and buckling of a plate) 428.
 — — and Gilbert C. Best (Motion and flutter of a wing) 183.
 Reissig, Rolf (Pandiagonale Quadrate) 277.
 Reissner, Eric (Torsion of rods) 426; (Finite bending of plates) 428.
 Remak, Robert (Diskriminante und Regulator) 272.
 Rembs, Eduard (Verbiegung von Flächen) 151.
 Reuterswärd, Carl (Two-directional focusing) 204.
 Rey, T. J. (Pulse-coded computers. I. II.) 369.
 Rham, G. de (Théorème de Stieltjes) 18.
 Ricci, Giovanni (Funzioni aritmetiche) 41.
 Richardson, John M. s. W. M. MacDonald III 350.
 Ridder, J. (Bestimmtes Integral) 294.
 Rideau, Guy (Méthodes de Feynman) 213; (Problèmes de diffusion) 221.
 Riegels, F. (Strömung um Körper) 182.
 Riekstyņš, E. Ja. (System von Telegraphengleichungen) 335.
 Riesz, Marcel (Potentiel de Liénard-Wiechert attaché) 345.
 Rijkooort, P. J. (Wilcoxon's test) 132.
 Ringleb, Friedrich O. (Laminar boundary layer) 182.
 Ripelle, Michel Fabre de la s. Fabre de la Ripelle, Michel 211.
 Ritter, Robert (Zwischenintegrale der Biegungsgleichung) 405.
 Rizza, Giovanni Battista (Formula integrale) 322.
 Rjabeňskij, V. S. (Cauchysches Problem) 117.
 Robbins, Herbert (Gambling systems) 121.
 Roberson, Robert E. (Methods for non-linear vibrations) 365.
 Roberts, G. T. (Topologies in vector lattices) 105.
 — R. C. s. J. B. Diaz 366.
 Robertson, M. S. (Coefficient problem) 313.
 Robinson, Julia (Existential definability) 248.
 Robl, H. (Paarerzeugung im Magnetfeld) 449.
 Rodosskij, K. A. (Nullstellen der L -Funktionen) 45.
 Roe, Glenn M. (Intermolecular force series) 231.
 Röhl, Helmut (Fabersche Entwicklungen) 74.
 Rollett, A. P. s. H. M. Cundy 388.
 Room, T. G. (Composition of rotations) 150; (Transformations) 396.
 Rooney, P. G. (Laplace transformation) 348.
 Rootelaar, B. van (Problème de M. Dijkman) 285.
 Roquette, Peter (Abelscher Funktionenkörper) 270.
 Rose, M. E., L. C. Biedenharn and G. B. Arfken (Angular correlations) 223.

- Rose, M. E. s. L. C. Biedenharn 450.
- Rosen, Nathan (Electrons and field) 214.
- Rosenberg, Alex (Subrings of simple rings) 32.
- Rosenberry, Leon P. s. W. M. MacDonald III 350.
- Rosenblatt, Murray (Characteristic function) 122; (Multivariate transformation) 131.
- s. U. Grenander 125.
- Rosenbloom, P. C. (Fixed points of entire functions) 316.
- Rosenlicht, Maxwell (Equivalence relations on algebraic curves) 145.
- Rosenthal, F. s. E. Sternberg 427.
- Rosina, B. A. (Coniche generalizzate) 397.
- Rosser, J. Barkley and Atwell R. Turquette (Many-valued logics) 15.
- Roth, Ernst s. E. Perret 181.
- William E. (Equations in matrices) 19.
- Rothe, R. (Höhere Mathematik. I. II. III. IV.) 283.
- Rothstein, Jerome (Organization and entropy) 194.
- Rouard, P. (Propriétés des lames minces solides) 201; (Applications des lames minces solides) 201.
- Roux, Delpina (Comportamento delle serie di potenze) 79.
- Roy, A. D. (Safety first) 388.
- Royden, H. L. (Neumann-Poincaré method) 79.
- Rozenfel'd, B. A. (Nichteuclidische Geometrien) 390.
- Rubbiani, Franca s. V. Bacarani 446.
- Rubinow, S. I. s. H. Feshbach 223.
- Rudaev, A. K. (Darstellende Geometrie) 170.
- Rudkjøbing, Mogens (Relativistically degenerate stars) 239.
- Rudra, A. (Time-series analysis) 136.
- Rund, Hanno (Differentialgeometrie der Minkowskischen Räume) 410; (Krümmungstheorie der Finslerschen Räume) 410; (Subspaces of Finsler space. I.) 411.
- Rushbrooke, G. S. (Born-Green theory) 195.
- Rushforth, J. M. (Partition function) 43.
- Russo, Salvatore (Sistemi di equazioni differenziali) 331.
- Rutledge, W. A. (Quaternions) 18.
- Sachs, R. G. (Nucleon) 225.
- Sáenz, A. W. s. P. F. Neményi 423.
- Sakagami, Jiro (Stereographic attachment) 203.
- Salecker, H. (Masse und Ladung) 218.
- Salem, R. (Uniform distribution) 283.
- Salinas, Baltasar R. s. R.-Salinas, Baltasar 79.
- Salmon, Jean (Application du calcul matriciel) 178.
- Salpeter, E. E. s. M. Baranger 218.
- Saltikov (Saltykow), N. (Équations aux dérivées partielles) 334.
- Salvemini, T. (Distribuzioni continue) 382.
- Salveson, Melvin E. (Production planning) 138.
- Salzer, Herbert E. (Numerical differentiation) 367.
- Samelson, Hans (Lie groups) 167.
- Samet, P. A. (Gaussian integers) 40.
- Samuelson, Paul A. (Probability, utility) 138.
- San Juan, Ricardo (Classes quasi analytiques) 79; (Transformations de Laplace) 103.
- Sandelius, Martin (Confidence interval) 133.
- Sandham, H. F. (Approximation of radicals) 302.
- Sänger, Raymund s. E. Perret 181.
- Šanin, N. A. (Natürliche Zahlenreihe) 58.
- Santoboni, Luigi (Sconto razionale) 388.
- Šapiro-Pjateckij, I. I. (Entwicklung einer Funktion) 69; (Waring-Goldbachsches Problem) 280.
- Satchelor, G. R. and J. A. Spiers (Angular distribution of γ -radiation) 223.
- Sauer, Robert (Infinitesimale Kollineationen) 143; (Unterschallströmungen) 181.
- Saunders, William K. (Maxwell's equations) 197.
- Sauter, F. and H. Wanke (Vielfachstreuung) 234.
- Sauter, F. s. G. Molière 234.
- Schäfer, Manfred (Richtungsfeldkonstruktion) 178.
- Scheibe, Erhard (Affiner Zusammenhang) 412.
- Scheidegger, A. E. and C. D. McKay (Bose and Fermi statistics) 195.
- Schelkunoff, Sergei A. (Antenna theory) 451.
- — — and Harald T. Friis (Antennas) 440.
- Schenkman, Eugene (Infinite Lie algebras) 34.
- Scherrer, W. (Reziproke Quadratzahlen) 62.
- Schiff, L. I. (Quantum effects) 218.
- Schiffer, M. s. P. R. Garabedian 182.
- Schild, A. s. F. A. E. Pirani 211.
- Schlögl, F. (Kern-Dipol-schwingungen) 229.
- Schmeidler, Werner (Algebraische Integralgleichungen) 101.
- s. R. Rothe 283.
- Schmetterer, Leopold (Diophantische Approximationen) 52; (Produkt zweier Linearformen) 274; (Statistik) 381.
- Schmidt, Jürgen (Filtertheorie. I.) 56.
- Schoch, Arnold und Helmut Steinwedel (Energie-Impuls-Tensor) 447.
- Schoeneberg s. Leman-Schoeneberg 39.
- Scholz, H. s. H. Hermes 248.
- Schönberg, Mario (Méthode d'iteration de Wiarda et Bückner. II.) 361; (Ionization loss) 453.
- Schönhardt, Erich (Kurventransformation) 403.
- Schottky, W. (Randschichtgleichrichter) 237.
- Schrag, R. L. s. J. J. Gibbons 443.
- Schrödinger, Erwin (Statistische Thermodynamik) 194.
- Schubart, Hans und Hans Wittich (Ganze Funktionen) 78.
- Schubert, Hans (Randwertproblem der Potentialtheorie. II.) 343; (Potentiale) 343.
- Schumann, W. O. (Eigenschwingungen einer leitenden Kugel) 202.
- Schützenberger, Marcel Paul (Treillis modulaire) 30.

- Schwartz, Laurent (Distributions) 349; (Multiplicateurs de FL^p) 354.
- Schwarzl, F. and A. J. Staverman (Time-temperature dependence) 433.
- Schwinger, Julian s. R. Karplus 231.
- Scorza Dragoni, Giuseppe (Quasicontinuità semi-regolare delle funzioni misurabili) 83.
- Scott, W. T. (Continued fraction) 311.
- Sears, D. B. (Identities of Bailey) 82.
- Sebastião e Silva, José (Guido Castelnuovo) 6.
- Sechsstellige Tafeln der trigonometrischen Funktionen 371.
- Sedmak, Viktor (Ensembles associés aux polygones) 56.
- Sedov, L. I. (Eindimensionale Bewegungen eines Gases) 184.
- Ségard, Norbert (Figure de diffraction) 202.
- Segre, Beniamino (Gino Fano) 245.
- Seidel, J. (Distance-geometric development. I. II.) 389.
- Seidenberg, A. (Differential algebra) 35.
- Seifert, George (Irregular boundary value problem) 328.
- Selmer, Ernst S. (Diophantine equations) 276.
- Semple, J. G. (Complete quadrics. II.) 399.
- Serpe, J. (Théorie abrégée des particules de spin) 215.
- Serruys, Max (Passage par la vitesse) 191.
- Sevdić, Milenko (Fonctions hyperboliques) 295.
- Severi, Francesco (G. Castelnuovo) 6; (Teoria della base) 398.
- Sextl, Theodor und Herbert Überall (Streuung von Neutronen an Protonen) 221; (Effektive Reichweite) 223.
- Shah, S. M. (Entire functions) 78; (Entire and meromorphic functions) 317.
- — — and M. Ishaq (Maximum modulus and coefficients) 316.
- Shankarnarayana Rao, U. R. s. Rao, U. R. Shankarnarayana 39.
- Shanmugadhasan, S. (Magnetic monopoles) 215; (Spinors) 215.
- Shapiro, Harold N. s. R. Bellman 278.
- Sheffer, I. M. (Entire functions) 77; (Derivatives) 310.
- Shen, S. F. (Two-dimensional shock) 187.
- Shephard, G. C. (Regular complex polytopes) 141.
- Shimazu, Haruo s. O. Hara 219, 449.
- Shimose, Tsuneto (Transformation of adiabatic charts) 193.
- Shirota, Taira (Topological spaces) 417.
- Sholander, Marlow (Trees, lattices) 54; (Convex curves) 159.
- Shōno, N. (Nucleon-meson field) 220.
- Siddons, A. W., K. S. Snell and J. B. Morgan (New calculus. III.) 62.
- Siegel, Carl Ludwig (Analytische Differentialgleichungen) 329.
- Siebert, Arnold J. F. (Evaluation of noise samples) 195.
- Sierpiński, Waślaw (General topology) 160; (Nombres premiers) 278; (Propriété paradoxale de l'espace à trois dimensions) 288.
- — s. A. C. Davis 57.
- Sigalov, A. G. (Variationsprobleme für Doppelintegrale) 100.
- Signorini, Antonio (Leonardo e la meccanica) 244.
- Silva, José Sebastião e s. Sebastião e Silva, José 6.
- Silverman, Edward (Lebesgue area) 60.
- Robert Jerome (Extensions of linear operators) 358.
- Šimanov, S. N. (Quasiharmonische Schwingungen) 178.
- Simon, Jean-Claude et Georges Weill (Antennes diélectriques) 201.
- Sims, G. F. s. J. Chance 128.
- Sinclair, Annette (Zeros of an analytic function) 75.
- Singh, S. K. (Entire functions) 78.
- U. N. s. B. N. Prasad 69.
- Singwi, K. S. (Electron-lattice interaction) 456.
- Sitaram, K. (Involution ranges) 142.
- Sitnikov, K. (Dreikörperproblem) 180.
- — A. (Stetige Abbildungen) 165.
- Sizova, O. A. (Einfangen beim Dreikörperproblem) 180.
- Skellam, J. G. (Statistical ecology. I.) 386.
- Skinner, R. s. F. A. E. Pirani 211.
- Sklar, Abe (Factorization of squarefree integers) 44.
- Skolem, Th. (Mathematisches Denken) 6; (Classical sentential calculus) 13; (Diophantine equation) 40; (Discriminant of polynomial) 254.
- Skopec, Z. A. (Abbildungen des Lobačevskijschen Raumes) 390.
- Skyrme, T. H. R. s. F. Mandl 218.
- Slade jr., J. J. (Elastic axes of one-mass system) 425.
- Slater, J. C. (Energy bands) 235.
- Slezkin, N. A. (Bewegung eines Teilchens) 177.
- Slobodjanskij, M. G. (Fehler einer Näherungslösung) 364.
- Sloovere, H. de (Relativité restreinte) 207.
- Slutz, Ralph. J. (SEAC) 119.
- Smillie, K. W. s. B. A. Griffith 118.
- Smirnov, Ju. M. (Abbildungen offener Mengen) 161; (Nachbarschaftsräume) 419.
- Smith, C. A. B. (Heterogeneity test) 383.
- Kennan T. s. W. F. Donoghue jr. 106.
- Marianne Freundlich (Pontrjagin duality theorem) 107.
- R. A. (Triode oscillations) 205.
- Šmul'jan, Ju. L. (Konvergente Reihen) 298.
- Šnejdmüller, V. I. (Algebren mit Minimalbedingung) 34.
- Snell, K. S. s. A. W. Siddons 62.
- Sobolev, S. L. (Differenzengleichungen) 333.
- Sominskij E. S. s. D. K. Faddeev 252.
- Sommerfeld, A. (Electrodynamics) 439.
- Sorkin, Ju. I. (Freie Vereinigungen von Verbänden) 29.
- Specht, Wilhelm (Zahlentheorie der Polynome. I. II. III.) 47.

- Speiser, Ambros P. (Rechen-
geräte) 368.
- Andreas (Mathematische
Denkweise) 245.
- Spenceley, G. W., R. M.
Spenceley and E. R. Ep-
penson (Logarithmic Ta-
bles) 371.
- R. M. s. G. W. Spenceley
371.
- Spencer, Domina Eberle s.
P. Moon 345.
- Spiegel, M. R. (Dirac delta-
function) 306.
- Spiers, J. A. and R. J. Blin-
Stoyle (Beta-decay. I. II.)
451.
- — — s. G. R. Satchelor
223.
- Spöner, H. und K. F. Herz-
feld (Elektronenüber-
gänge) 232.
- Sprague, Roland (Additive
Zerlegungen) 42.
- R. E. (Digital differential
analyzer method) 369.
- Stallmann, Friedemann (Pa-
rameterproblem der kon-
formen Abbildung) 80.
- — s. H. Epheser 318.
- Stampacchia, Guido (Pro-
blemi al contorno) 339.
- Staras, Harold (Scattering
of electromagnetic energy)
443.
- Staržinskij, V. M. (Stabilität
eines mechanischen Sys-
tems) 178; (Instationäre
Bewegungen) 178.
- Staverman, A. J. s. F.
Schwarzl 433.
- Steele, M. C. (Magnetic pro-
perties of free electron gas)
238.
- Steenrod, Norman s. S. Eilen-
berg 414.
- Steffensen, J. F. (Makeham-
graduated tables) 387.
- Steinfeld, O. s. L. Rédei 265.
- Steinwedel, Helmut s. A.
Schoch 447.
- Steller, E. (Actuarial compu-
tations) 137; (Valuation of
a loan) 137.
- Stenius, Erik (Interpreta-
tionsproblem) 14.
- Stepanov, B. I. s. L. I. Vidro
454.
- Sternberg, E. and F. Rosen-
thal (Elastic sphere) 427.
- Stevens, W. L. (Samples) 128.
- Stevenson, A. F. and W. A.
Bassali (Differential equa-
tion which can be factori-
zed) 326.
- Stewart, B. M. (Theory of
numbers) 276.
- Stewartson, K. (Unsteady
supersonic motion. II.) 184.
- Stiefel, E. (Cauchy-Riemann
equations) 89; (Boundary-
value problems) 116.
- Stiegler, Karl Drago (Vitesse
de la lumière) 206.
- Stöhr, Alfred (Kettenbruch-
integrale) 294.
- Stojaković, Mirko (Recht-
eckige Matrizen) 20.
- Stojanović, Rasiko D. (Mo-
vement of rigid body) 176.
- Stoll, A. (Dreiecksformen)
139.
- Wilhelm (Mehrfache Inte-
grale) 324.
- Stolt, Bengt (Diophantine
equation $u^2 + Dv^2 = \pm 4N$.
I.) 40; (II.) 276.
- Stone, A. H. (Multicoherent
spaces. III.) 163.
- M. H. (Unbounded opera-
tors) 111.
- Storchi, Edoardo (Espres-
sione di π) 63.
- Storer, James E. s. J. Keil-
son 195.
- Stout, C. E. s. C. I. Palmer
283.
- Strang, Charles R. (Comput-
ing machines) 119.
- Striebel, Hans Rudolf s. E.
Batschelet 367.
- Strubecker, Karl (Äquiforme
Geometrie) 405.
- Stuart, Alan (Difference-
sign tests) 132.
- Štykan, A. B. (Stieltjes-Inte-
grale) 367.
- Sugawara, Masahiro (Con-
tinuous vector fields over
spheres) 168.
- — s. T. Hamada 226.
- Sul'din, A. V. (Liesche Al-
gebren) 267.
- Sundström, Mauritz (Servo-
mechanisms) 377.
- Sunouchi, Gen-ichiro (Fou-
rier series) 305.
- Haruo (Rings of opera-
tors) 358.
- Sunyer i Balaguer, F. (Va-
leur exceptionnelle) 316.
- Supino, Giulio (Teoremi di
Rayleigh) 177.
- Šura-Bura, M. R. (Numeri-
sche Integration) 116.
- Surinov, Ju. A. (Funktional-
gleichungen der Wärme-
strahlung) 196.
- Süss, W. (Projektive Geo-
metrie) 138; (Differential-
geometrie von Kurvenpaa-
ren) 406.
- Suura, Hiroshi, Yoichi Mi-
mura and Toshiei Kimura
(Dyson transformation
function) 217.
- Sverdrup, Erling (Weight
functions) 131; (Limit dis-
tribution) 374.
- Svešnikov, A. G. (Metahar-
monische Gleichung) 97.
- Swinnerton-Dyer, H. P. F.
s. E. S. Barnes 281.
- Syngé, J. L. (Theory of A. N.
Whitehead) 208.
- — — s. St. O'Brien 208.
- Sz. Nagy, Béla (Index of li-
near transformations) 359;
(Spectral problem of At-
kinson) 360.
- Szablewski, W. (Konvergente
Kanäle) 190.
- Szamosi, G. (Elementary
particles) 213.
- Szász, G. (Structure of semi-
modular lattices) 262; (In-
dependence of a postulate
system) 262.
- Otto (Gibbs phenomenon)
65; (Divergent series) 298.
- — s. E. Lukacs 105.
- Szekeres, G. (Canonical ba-
sis for ideals) 33.
- Szele, T. (Ordered skew
fields) 31; (Groups with
atomic layers) 255.
- — s. L. Fuchs 53.
- T**aam, Choy-Tak (Differential
equation) 84.
- Tables of normal probability
integral 372.
- Tagamlickij, Ja. A. (Newton-
sche Interpolationsreihe)
303.
- Tajmanov, A. D. (Quasikom-
ponenten. II.) 58.
- Takahashi, Shuichi (Duality
theorem) 261.
- Yasushi and Hiroomi
Umezawa ((Self-stress)
449; (Interaction repre-
sentation) 449.
- Takasu, Tsurusaburo (Uni-
tary field theories) 209.
- Takebe, Hisao s. T. Kotani
451.
- Takeda, Ziro (Fourier-
Stieltjes integral) 104.
- Takeno, Hyōitirō (Space-ti-
mes in general relativity)
446.
- Takenouchi, Osamu (Espaces
linéaires localement con-
vexes) 351.

- Talbot, A. (Equipomental systems) 177; (Determinantal equations) 253.
- Tallqvist, H. (Multiplikations- und Divisions-Verfahren) 120.
- Tambs Lyche, R. (Mathematik in Norwegen) 244.
- Tamura, Taro s. H. Horie 450.
- Tanaka, Chuji (Dirichlet series. IX.) 314.
- Tandori, Károly (Cesàro'sche Summierbarkeit) 304.
- Tarski, Alfred s. J. M. G. Fell 264.
- Tartakowskij, V. A. (Primitive Komposition) 257.
- Tate, John (Cohomology groups) 37; (Genus change) 39.
- s. S. Lang 38.
- Taylor, Sir Geoffrey (Swimming of animals) 439.
- s. H. G. Eggleston 158.
- Norman H. (Whirlwind. I.) 371.
- Teichmann, T. (Microwave junctions) 439.
- and E. P. Wigner (Dispersion theory) 230.
- Teichroew, D. (Continued fractions) 120.
- Teissier, Marianne (Algèbre d'un demi-groupe fini simple. I. II.) 21.
- du Cros, François (.Champ réel autonome") 97.
- Tenza, Luigi (Lunule circolari regolari) 4; (Paraboloido iperbolico) 4.
- Terasaka, Hidetaka (Cartesian product) 418.
- Terracini, Alessandro (G. Castelnuovo) 245.
- Terry, Milton E. s. R. A. Bradley 129.
- Teviotdale, A. (Ferromagnetism) 238.
- Thaler, R. M. s. G. Breit 219.
- Thébault, Victor (Recreational geometry) 139; (Orthopolar triangles) 140; (Tetrahedron) 140; (Relations d'aires) 141; (Point de Morge d'un tétraèdre) 393; (Tétraèdre) 393.
- Theimer, O. (Photo-elastic properties and Raman effect) 233.
- Thellung, A. s. R. Kronig 448.
- Thie, Joseph A., Charles J. Mullin and E. Guth (Electron excitation) 229.
- Thimm, Walter (Deformationen) 166.
- Thomas, R. G. (Energy levels of nuclei) 451.
- Thompson, D. J. s. D. G. Horvitz 383.
- Thorne, C. J. s. L. I. Deverall 307.
- Thurston, H. A. (Quasigroup congruences) 22.
- Tietze, Heinrich (Mathematical conclusions) 53.
- Tiffen, R. (Uniqueness theorems) 424.
- Timpe, A. (Achsensymmetrische Torsion) 424.
- Ting, L. and H. F. Ludloff (Aerodynamics of blasts) 187.
- Tintner, Gerhard (Variate Difference Method) 385.
- Tiomno, J. s. G. E. A. Fialho 230.
- Tippett, L. H. C. (Statistics) 378.
- Tits, J. (Groupes doublement transitifs continus) 260.
- Tocher, K. D. (Block experiments) 379.
- Tolba, S. E. (Taylor series at isolated points) 312.
- Tomić, Boško (Polynomes de Bernoulli) 21.
- M. (Sommes trigonométriques) 306.
- Tonks, Lewi (One-velocity diffusion problem) 196.
- Toranzos, Fausto I. (Frequency curve) 121.
- Torda, T. Paul (Boundary layer control) 437.
- Toscano, Letterio (Sviluppi sulle funzioni ipergeometriche) 71; (Polinomi di Laguerre) 72; (Polinomi di Hermite) 72; (Centres isogones) 139; (Punti di Brocard) 392.
- Tosi, Armida (Formule di Plücker) 396.
- Touchard, Jacques (Configurations) 18.
- Toupin, R. A. (Mesh-type analysis) 177.
- Trainor, L. s. E. Corinaldesi 450, 453.
- , Lynne E. H. (Nuclear dipole radiation) 229.
- Travers, Serge (Limitation des gradients) 193.
- Trenin, S. I. (Probleme der Elastizitätstheorie) 424.
- Trent, H. M. (Laws of mechanics) 175.
- Tricomi, F. (Funzioni analitiche) 73.
- G. (New entire function) 313.
- Truckenbrodt, E. (Laminare Reibungsschicht) 186.
- Truesdell, C. (Shocks in steady plane flow) 189.
- Truscott, F. W. s. P. S. Marquis de Laplace 372.
- Tsuji, Masatsugu (Geometry of numbers) 51; (Nevanlinna's second fundamental theorem) 76; (Riemann surface) 320.
- Tummers, J. H. (Transformation) 142.
- Turquette, Altwell R. s. J. B. Rosser 15.
- Turri, Tullio (Inesistenza di trasformazioni involutorie) 146; (Sostituzioni unimodulari involutorie) 148; (Quartiche di diramazione) 395; (Involuzioni sopra superficie di Eckardt) 395; (Trasformazione antibirazionale involutoria) 395.
- Turrittin, H. L. (Expansions of solutions) 86.
- Tuyl, A. van s. P. F. Neményi 431.
- Twersky, V. (Scattering of finite grating) 442.
- Ubbelohde, A. R. (Thermodynamical principles) 193.
- Überall, Herbert s. Th. Sexl 221.
- Udagawa, Masatomo (Sums of random variables) 123.
- Uhler, Horace S. (Parabola) 143; (Many-figure approximations) 372.
- Ulam, S. M. s. D. H. Hyers 295.
- Ullemar, Leo (Automorphe Funktionen) 73.
- Umegaki, Hisaharu (Operator algebra. III.) 110.
- Umezawa, Hiroomi s. Y. Takahashi 449.
- Minoru s. T. Kotani 451.
- Toshio (Analytic functions) 318.
- Uno, Toshio (Curves defined by differential equations) 327.
- and Rieko Yokomi (Limit cycles) 327.
- Ura, Taro (Courbes définies à la surface du tore) 88.
- Ursell, F. (Edge waves) 438.
- H. D. s. H. G. Eggleston 310.

- Vacca, Maria Teresa (Derivate delle funzioni di Bessel) 308.
- Vaccarino, Giuseppe (Sillo-gistica. II.) 7; (Consapevolizzazione del formalismo) 247.
- Vagner, V. V. (Verallgemeinerte Gruppen) 255.
- Vaidya, P. C. (Boundary conditions in gravitational fields) 446.
- Vajnberg, L. V. (Spannungszustand und Verbiegung) 424.
- Vajnštejn, B. K. (Elektro-nenstreuung) 212.
- I. A. (Eindimensionale Abbildungen) 163.
- L. A. und B. M. Javorskij (Wahrscheinlichkeiten von optischen Übergängen) 213.
- Valatin, Jean G. (Etat supra-conducteur) 457.
- Valensi, Jacques et Claire Clarion (Oscillations d'une sphère) 193.
- Valiron, Georges (Fonctions analytiques) 310; (Fonctions entières) 310.
- Vandiver, H. S. (Cyclotomy and extensions of Gaussian type quadratic relations) 269.
- Vaona, Guido (Trasformazioni puntuali) 408.
- Varga, Richard S. (Strips free of zeros) 315.
- Varini, Bruno (Valore della matematica) 246.
- Varley, J. H. O. s. F. R. Nabarro 233.
- Varnavides, P. (Quadratic fields) 36.
- Varoli, Giuseppe (Ammortamento) 137.
- Vasseur, Jean Pierre (Diffraction des ondes) 440.
- Vedamurti Aiyar, T. V. s. C. T. Rajagopal 244.
- Vekua, N. P. (Funktionen einer komplexen Veränderlichen) 319.
- Venkataraman, C. S. (Problem of Erdős) 41.
- Vernotte, Pierre (Somme des séries asymptotiques) 66.
- Verschaffelt, J. E. (Effets thermo- et électromagnétiques) 198; (Couple thermo-électrique) 198; (Potentiel électrodynamique) 198; (Electrocinese) 198.
- Vesentini, Edoardo (Punti uniti) 169.
- Vidro, L. I. und B. I. Stepanov (Schwingungsspektren) 454.
- Vigier, Jean-Pierre (Onde à singularité) 212.
- Vilenkin, N. Ja. (Fourierintegrale) 354.
- Villari, Gaetano (Polinomi di Legendre) 307.
- Vinograd, R. E. (Beschränktheitskriterien) 85.
- Vinogradov, A. A. s. S. N. Kračkovskij 351.
- Viola, Tullio (Approximation des fonctions continues) 68; (Problemi non regolari di calcolo delle variazioni) 99; (Minimo di integrali multipli) 343.
- Višik, M. I. (Elliptische Differentialgleichungen) 95; (Systeme elliptischer Differentialgleichungen) 341.
- Viswanathan, S. (Orthogonal expansions) 304.
- Viswanatham, B. (General uniqueness theorem) 83; (Non-linear differential equations) 326.
- Viswanathan, K. S. (Linear lattices) 232.
- Voellmy, Hans R. s. E. Perret 181.
- Vogt, E. s. S. M. Neamtam 217.
- Vojt, S. S. (Tönende Scheibe) 193.
- Vorob'ev, N. N. (Aussagenkalkül) 251; (Ableitbarkeit im Aussagenkalkül) 252; (Ideale assoziativer Systeme) 256.
- Vrečko, M. (I. Arnovljevič) 6.
- Vrkljan, V. S. (Magnetisches Moment) 218.
- Wag, E. J. van der (Courbures. I.) 154; (II. III. IV. V.) 155.
- Wada, W. W. (Scattering of mesons by nucleons) 450.
- Waerden, B. L. van der (Punkte auf der Kugel) 159.
- Wagner, K. (Durchschnitt von Punktmengen) 163.
- Wait, James R. (Reflection of waves) 201; (Mutual inductance) 240.
- Waldmann, Ludwig (g -Faktor des Elektrons) 214.
- Walker, A. M. (Goodness-of-fit tests) 132.
- Walsh, John E. (Tests for Student's hypothesis) 132; (Large sample validity) 136.
- Walsh, John L. (Location of zeros) 20.
- Michael John (Paracompactness of CW -complex) 419.
- Wang, Hao (Truth definitions) 13.
- Wanke, H. s. F. Sauter 234.
- Wannier, G. H. s. H. W. Lewis 238.
- Wataghin, G. (Quantum theory of fields. II.) 450.
- Watanabe, Hideaki (Séparabilité des ensembles plans. I.) 57.
- Mitsukuni s. T. Muto 456.
- Watari, Wataro (Electronic states) 453.
- Watkins, Dean A. (Velocity distribution) 203.
- Watson, G. L. (Large numbers) 42.
- Waugh, Albert E. (Statistical method) 378.
- Weil, André (Théorèmes de de Rham) 167.
- Weiler, H. (Sample size for controlling the mean of a population) 130.
- Weill, Georges s. J.-C. Simon 201.
- Weinberger, H. F. (Inequality) 53; (Weinstein method for eigenvalues) 112.
- Weinstein, Alexander (Shafts under torsion) 430.
- W. (Ray-tracing) 444.
- Weissinger, J. (Auftriebsverteilung) 182.
- Weisskopf, Viktor F. (Nuclear structure) 224.
- Wenzl, Fritz (Algebraische Gleichungen) 114; (Elektronen einheitlicher Anfangsgeschwindigkeit) 203.
- Wergeland, Harald (Least dissipation of energy) 193.
- Wermer, John (Invariant subspaces) 358.
- Wessel, Walter (Elektron. III.) 214.
- Westphal, W. H. s. Physikalisches Wörterbuch 171.
- Weyl, Hermann s. H. A. Lorentz 206.
- Whaples, G. (Local class field theory. I.) 37; (Carathéodory's temperature equations) 298.
- Wheeler, Albert D. (Deflection of photons) 211.
- White, Paul A. (Regular convergence) 164; (Jordan-Brouwer separation theorem) 166.

- Whitehead, J. H. C. (Transformation groups) 28.
 Whitham, G. B. (Supersonic projectile) 191.
 Whitmer, Robert M. (Dielectric wave guide) 200.
 Whittaker, Edmund s. I. Newton 5.
 Whyburn, G. T. (Quasi-compact mappings) 417.
 — William M. s. L. P. Burton 328.
 Widder, D. V. s. I. I. Hirschman jr. 297.
 Wigner, E. P. s. T. Teichmann 230.
 Wilansky, Albert (Convergence fields) 63; (Summability) 300.
 Wild, John J. (High-speed printer) 369.
 Wilkens, Alexander (Kometenbahnbestimmung) 238.
 Williams, E. J. (Scores in contingency tables) 385.
 — F. C. and T. Kilburn (Computing machine) 370.
 Wilson, Edwin B. (Barnard's CSM test) 383.
 — H. A. (Nuclear model) 226.
 Wintner, Aurel (Non-vanishing of Dirichlet series) 46, 314.
 — — s. Ph. Hartman 150, 153.
 Wishart, John (Cumulants of the k -statistics) 131.
 Witt, Ernst (Satz von Ostrowski) 270.
 Wittich, Hans s. H. Schubart 78.
 Woeste, K. (Atomkern. II.) 452.
 Woinowsky-Krieger, S. (Melin-Transformation) 425.
 Wold, Herman (Interkorrelation) 134.
 Wolf, E. s. A. B. Bhatia 202.
 — J. Jay (Relay computer) 370.
 — Paul (Galoissche Algebren) 269.
 Wolfowitz, J. s. K. L. Chung 124.
 Wolfson, Kenneth Graham (Ring of all linear transformations) 267.
 Wolontis, Vidar (Conformal invariants) 80.
 Woodruff, Ralph S. (Confidence intervals for medians) 380.
 Woodward, J. B. s. G. E. Brown 223.
 Woonton, G. A. (Diffraction field) 202.
 Wright, E. M. (Functional inequalities) 278.
 — G. H. von (Double quantification) 8.
 Wu, Ning-Gau s. C. W. Nelson 430.
 — Ta-You (Exchange scattering) 213; (Harmonic bands of HD molecule) 232.
 — — s. E. Corinaldesi 450.
 Wunderlich, Walter (Minimalschraubflächen) 405.
 Wyles, Oswald (Order and topology) 138.
 Yadau, N. H. (Neutron-proton scattering) 221.
 Yamada, Masami and Masato Morita (β -ray angular correlations) 450.
 Yamaguchi, Yoshio s. T. Kotani 451.
 Yamamoto, T. (Analytical spin) 447.
 — Y. (Elasto-plastic body) 431.
 Yamazaki, Kazuo (Quantized field theory) 448.
 Yano, Shigeki (Fourier analysis. XXXI.) 70.
 Yates, Robert C. (Differential equations) 325.
 Yokomi, Rieko s. T. Uno 327.
 Yoshida, Shiro s. H. Horie 450.
 Yoshizawa, Taro ($y'' = f(x, y, y')$) 326.
 Yosida, Kei (Antiferromagnetic resonance absorption) 237.
 Young, G. S. s. M. L. Curtis 163.
 — L. C. s. K. H. Carlson 61.
 Yu, Chia-Yung (Functions homomorphic in an infinite region) 77.
 Yudowitch, K. L. s. R. M. Frank 234.
 Zagar, Francesco (Espansione dell'universo. I.) 209.
 Žak, I. E. (Trigonometrische Doppelreihen) 306.
 Zariski, Oscar (Lemma of Enriques-Severi) 148.
 Zassenhaus, Hans (Lie-Algebren) 267.
 Zavalo, S. T. (Freie Gruppen) 23.
 Zehnstellige Tafeln 372.
 Zenchen, O. (Integro-Differentialgleichungen) 346.
 Zerna, W. (Randstörungen) 427.
 Ziegler, H. (Knickung gerader Stäbe) 426; (Stabilitätskriterien) 426.
 Ziel, A. van der s. A. J. Dekker 456.
 Zimmermann, Wolfhart (Abbildungen topologischer Räume) 164.
 Zino'ev, V. A. (Mechanismen) 150.
 Žišina, A. I. s. O. A. Olejnik 328.
 Zmorovič, V. A. (Konvergenz von Reihen positiver Zahlen) 64.
 Žukovskij, N. E. (Theoretische Mechanik) 173.
 Zurmühl, Rudolf (Runge-Kutta-Verfahren) 365.
 Zygmund, A. s. A. P. Calderon 102.
 Zwinggi, Ernst (Todesfallversicherung) 136.

